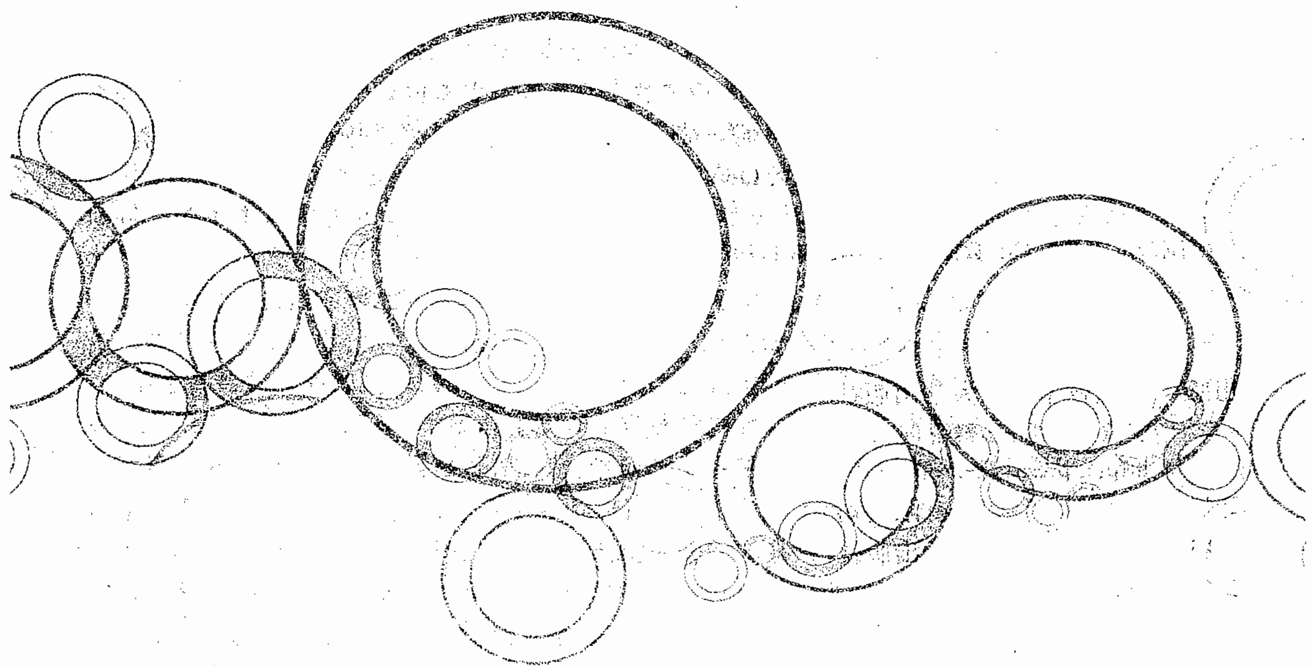


ZHONGXUE WULI AOSAI FUDAO

热学·光学·近代物理学

REXUE GUANGXUE JINDAI WULIXUE

崔宏滨　编著



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是为高中生参加全国中学生物理竞赛(也称"物理奥赛")而编写的一本辅导教材,内容包括热学、光学、狭义相对论、原子物理及核物理。上述内容是物理学的重要组成部分,也是近代物理学发展和应用的主要领域。据作者粗略统计,这些内容在历年的竞赛试题中约占35%。为了便于学生自学,一方面,对每一部分内容都从实验和理论方面进行了详细的论述;另一方面,列举了大量的习题,并进行了详细的解答,特别是对历年的竞赛题目,都采用与参考答案不同的方法进行了讲解,并对部分试题加以点评。这样做的目的,是使读者学有所得,能对光学、热学和近代物理学的基础内容有较全面和正确的认识,使自己已有的物理知识进一步深化,从而使读者具备坚实的物理基础,能够处理较复杂的物理问题。

本书采用高中阶段的数学知识处理所涉及的问题。例如,对于光的干涉、衍射,用振幅矢量法进行讲解,从而避免了复数和积分的运算;对于波粒二象性的内容,则从相关的实验总结出相应的结论,等等。

本书既便于学生自学,也可供中学教师作为参考资料使用。

图书在版编目(CIP)数据

中学物理奥赛辅导.热学·光学·近代物理学/崔宏滨编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2012.6

ISBN 978-7-312-02996-7

Ⅰ.中… Ⅱ.崔… Ⅲ.①热学—中学—教学参考资料 ②光学—中学—教学参考资料 ③物理学—中学—教学参考资料 Ⅳ.G634.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第117975号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,230026
http://press.ustc.edu.cn

印刷 合肥市宏基印刷有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 787 mm×1092 mm 1/16

印张 26.75

字数 663千

版次 2012年6月第1版

印次 2012年6月第1次印刷

定价 49.00元

前　言

物理学是一门实验科学，同时，物理学的各个分支都是一个完整的理论体系，都具有完备的数学逻辑。这是物理学的特征，也体现了牛顿的关于物理学是"自然哲学的数学原理"的思想。对于牛顿的上述思想，可以这样理解：物理学的研究对象是自然界中物质的运动、作用和结构的基本规律，这些规律必须从实验中得到，也必须要用数学知识加以阐述，要用数学逻辑进行推导。这样，物理学才能在各个部分之间建立起合理的关系，才能形成一个理论体系，才能较方便地进行推理、验证和推广，并作为一门学科，一种基础知识，可被越来越多的公众所理解和接受。

事实正是如此。由于物理学的正确和严谨，物理学的知识迅速得到发展和普及，从事物理研究的人越来越多，所获得的成果也越来越多，从而对人类的进步和社会的发展产生了巨大的推动作用。第一次工业革命，就是经典的力学、热学所导致的机械和热机在生产中应用的结果。20 世纪，更是相对论、量子力学的发展和应用导致了各种新技术的产生，从而推动了社会的重大进步。

全国高中生物理竞赛自 1984 年开办以来，至今已举办了 28 届。这样的全国性物理竞赛，对提高广大中学生学习物理的兴趣、促进物理知识的普及起到了很好的作用，并使学生了解和掌握处理物理问题的方法和技巧。本书就是针对参加竞赛的学生而编写的一本辅导教材，主要讲述热学、光学、狭义相对论、原子物理与核物理的基础知识。在中学阶段，学生大多较系统地学习了力学、电磁学的基础知识，但对热学、光学以及近代物理学的知识却了解得较少，而这些知识又是物理竞赛中相当重要的部分。因此，本书对这些内容的基础知识作了系统而详细的介绍。

这些内容虽然在物理竞赛的知识范围内，但却超出了中学的教学范围，因而多数学生只能在课余时间学习这些知识。因此，本书在构思和写作的过程中，尽量将这些内容中最基本、最核心、最重要的部分系统地加以阐述，又力求深入浅出、简明扼要。为了做到这一点，每一单元都首先介绍重要的物理模型，之后围绕核心内容进行阐述。例如，热学部分讲述在平衡态和准静态过程中的热力学定律及其应用；几何光学部分讲述建立在三大实验定律基础之上的以光线为模型的高斯成像理论；波动光学部分则讲述以光波的叠加原理为基础的高频电磁辐射的相干叠加和非相干叠加；相对论部分重点阐述以光速不变为基础的时空关联和时空变换关系；量子力学部分则从实验上讲述波粒二象性的物理基础，以及由此得到的量子态和不确定原理；原子物理部分讲述以卢瑟福核式结构模型为基础、基于量子原则的玻尔原子理论；原子核部分，一方面讲述原子核的构成和粒子的简单分类，另一方面讲述粒子之间的相互作用所遵循的守恒律。对每一部分，都兼顾实验的准确性和理论的完整性。

为了使学生能够对这些内容有较深刻的认识并且可以灵活地运用，书中列举了大量结合实际的例题，并对部分竞赛试题用独特而巧妙的方法加以求解。例如，历来求解光束通过光楔的问题，都是采用折射定律进行推算的，这样做，既繁琐，又要在计算过程中多次采用近似方法加

以处理。本书则将这一过程作为两次连续的成像过程进行处理，非常简洁地得到了答案，因为成像公式是已经作过傍轴近似的定理，故用以解决这类问题，就无需再从基本的近似做起。书中类似的例题还有许多，相信学生在阅读之后一定会有新的体会。

最后，作者希望学生能够具有这样的认识：尽管物理学始终在不断地发展，不断地取得新成果，并将新成果转化为最新的技术，但是，物理学是整个自然科学最重要的基础，也是现代社会成员必备的基础知识。所以，不管将来学习什么专业，从事何种行业，坚实的物理基础一定会使你在成功的道路上跑得更快、走得更远。

书中难免有不足或疏漏之处，作者诚恳地希望读者能够发现并指出书中的错误和不足，以便有机会加以改正。

崔宏滨

2012年5月15日于中国科学技术大学

目　　次

第1章　热现象及其微观机制

1.1　描述热现象的物理参量

在人们的生活和生产中，热现象以及对热现象的利用几乎是无处不在的。热现象的表现之一是物体和环境都有冷热之分。例如，冰与水的冷热不同；一天中的不同时刻、一年的不同季节，气候的冷热也不相同。热现象的表现之二是物质在不断的变化过程中，往往伴随着热的变化。这里所谓的变化通常有各种不同的类型，一种是物理变化，例如水结成冰要放热，冰熔化成水要吸热；另一种是化学变化，如煤炭燃烧要放热，特别是原子核的变化，要放出更多的热量，还有很多反应要吸热。热现象的表现之三是物质的相互作用也能引起热的变化。例如，电流通过导体要放热，物体受到光的辐照会变热，冷热不同的物体相接触后，冷热程度会渐趋一致。人们利用热现象的例子不胜枚举，例如冰块降温、空调取暖和制冷、蒸汽做功、核反应发电等等。

在几百年来对热现象进行研究的过程中，物理学的一个经典分支逐渐建立起来，并不断得到发展和完善，这就是热学。人们发现，热的变化会导致物质许多相关的特性变化，因而，赋予这些特性以物理上的定义，用相应的物理量描述这些特性，并根据物理实验的结果用数学逻辑将这些物理量相关联，就构成了热学理论体系的基础。以下首先介绍这些物理量的定义、标度和实验测量。

1.1.1　体积

各种形态的物质，温度改变时，体积也随之改变，因而，体积就是描述热现象的一个重要的物理参量。

若研究对象的体积不受限制，在多数情况下，温度升高，体积膨胀，温度降低，体积收缩。固体和液体就是这样的。气体总是处在容器中。对固定容积的容器，由于气体受到限制，其体积不能够随温度改变；若容器的容积可变，例如弹性容器，或带有可自由移动的活塞的容器，其中的气体的体积可以随温度而变化。

1.1.2　压强

若体积的变化受到某种限制，则温度的变化会导致压强的变化，因而压强也是研究热现象过程中一个非常重要的物理量。

在国际标准单位制中，压强的单位是**帕斯卡**，符号为 Pa，即牛顿/米^2。1 标准大气压（符号为 atm）约等于 760 mm 水银（Hg，汞，俗称水银）柱所产生的压强，即 $1.013\,25\times10^5$ Pa，可见 Pa 是一个非常小的压强单位。

除了 Pa 之外，巴(符号为 bar)也常用作气体压强的单位，1 bar = 100 000 Pa；托(托里拆利，符号为 torr)是另一种气体压强的单位，等于 1 mm 水银柱产生的压强，1 torr = 1/760 atm≈133.322 37 Pa。

【例 1.1】(第 19 届全国中学生物理竞赛复赛试题) 某甲设计了一个如图 1.1 所示的“自动喷泉”装置，其中 A，B，C 为三个容器，D，E，F 为三根细管。管栓 K 是关闭的。A，B，C 及细管均盛有水，容器水面的高度差分别为 h_1 和 h_2。A，B，C 的截面半径为 12 cm，D 的截面半径为 0.2cm。甲向同伴乙说：“我若拧开管栓 K，会有水从细管口喷出。”乙认为不可能，理由是：“低处的水自动走向高处，能量从哪儿来?”甲当即拧开 K，果然见到有水喷出，乙哑口无言，但不能明白自己的错误何在。甲又进一步演示：在拧开管栓 K 前，先将喷管 D 的上端加长到足够长，然后拧开 K，管中水面即上升，最后水面静止于某个高度。

(1) 讨论拧开 K 后水柱上升的原因。

(2) 当 D 管的上端足够长时，求拧开 K 后 D 中的静止水面与 A 中的水面的高度差。

(3) 说明水柱上升所需的能量来源。

解 (1) 如图 1.2 所示，在 A，B，C 瓶中，水面上方均有空气。其中 A 瓶中水面处的大气压为 p_0，由于 A，B 两瓶通过毛细管 E 相连，而 E 中有水，所以 C 瓶中水面处的压强为 $p_0+\rho g(h_1+h_2)$(ρ 为水的密度)，从而 C 瓶中空气的压强亦为 $p_0+\rho g(h_1+h_2)$。

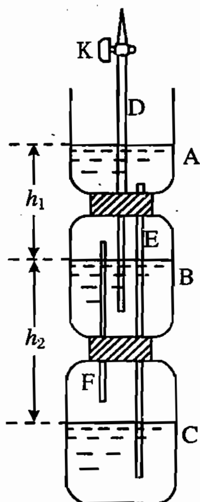


图 1.1 例 1.1 中的装置

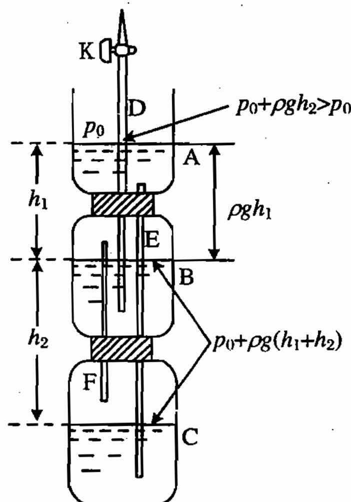


图 1.2 例 1.1 的解

B，C 瓶通过毛细管 F 相连，F 中装有空气，因而 B，C 瓶中空气的压强相等。因此，B 瓶中水面处的压强为 $p_0+\rho g(h_1+h_2)$。

毛细管 D 插入 B 瓶的水中，则 D 管在 B 瓶中水面处的压强为 $p_0+\rho g(h_1+h_2)$。若将 D 的管栓 K 开启，则 D 中的水面可上升至比 B 瓶中的水面高出 h_1+h_2 的位置，即 D 管中的水面比 A 瓶中的水面高出 h_2，因而 D 管中的水柱上升。

(2) 若 D 管的上端足够长，拧开 K 后，D 中的静止水面比 A 中的水面高 h_2。

(3) 由上面的分析可知，D 管中的水面将上升，B 瓶中的水面将下降，其中空气体积增大，压强下降。从而 C 瓶中的空气进入 B 瓶，导致 C 瓶中的空气压强降低，则 A 瓶中的水通过管 E 进入 C 瓶，这样 A 瓶中的水面就要降低。所以，水柱上升的能量来源是大气对 A 中的水做

的功。

由于水瓶的截面面积是细管的截面面积的3 600倍，所以管中的水面上升不会导致瓶中的水面有明显改变。

1.1.3 温度与温标

毫无疑问，温度就是冷热的程度。然而，为了衡量并比较冷热程度，必须要有一套量化的、严格的，并被普遍接受的温度标定体系，这就是**温标**。

温度是物理学中最重要的参量之一。既然所有的物理量都应当是可以从实验中测量的，那么温度和温标也必须依赖于物质的某种可以量化的特性。

以下分别介绍不同温度体系的定义。

1. 经验温标：摄氏温标与华氏温标

物质的许多物理性质会随着温度而变化，例如体积、压强、电阻、温差电动势等等。如果上述性质随温度的变化是单向的，则这些物质可被用作**测温物质**，测温物质随温度变化的性质就是**测温属性**。

当然，为了得到严格而准确的温度的数值，还必须定义测温属性与温度之间的一一对应关系，也就是测温属性的量值的改变对应着单位量值温度的改变。例如，记某种测温属性的改变量为 ΔB，相应的温度改变量为 ΔT，则规定两者之间的变化关系为 $\Delta T = k\Delta B$。

在通常情况下，为了确定温度与测温属性之间严格而统一的关系，还需要选择**固定点**，并规定固定点的温度的数值。

例如，根据液体体积随温度热胀冷缩的属性而建立的**摄氏温标**是一种较早采用的温标，直至今日还在人们日常生活和生产中普遍应用。

摄氏温标是按下述规定建立的：在1 atm下，纯冰和纯水混合物的温度（称作冰点）是0度，纯水的沸点（称作气点）是100度，认定液体的体积随温度做线性变化，将其间体积的变化等分为100份，每一份体积变化对应于1度温度的变化。

摄氏温标的符号为℃。

除摄氏温标之外，还有一种**华氏温标**，这种温标与摄氏温标之间的关系为：0摄氏度对应32华氏度，100摄氏度对应212华氏度，其间的温度被等分为180份，每一份是1华氏度。

华氏温标的符号为℉。

以 t_C，t_F 分别表示摄氏温度和华氏温度，则两种温标之间的关系为

$$t_F = \frac{9}{5}t_C + 32 \tag{1.1}$$

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32) \tag{1.2}$$

水银温度计是一种最常用的液体温度计。它是由一个贮有液体的玻璃泡和一段真空毛细管构成的，结构如图1.3所示。标定时，将贮有水银的玻璃泡与待测对象接触，其中的水银由于热胀冷缩，体积会随温度变化，因而可以导致毛细管中水银柱的高度发生变化。根据冰点和沸点在毛细管上标记0℃和100℃的位置，然后再将0℃和100℃间的毛细管等分为100份，则每一份就是1℃。100℃以上和0℃以下的部分，也按同样的方式标记。

首先，由于水银只在一定的温度范围内是液体，温度太低会凝结成固体，温度太高会变成气

体，所以水银温度计有一定的适用范围。在水银呈液态的温度区域之外，必须用其他物质作为测温物质。

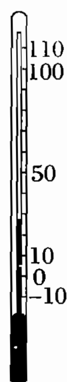


图 1.3　液体温度计

其次，用这样的方式标记温度，其实是认为水银的体积膨胀与温度之间是线性关系，这样一来，温度就成了与具体的材料相关联的指标。因为，按水银温度计设定的温标，其他物质的体积不一定在很大的范围内随温度呈线性变化，所以，如果用另一种液体制作温度计，这种温度计除了 0 度和 100 度与水银温度计是严格相同的外，不能保证在其他的温度，特别是在温度较高或较低时与水银温度计测量的结果完全一致。因此，依赖于物质属性的温标就失去了作为一般性标准的意义。

除水银温度计之外，另一种常用的液体温度计是酒精温度计，其结构和标定方式与水银温度计一样。由于水银与酒精毕竟是两种不同的材料，所以严格来说，无法保证这两种温度计是完全一样的。

上述液体温度计是根据液体的体积随温度热胀冷缩的特性来测量温度的。水银、酒精等液体就是测温物质，而它们的体积随温度改变的特性就是测温属性，在 1 atm 下，水的冰点和沸点就是固定点。

可见，要建立一种温标需要三个要素：标志温度的测温物质的某种测温属性；选定的固定点；规定的测温属性随温度变化的关系。

除液体温度计外，还可以用物质的其他属性测量温度。例如，许多物质的电阻率与温度相关，所以可以用电阻与温度的关系作为测温属性，从而制成**电阻温度计**，其中常用的有铂电阻温度计等；不同的金属材料构成的回路中会产生与温度相关的电动势，则热电动势可用作测温属性，据此可制成**热电偶温度计**，如铂-铂铑热电偶温度计等；对一定体积的气体，采用其压强作为测温属性，就可制成**定容气体温度计**；对一定压强的气体，用其体积作为测温属性，就可制成**定压气体温度计**；等等。图 1.4 是几种不同的温度计在 0～100 ℃范围内测温的实验结果，其中横坐标是氢定容物温度计的读数，纵坐标是其他温度计的读数与氢定容温度计读数的差值。可见，用不同的测温物质，测温是有偏差的。

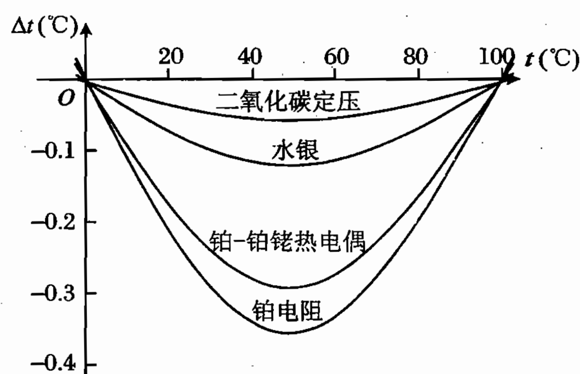


图 1.4　不同温度计测温的偏差

【例 1.2】　一水银温度计浸在冰水中时，水银柱的长度为 4.0 cm；浸在沸水中时，水银柱的长度为 24.0 cm。

(1) 室温为 22.0 ℃时，问水银柱的长度是多少？

(2) 若用该温度计测温，水银柱的长度为 25.4 cm，问这时的温度是多少？

解　水银柱的长度与温度是线性关系，由此可知，温度 t 与长度 l 必然满足方程

$$\frac{t-0}{l-4.0}=\frac{100-0}{24.0-4.0}$$

由此可得

$$t = 5.0l - 20.0$$

(1) $l = \dfrac{22 + 20.0}{5.0} = 8.4(\text{cm})$。

(2) $t = 5.0 \times 25.4 - 20.0 = 107.0(℃)$。

【例 1.3】 当热电偶的一个触点保持在冰点,而另一个触点保持在任一 t ℃时,其热电动势与温度间的关系为

$$E = \alpha t + \beta t^2$$

其中,$\alpha = 0.20\ \text{mV} \cdot ℃$,$\beta = -5.0 \times 10^{-4}\ \text{mV}/℃^2$.

(1) 试计算温度分别为 −100 ℃,200 ℃,400 ℃,500 ℃时热电动势的值,并在此温度范围内画出 $E-t$ 图。

(2) 如果以下式定义温标:

$$t^* = aE + b$$

并规定冰点为 0 度,气点为 100 度,试求出 a 和 b 的值,并画出 $E-t^*$ 图。

(3) 求出与 $t = -100$ ℃,200 ℃,400 ℃,500 ℃对应的 t^* 的数值,并画出 $t-t^*$ 图。

(4) 试比较温标 t 与 t^*。

解 (1) 电动势与温度的对应值如表 1.1 所示。

表 1.1 电动势与温度的对应值

t(℃)	−100	200	400	500
E(mV)	−25	20	0	−25

$E-t$ 的关系可用图 1.5 表示。

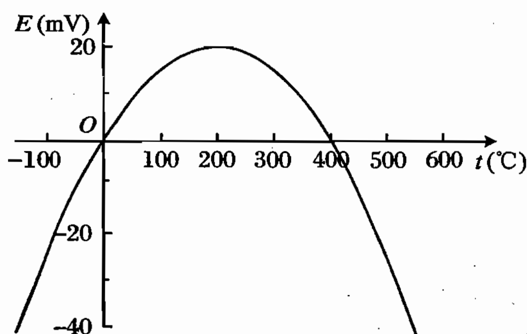


图 1.5 $E-t$ 的关系

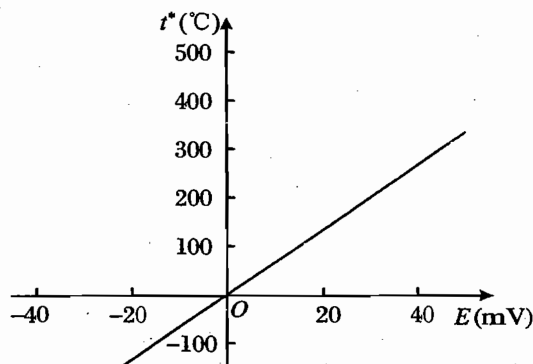


图 1.6 $E-t^*$ 的关系

(2) 冰点时,$E = 0.0$ mV;气点时,$E = 15.0$ mV。于是可求得 $a = 100/15$ ℃/mV,$b = 0$。$E-t^*$ 图为一条直线,见图 1.6。

(3) 根据题目列表,见表 1.2。

表 1.2 t,E,t^* 三者间的对应

t(℃)	−100	200	400	500
E(mV)	−25	20	0	−25
t^*(℃)	−500/3	400/3	0	−500/3

两种温标之间的关系为 $t^* = aE + b = a\alpha t + a\beta t^2$。$t - t^*$ 的关系如图 1.7 所示。

(4) 温标 t 与电动势 E 之间是二次函数关系，每一个电动势有两个对应的温度，所以使用时要区分温区(以 200 ℃为边界)，这样才能使两者一一对应，而温标 t^* 与电动势 E 之间是一一对应的。

2. 理想气体温标

实验发现，对于一定量的气体，在压强较低的情况下，若保持气体的体积不变，则其压强随温度的升高而线性增大；若保持气体的压强不变，则其体积随着温度的升高而线性增加。根据这样的性质，可以制定气体温标。

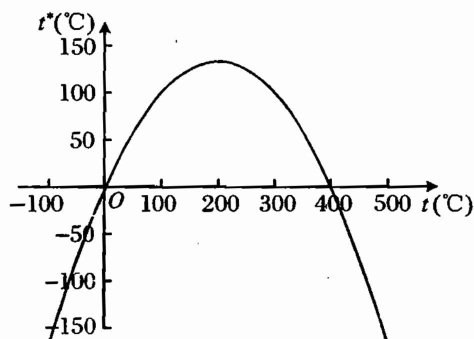


图 1.7　$t - t^*$ 的关系

对于一定量的气体，控制气体的体积不变，根据压强的变化而制定的温标称作**“定容气体温标”**。定容气体温标中温度与压强的关系可表示为

$$T(p) = \alpha p \tag{1.3}$$

式中，p 为气体压强，α 为比例系数。

上述定容温标中的比例系数 α 是需要根据选定的固定点来确定的。历史上曾对固定点有不同的选择，自 1954 年以后，国际上规定只用一个固定点建立温标，这个被选择的固定点就是水的**三相点**，即**纯冰、纯水和水蒸气三相的平衡点**，并规定该点的温度是 273.16 度。

理想气体温标中，温度的单位称作**开尔文**，简称为开，符号为 K。理想气体温标的分度与摄氏温标相同，即 1 K 的温度间隔与 1 ℃的温度间隔相同。

若记 p_{tr} 为气体在水的三相点的压强，则有

$$273.16 = \alpha p_{tr} \quad 即 \quad \alpha = \frac{273.16}{p_{tr}}$$

于是定容理想气体温标的表达式可写为

$$T(p) = 273.16\frac{p}{p_{tr}} \tag{1.4}$$

定容理想气体温度计的原理和结构如图 1.8 所示，其中 B 为测温泡，通过毛细管与水银压强计相连。测温泡 B 中充有作为测温物质的气体，维持压强计 A 管的水银面在固定位置 0 处，即可保持测温泡中气体体积恒定。测温泡中气体的压强为压强计两管水银面的高度差 h 产生的压强与大气压的和。

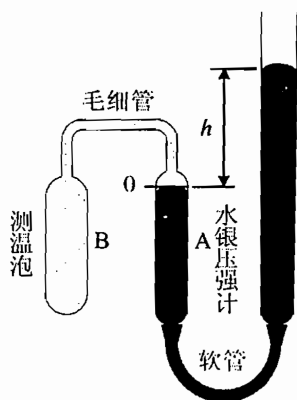


图 1.8　定容理想气体温度计

实验表明，对于不同种类的气体，定容温标并不是完全相同的。例如，分别选用氢气、氧气、氮气和空气做成定容温度计，并使它们在三相点有相同的压强，则当温度到达气点时，从实验中测得的不同气体的压强并不相同。这样一来，根据式(1.4)算得的温度就不相同了。但是，若逐渐降低上述气体在三相点的压强，并重复上述实验，发现尽管在气点的压强仍不相同，但相差逐渐减小，如图 1.9 所示。当气体变得非常稀薄时，不同种类的气体的定容温标

几乎是一致的。非常稀薄的气体近似于理想气体，或者说理想气体是压强趋于零时的极限，这样的极限温标就称作定容理想气体温标，表示为

$$T = \lim_{p_{tr}\to 0} T(p) = 273.16 \lim_{p_{tr}\to 0} \frac{p}{p_{tr}} \tag{1.5}$$

式中，$\lim\limits_{p_{tr}\to 0}$是极限符号，表示气体在三相点的压强趋于零的条件下。

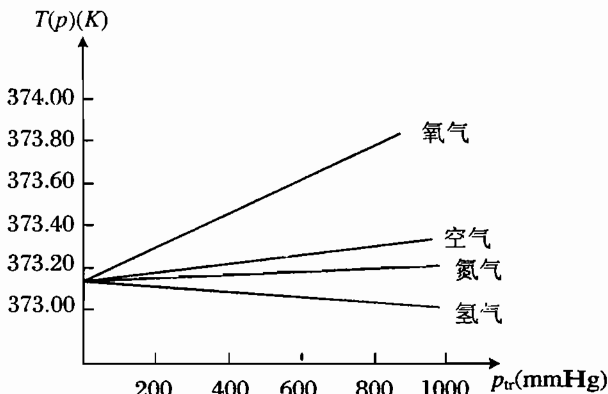


图 1.9　不同压强下定容气体温度计的差别

同样，对于非常稀薄的气体，在保持压强恒定时，可利用体积的变化标定温度的变化，当气体的压强趋于零时，这种极限的温标就是**定压理想气体温标**。定压温标与定容温标都以水的三相点作为固定点，从而有

$$T = \lim_{p_{tr}\to 0} T(V) = 273.16 \lim_{p_{tr}\to 0} \frac{V}{V_{tr}} \tag{1.6}$$

式中，V_{tr}为气体在水的三相点的体积，则由于定压时，理想气体的体积随温度呈线性变化，定容时，理想气体的压强也随温度呈线性变化，所以在理想气体温标中，只需要一个定标点，即水的冰点。

【例 1.4】　定容气体温度计的测温泡浸在水的三相点槽内时，其中气体的压强为 50 mmHg。

(1) 用该温度计测量 300 K 的温度时，气体的压强是多少？

(2) 当气体的压强为 68 mmHg 时，待测的温度是多少？

解　该题中，测温泡中的气体在水的三相点时的压强 $p_{tr} = 50$ mmHg。按照式(1.4)，可得：

(1) $p(T) = \dfrac{T}{273.16} p_{tr} = \dfrac{300}{273.16} \times 50 = 54.9(\text{mmHg})$；

(2) $T(p) = 273.16 \dfrac{p}{p_{tr}} = 273.16 \times \dfrac{68}{50} = 371.50(\text{K})$。

【例 1.5】　用定容气体温度计测得冰点的理想气体的温度是 273.15 K，试求温度计内的气体在冰点时的压强 p_0与在三相点时的压强 p_{tr}的极限值。

解　根据定容理想气体温度计的定义，可得

$$T(p) = 273.16 \frac{p}{p_{tr}}$$

由于冰点时测得的温度为 $T(p_0) = 273.15$ K，所以

$$\lim_{p_{tr}\to 0} \frac{p_0}{p_{tr}} = \frac{T(p_0)}{273.16} = \frac{273.15}{273.16} = 0.99996$$

【例 1.6】　用定容气体温度计测量某种物质的沸点，测温泡在水的三相点时，其中气体的压强 $p_{tr} = 500$ mmHg。当测温泡浸入待测物质时，测得的压强值为 $p = 735$ mmHg。从测温泡中抽出一些气体，使 p_{tr}减为 200 mmHg，重新测得 $p = 293.4$ mmHg。再抽出一些气体，使 p_{tr}进一步减为 100 mmHg，测得 $p = 146.68$ mmHg。试据此确定待测物质沸点的理想气体温度。

解　首先，按照式(1.4)，可得

$$T(p)=273.16\frac{p}{p_{tr}}$$

从而在三种不同的情况下，分别有

$$T(735)=273.16\times\frac{735}{500}=273.16\times1.47\approx401.55\quad(\mathrm{K})$$

$$T(293.4)=273.16\times\frac{393.4}{200}=273.16\times1.467\approx400.73\quad(\mathrm{K})$$

$$T(146.68)=273.16\times\frac{146.68}{100}=273.16\times1.4668\approx400.67\quad(\mathrm{K})$$

若以上述数据求出 $T(p)$ 与 p_{tr} 的关系，并外推至 $p_{tr}=0$，即可得到相应的温度值。由于压强越低越接近于理想气体，因此只要以(400.73,200)和(400.67,100)作直线即可。由此得到

$$\frac{T-400.67}{p_{tr}-100}=\frac{400.73-400.67}{200-100}$$

即

$$T=0.006p_{tr}+400.61$$

于是沸点的理想气体温度为 $T=400.61\ \mathrm{K}$。

或者，直接算得 $\lim\limits_{p_{tr}\to0}\frac{p}{p_{tr}}$ 的数值。以两点(1.467,200)和(1.466 8,100)作直线，可算得气体在三相点时的压强为 0 时，$\lim\limits_{p_{tr}\to0}\frac{p}{p_{tr}}=1.466\,6$。

综上，理想气体的温度为

$$\begin{aligned}T(p)&=273.16\times\lim_{p_{tr}\to0}\frac{p}{p_{tr}}\\&=273.16\times1.466\,6=400.62\quad(\mathrm{K})\end{aligned}$$

3. 热力学温标

热力学温标是在热力学第二定律的基础上引入的一种温标，这种温标完全不依赖于任何测温物质的测温属性。热力学温标中温度的单位也是开尔文，记为 K。仍选择水的三相点为固定点，规定该点的热力学温度为 273.16 K，1 K 就是水的三相点温度的 1/273.16。

实际上，热力学温标是国际上规定的最基本的温标，但这是一种理想温标。可以证明，在理想气体温标所能确定的温度范围内，理想气体温标与热力学温标是完全一致的。因而，实际的热力学温度都是采用理想气体温度计来测量的。

热力学温度与摄氏温度之间的变换关系为

$$T=t_C+273.15\tag{1.7}$$

或

$$t_C=T-273.15\tag{1.8}$$

由此可见，热力学温标的 0 K 相当于 −273.15 ℃。在此温度下，水银、酒精等液体早已成为固态，所以这样的温标其实是用气体作为测温物质，通过测量气体的体积或压强随温度的变化来标定温度的。为了不使气体在低温下液化，采用的都是极其稀薄的气体，这样的气体可以视作理想气体。

1.2 热 平 衡

1.2.1 平衡态

将两杯温度不同的水混合，开始时水中各部分的温度是不同的，经过一段时间后，各部分的温度变得相等，或者说，从这时起，水中各部分的温度相等，并且不再变化，就说各部分都处于平衡态。

如图 1.10 所示，一个封闭容器被隔板分成 A，B 两部分，A 部分贮有气体，而 B 部分是真空。若抽去隔板，A 中的气体会向 B 中扩散。扩散过程中，各处的状态，如温度、压强、密度等都不相同，经过一段时间后，各处的状态会变得一致。如果外界条件不变，则容器中气体的状态也将保持不变，整个容器中的气体处于平衡态。

再如，将水装在与大气相通的容器中，水将不断蒸发，这一过程将一直进行，直到容器中的水全部蒸发完。但是，如图 1.11 所示，将容器密封，其中水面上方的水蒸气会不断增加，同时也会有水蒸气重新凝结成水。经过一段时间后，水蒸发的速率和水蒸气凝结的速率相等，从宏观上看，蒸发停止了，水蒸气达到饱和状态，水的状态和水蒸气的状态都不再变化。就是说，水与水蒸气构成的系统处于平衡态。

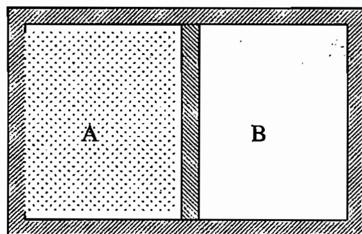


图 1.10　气体的扩散



图 1.11　饱和水蒸气

一个不受外界影响的系统，各种宏观性质不随时间变化的状态叫作平衡态。

对于处在平衡态的系统，表征其宏观性质的物理量，如温度、压强、体积等等，都不再随时间改变。但是，这并不表明系统的运动停止了。其实，组成系统的分子、原子都在不停地运动着。例如处于平衡态的气体，其中的分子一直都在做随机的热运动，由于这种运动是随机的，所以从平均效果看，各处的状态不再改变；处于饱和态的水和蒸汽，不断地有水分子从水中进入蒸汽中，同时，也有等量的水气分子进入水中。因此，从微观上看，这类平衡都是动态的平衡，故也称作**热动平衡**。

只有处于平衡态的系统才有确定的状态参量。对图 1.10 所示的情形，只有当容器中各处有相同的温度和压强时，才能用这些物理量描述整个系统的状态。在图 1.11 中，容器中各处的温度相等，水蒸气各处的压强也相等。

1.2.2 热力学第零定律

假设有两个热力学系统,原先各自处于平衡态,但两个系统的状态不尽相同。若使这两个系统进行热接触(使这两个系统之间发生传热递),实验表明,这两个系统的状态都将发生改变,但经过一段时间后,每个系统的状态都不再改变,说明不但每个系统都达到了一个新的平衡态,而且两个系统也达到了共同的平衡态,即热平衡状态。对于达到热平衡的两个系统,它们的温度一定是相同的。

如果取三个热力学系统 A,B,C,将 B 和 C 进行热力学隔绝(即使两者之间没有热接触,从而两者之间没有热交换),但使 B 和 C 同时与 A 热接触。经过一段时间后,A,B 之间达到热平衡,同时,A,C 之间也达到热平衡。实验表明,这时如果使 B 和 C 之间发生热接触,则 B 和 C 的状态都不会发生改变,说明 B 和 C 也处于热平衡状态。由此可以总结出下述结论:

如果两个热力学系统中的每一个都与第三个热力学系统处于热平衡态,则它们彼此之间也必定处于热平衡态。

这个结论通常称作**热力学第零定律**。

热力学第零定律为温度概念的建立提供了物理基础。处于热平衡态的所有热力学系统,一定具有某种共同的宏观性质,这个决定系统热平衡的宏观性质就是温度。

温度是决定一个系统是否与其他系统处于热平衡的宏观性质,它的特征就是一切互为热平衡的系统都具有相同的温度。

1.3 理想气体的状态方程

气体的状态可以用一系列的物理量来描述,这些物理量通常是温度、压强、体积等等。气体的特征可以用这些物理量之间的相互关系加以描述,人们从实验中总结出了多个与气体有关的实验定律。

1.3.1 阿伏伽德罗定律

在同温同压下,相同体积的任何气体含有相同的分子数。

这一定律称作**阿伏伽德罗定律**。

物质所含的分子数量和原子数量(称作物质的量)是十分巨大的,所以,常用**摩尔**(符号为 mol)作为分子、原子的数量单位。

摩尔是这样规定的:*质量为 12 g 的碳中所含的原子数为 1 mol。*

按照这一规定,实验测量出 1 mol 等于 $6.022\,141\,5(10) \times 10^{23}$,这一数值就是阿伏伽德罗常数,记作 N_A。

1 mol 某种原子的质量称为这种原子的摩尔质量。根据摩尔的定义,可知原子的摩尔质量其实就是以克为单位的这种原子的原子量。例如,碳原子的摩尔质量为 12 g,氢原子的摩尔质量为 1 g,等等。同理,分子的摩尔质量就是以克为单位的这种分子的分子量。例如,氢分子的摩尔质量为 2 g,氧分子的摩尔质量为 32 g,等等。本书中,摩尔质量用符号 μ 表示,单位为

g/mol(克/摩尔)。

实验表明,在标准状态下,即温度 0℃、压强 1 atm 时,1 mol 不同种类的气体,都有相等的体积,约是 22.4 L。

1.3.2 玻意耳定律

一定质量的某种气体,在温度不变的情况下,压强与体积成反比。

这一定律称作**玻意耳定律**。

玻意耳定律可以通过图 1.12 所示的实验加以验证。其中 A,B 两个玻璃容器以软管相连,里面注有水银,并在 A 管中封闭适量的气体。在保持环境温度不变的条件下,通过改变两容器中水银面的高度差改变 A 中气体的压强。这样即可得到气体体积与压强之间的关系。

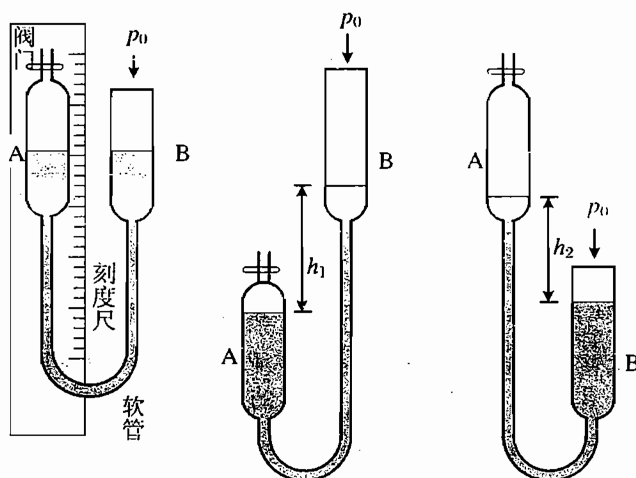


图 1.12 验证玻意耳定律的实验装置

玻意耳定律可以表示为

$$pV = C \tag{1.9}$$

对一定量的气体而言,C 为常数。

【例 1.7】(第 1 届全国中学生物理竞赛预赛试题) 一个粗细均匀的 U 形玻璃管放置在竖直平面内(图 1.13),U 形管的左端封闭,右端通大气,大气压为 p_0。管内装入水银,两边水银面的高度差为 h。左管内空气柱的长度为 L。如果让该管在原来竖直平面内自由下落,求两边水银面的高度差。

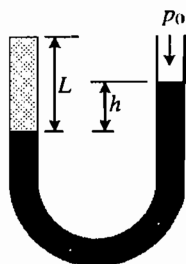


图 1.13 例 1.7 中的装置

解 静止时,左管中气体的压强为 $p = p_0 + \rho gh$,其中 ρ 为水银的密度,g 为重力加速度。

管中气体的温度始终与外界相等。自由下落时,水银由于重力而产生的压强消失,于是左管中气体的压强为 p_0。设玻璃管的横截面面积为 S,根据玻意耳定律,有 $p_0 L'S = pLS$,即

$$L' = \frac{p}{p_0}L = \frac{p_0 + \rho gh}{p_0}L$$

因此，左管中的水银面降低 $\Delta h = L' - L = \frac{\rho gh}{p_0}L$，同时右管中的水银面上升 Δh，于是两边水银面的高度差变为

$$h' = h + 2\Delta h = h + \frac{2\rho gh}{p_0}L$$

【例 1.8】（第 11 届全国中学生物理竞赛预赛试题） 有一个两端开口、粗细均匀的 U 形玻璃细管，放置在竖直平面内，处在压强为 p_0的大气中，两个竖直支管的高度均为 h，水平管的长度为 $2h$，玻璃细管的半径为 r（$r \ll h$）。现将水平管内灌满密度为 ρ 的水银，如图 1.14 所示。

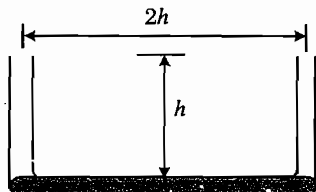


图 1.14 例 1.8 中的 U 形管

(1) 若将 U 形管的两个竖直支管的开口分别密封起来，使其管内空气压强均等于大气压强。问当 U 形管向右做匀加速移动时，加速度应为多大时才能使水平管内水银的长度稳定为 $5h/3$。

(2) 若将其中一个竖直支管的开口密封起来，使其管内的气体压强为 1 atm。问当 U 形管以另一个竖直支管（开口的）为轴做匀速转动时，转数 n 应为多大时才能使水平管内水银的长度稳定为 $5h/3$？（U 形管做以上运动时，均不考虑管内水银液面的倾斜。）

解 管中气体的温度始终保持恒定。选取水平管中的水银柱为研究对象，这一部分水银柱的长度为 $5h/3$，在两端压力差的作用下，具有一定的加速度。设细管的横截面面积为 S。

(1) 设管向右的加速度为 a，由于管口密封，其中的气体体积变化导致压强变化，如图 1.15所示。按玻意耳定律，左管中气体的压强为 $p_1 = 3p_0/2$，水银柱的压强为 $\rho gh/3$，右管中气体的压强为 $p_2 = 3p_0/4$。于是水平管中的水银所受到的向右的压力为 $F = \left(\frac{3}{2}p_0 + \frac{1}{3}\rho gh - \frac{3}{4}p_0\right)S$，而其中水银的质量为 $m = 5hS\rho/3$，所以

$$\left(\frac{3}{2}p_0 + \frac{1}{3}\rho gh - \frac{3}{4}p_0\right)S = \frac{5}{3}hS\rho a$$

解得

$$a = \frac{9p_0 + 4\rho gh}{20h\rho} = \frac{9p_0}{20h\rho} + \frac{1}{5}g$$

(2) 如图 1.16 所示，水平管中水银的左端压强为大气压强 p_0，右端压强为 $3p_0/2 + \rho gh/3$。两端压力差为向心力，水银柱的质心至转轴的距离为 $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}\right)h = \frac{7}{6}h$，于是有

$$\left(\frac{3}{2}p_0 + \frac{1}{3}\rho gh - p_0\right)S = \frac{5}{3}hS\rho \times \frac{7}{6}h \times \omega^2$$

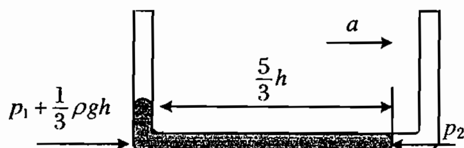


图 1.15 管向右做加速运动

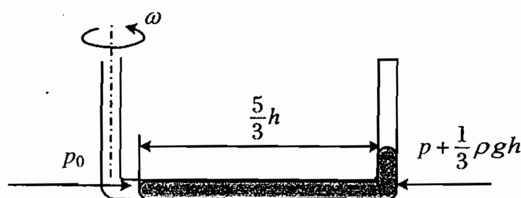


图 1.16 管绕一臂旋转

解得角速度

$$\omega = \sqrt{\frac{3(3p_0 + 2\rho gh)}{35h^2\rho}}$$

所以每秒转动周数

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi h}\sqrt{\frac{3(3p_0 + 2\rho gh)}{35\rho}}$$

【例 1.9】 图 1.17 所示的为一粗细均匀的 J 形管，其左端是封闭的，右侧与大气相通。已知大气压强为 76 cmHg，$h_1 = 80$ cm，$h_2 = 200$ cm。现从 J 形管的右侧灌入水银，问当右侧水银灌满时，左侧的水银柱有多高？（设温度保持不变，J 形管水平部分的容积可忽略不计。）

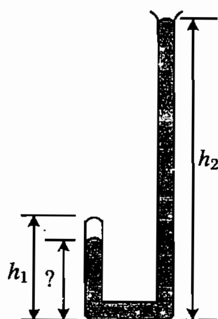


图 1.17　例 1.9 中的 J 形管

解　灌入水银的过程中，只有左侧管中的空气被封闭起来，因而封闭在管中的空气，其最初长度为 $h_1 = 80$ cm，压强为 76 cmHg。灌入水银后，设空气柱的长度为 h，则压强为 $76 + h_2 - (h_1 - h) = 196 + h$(cmHg)。由于温度不变，所以

$$80 \times 76 = h \times (196 + h)$$

解得 $h = 27.3$ cm。从而得左侧水银柱的高度为 52.7 cm。

1.3.3　盖・吕萨克定律

对于一定质量的某种气体，当压强保持不变时，它的体积随温度线性地变化。

这一实验定律称作**盖・吕萨克定律**。

如图 1.18 所示，用水银在玻璃管中封闭一定量的气体并将玻璃管插入盛水容器中，由于水银柱的高度是固定的，管中气体的压强可保持不变。改变水的温度，即可得到气体的体积随温度变化的规律。

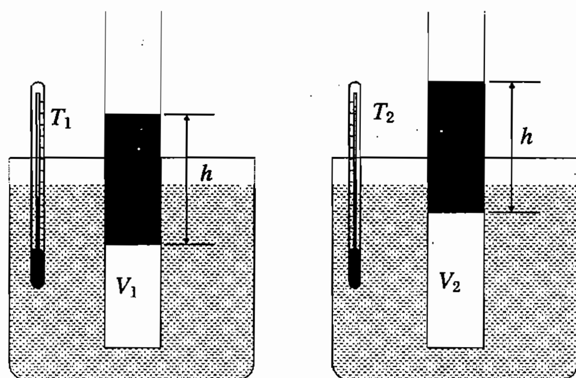


图 1.18　验证盖・吕萨克定律的实验装置

盖・吕萨克定律可以表示为

$$V = C'T \tag{1.10}$$

对一定量的气体而言，C' 为常数。

1.3.4　查理定律

对于一定质量的气体，当体积保持不变时，它的压力随温度线性地变化。

这一实验定律称作查理定律。

如图 1.19 所示，气体温度升高，其体积要膨胀，压强要增加，将盛有水银的右端容器提高，则可增大气体的压强，并使其体积回复到原来的数值；若气体温度降低，则右端水银面降低，可减小气体压强，使其体积回复到原来的数值。这样，可通过保持左端细管的水银面在固定的位置，使气体的体积不变，从而测量压强与温度的关系。

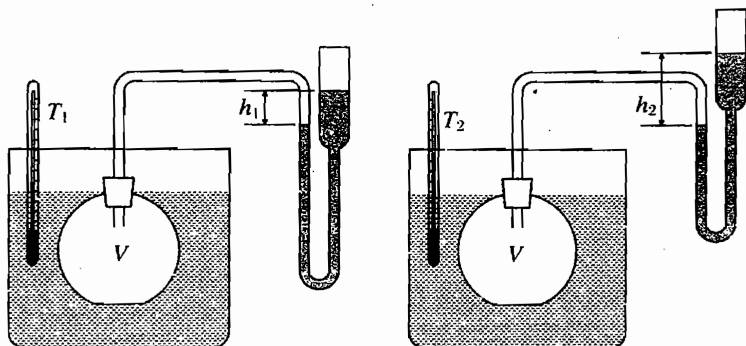


图 1.19　验证查理定律的实验装置

查理定律可以表示为

$$p = C''T \tag{1.11}$$

对一定质量的气体而言，C''为常数。

1.3.5　气体的状态方程

上述各个定律，都是通过控制气体的压强、体积、温度中的一个物理参量不变，而研究另两个参量之间的关系的。事实上，若不进行参量控制，一个参量的改变会引起另两个参量同时改变，因此，需要一个能够同时反映这三个参量之间关系的表达式。

例如，对于一定量的气体，设其初态的参量为(p_1, V_1, T_1)，先经历一个等容过程，即体积保持不变，压强变为 p_2，温度变为 T；接着再经历一个等压过程，即压强保持不变，体积和温度分别变为 V_2 和 T_2；最后系统的参量变为(p_2, V_2, T_2)。

第一个过程中，按照查理定律，有

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T} = C''$$

第二个过程中，按照盖・吕萨克定律，有

$$\frac{V_1}{T} = \frac{V_2}{T_2} = C'$$

从以上两式中消去温度 T，则有

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = C''C'$$

可见，在变化过程中，pV/T 保持不变。

假如上述气体先经历一个等压过程，即压强 p_1 保持不变，而体积变为 V_2、温度变为 T；然后再经历一个等容过程，即体积保持不变，压强和温度分别变为 p_2 和 T_2；最后气体的状态变为 (p_2, V_2, T_2)。

第一个过程中，有

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T} = C'$$

第二个过程中，有

$$\frac{p_1}{T} = \frac{p_2}{T_2} = C''$$

同样可以得到

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = C''C'$$

若上述气体先经历一个等温过程，即温度保持不变，压强和体积分别变为 p_2 和 V；然后再经历一个等压过程，即压强保持不变，体积和温度分别变为 V_2 和 T_2，则在这两个过程中分别有

$$p_1 V_1 = p_2 V = C \quad 和 \quad \frac{V}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = C'$$

消去体积 V，亦有

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = CC'$$

综上可见，对于一定量的气体，在变化过程中，pV/T 总是保持不变的。

由于压强和温度不变时，气体的体积一定与其质量成正比，而质量又等于气体物质的量与其摩尔质量的乘积，所以，气体的上述性质也可以表示为

$$\frac{pV}{T} \propto \nu$$

其中，ν 是气体物质的量。

将上述比例关系以等式表示，则可以得到一个描述气体状态的方程，即

$$pV = \nu RT \tag{1.12}$$

其中，R 是比例常量，称作**普适气体常量**，这个方程也称作**克拉伯龙方程**。

R 的数值可以从实验中测出。由于标准状态下，每摩尔理想气体的体积都是 22.413 83 L，即 $V/\nu = 22.413\,83 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3/mol}$，将 $1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{Pa}$，$T = 273.15\ \mathrm{K}$ 代入，可得

$$R = \frac{pV}{\nu T} = 8.31 \quad (\mathrm{J/(mol \cdot K)})$$

较精确的普适气体常量的数值为

$$R = 8.314\,510 \quad (\mathrm{J/(mol \cdot K)}) \tag{1.13}$$

如果气体的分子数为 N，则 $\nu = N/N_A$，克拉伯龙方程也可表示为

$$pV = N\frac{R}{N_A}T = NkT$$

其中，$k = R/N_A$ 称作**玻尔兹曼常量**，而且

$$k = 1.380\,650\,5(24) \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \tag{1.14}$$

更精确的实验表明，对于实际的气体，上述状态方程并不是严格成立的。只有在气体比较

稀薄时，上述方程计算的结果才与实验测量的结果符合得较好。稀薄气体的单位体积中所含的分子数很少，因而分子的间隔很大，分子之间的相互吸引或排斥作用很小或几乎没有，只有当分子之间相互碰撞时，才会有相互作用。分子之间除了碰撞之外没有相互作用的气体，称作理想气体。因此，克拉伯龙方程也称作理想气体的状态方程。

可见，对于一定量的气体，当温度保持恒定时，其压强与体积的关系就是玻意耳定律；当保持压强不变时，其体积与温度的关系就是盖·吕萨克定律；当保持体积恒定时，其压强与温度的关系就是查理定律。因而，克拉伯龙方程是全面描述气体各个参量之间变化关系的方程。

【例 1.10】 根据玻意耳定律和理想气体温标的定义导出理想气体的状态方程。

解 由玻意耳定律，一定量的气体在温度保持不变时，$pV=C$。

若用定压气体温度计测量，对这一部分气体，在三相点时，有 $p_{tr}V_{tr}=C_{tr}$，在其他温度时，有 $p_{tr}V=C$。

根据定压气体温度计的定义，气体的温度为

$$T(V)=273.16\frac{V}{V_{tr}}=273.16\frac{p_{tr}V}{p_{tr}V_{tr}}=273.16\frac{C}{C_{tr}}$$

于是，可得

$$C=\frac{C_{tr}}{273.16}T(V),\quad 即\quad pV=\frac{C_{tr}}{273.16}T(V)$$

其中，$T(V)$是定压温标所测得的温度。而对理想气体，该定压温标的温度就是热力学温度 T。

若气体的摩尔体积为 v，ν 摩尔气体的体积为 $V=\nu v$，则在三相点时，$C_{tr}=p_{tr}V_{tr}=\nu p_{tr}v_{tr}$，其中 v_{tr}为理想气体在三相点时的摩尔体积。此时，状态方程可写为

$$pV=\nu\frac{p_{tr}v_{tr}}{273.16}T$$

可见，普适气体常数 $R=\frac{p_{tr}v_{tr}}{273.16}$。

【例 1.11】（第 2 届全国中学生物理竞赛预赛试题） 室温下，估计真空度达到 1×10^{-3} mmHg 时，容器内空气分子间的平均距离（取一位有效数字）。

解 取温度 $T=300$ K，这时气体的摩尔体积为

$$v=\frac{RT}{p}=\frac{8.31\times300}{133\times10^{-3}}\approx20\times10^{3}\quad(\mathrm{m}^3)$$

每一个分子所占据的体积为

$$v_a=\frac{v}{N_A}=\frac{20\times10^{3}}{6\times10^{23}}\approx3\times10^{-20}\quad(\mathrm{m}^3)$$

分子的间距为

$$\sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}v_a}\approx\sqrt[3]{3\times10^{-20}}\approx3\times10^{-7}\quad(\mathrm{m})$$

分子的大小约为 10^{-10} m，这也是分子之间作用力的范围。此时分子之间的距离相当大，容器内的空气可视作理想气体。

【例 1.12】（第 6 届全国中学生物理竞赛预赛试题） 有一个两端封闭的、横截面面积均匀的 U 形玻璃管，两臂管内分别有适量的氢气和氦气，用一段水银柱把两种气体隔开。如图 1.20 所示，将此 U 形管两端朝上竖直立起时，两臂中气柱的长度分别为 $L_{A1}=12$ cm，$L_{B1}=18$ cm；两

端朝下竖直立起时，气柱的长度分别为 $L_{A2}=6\ \text{cm}$，$L_{B2}=24\ \text{cm}$。问将此 U 形管平放在水平桌面上时，两臂中气柱的长度 L_{A3} 和 L_{B3} 各是多少？（设 U 形管两臂的长度相等，水银柱不断裂，没有发生气体从一臂通过水银逸入另一臂中的情况。）

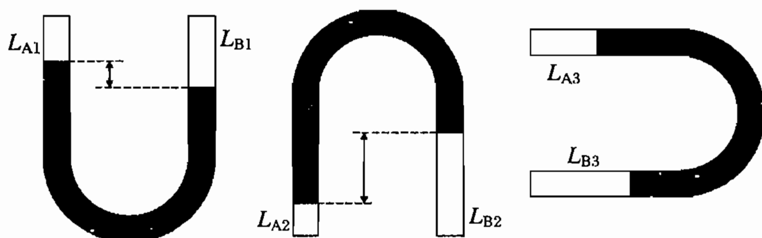


图 1.20　例 1.12 中的 U 形管

解　气体的温度始终与环境相等，没有发生变化。

设两臂中封闭的气体物质的量分别为 ν_A 和 ν_B，U 形管的截面面积为 S，则三种情况下两部分气体的状态方程分别为：

两臂直立向上时，

$$\begin{cases} 12Sp_{A1} = \nu_A RT \\ 18Sp_{B1} = \nu_B RT \\ p_{B1} - p_{A1} = 6\rho g \end{cases} \tag{1.15}$$

两臂直立向下时，

$$\begin{cases} 6Sp_{A2} = \nu_A RT \\ 24Sp_{B2} = \nu_B RT \\ p_{A2} - p_{B2} = 18\rho g \end{cases} \tag{1.16}$$

水平放置时，

$$\begin{cases} p_{A3}SL_A = \nu_A RT \\ p_{B3}SL_B = \nu_B RT \\ p_{B3} - p_{A3} = 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

在方程组(1.15)中，消去 p_{A1} 和 p_{B1}，可得到

$$2\nu_B RT = 3\nu_A RT + 216\rho g S \tag{1.18}$$

在方程组(1.16)中，消去 p_{A2} 和 p_{B2}，可得到

$$\nu_B RT = 4\nu_A RT - 432\rho g S \tag{1.19}$$

联立式(1.18)和(1.19)，可得到

$$\begin{cases} \nu_A RT = 216\rho g S \\ \nu_B RT = 432\rho g S \end{cases} \tag{1.20}$$

将式(1.20)代入方程组(1.17)，可得到

$$\begin{cases} \dfrac{L_A}{L_B} = \dfrac{1}{2} \\ L_A + L_B = 30 \end{cases}$$

解得

$$L_A = 10\ \text{cm},\quad L_B = 20\ \text{cm}$$

【例 1.13】 图 1.21 所示的为一个气体温度计，上端为压力计，下端为测温泡，两者通过导热性能极差的德银毛细管相连。测温时，先在室温 T_0 下将温度计充气至压强 p_0 后密封，然后将测温泡浸入待测的低温液体中，平衡后，压力计的读数为 p。试求待测温度 T。（已知压力计和测温泡的容积分别为 V_A 和 V_B。）

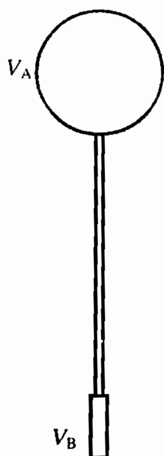


图 1.21　气体温度计

解　设初态时压力计和测温泡内气体物质的量分别 ν_A，ν_B，则这两部分气体的状态方程分别为 $p_0V_A=\nu_ART_0$，$p_0V_B=\nu_BRT_0$。由此可以得到

$$p_0\frac{V_A+V_B}{T_0}=(\nu_A+\nu_B)R \tag{1.21}$$

测温时，由于测温泡温度下降，压强下降。由于毛细管的导热性很差，压强计的温度仍维持在室温。这样，就会有一部分气体从压强计流入测温泡中，设流入的气体物质的量为 $\Delta\nu$，则末态时两容器中气体的状态方程为 $pV_A=(\nu_A-\Delta\nu)RT_0$ 和 $pV_B=(\nu_B+\Delta\nu)RT$。从这两式中消去 $\Delta\nu$，得到

$$p\left(\frac{V_A}{T}+\frac{V_B}{T_0}\right)=(\nu_A+\nu_B)R \tag{1.22}$$

联立式(1.21)和(1.22)，可得到

$$T=\frac{p}{p_0}\frac{T_0}{1+\frac{V_B}{V_A}\left(1-\frac{p}{p_0}\right)}$$

【例 1.14】 图 1.22 所示的为测量低气压的压力计。使用时，使压力计与待测容器 D 相连，把贮有水银的瓶 R 缓缓上提，使水银进入容器 B，从而将 B 与 D 中的气体隔开。继续上提水银瓶 R，水银就进入毛细管 k_1 和 k_2 内。当 k_2 中的水银面与 k_1 的顶端对齐时，停止提瓶。此时测得两毛细管中水银面的高度差 $h=23$ mm。已知容器 B 的容积 $V_B=130\ \text{cm}^3$，毛细管的直径 $d=1.1$ mm，求待测容器 D 中的气压。

解　初始时，在 B 中的气体最后被压缩到 k_1 中，选取这一部分气体为研究对象。

初始时，气体的体积为 $V_B+V_{k_1}$。由于 k_1 的容积比 B 的小得多，所以 $V_B+V_{k_1}\approx V_B$，压强就是 D 中待测气体的压强 p。

在末态时，上述气体被压缩至 k_1 中，体积为 $\pi d^2h/4$，压强为 $p+h$。由于是等温过程，故有

$$pV_B=\frac{\pi d^2h}{4}(p+\rho gh)$$

$$p=\frac{\frac{\pi d^2h}{4}}{V_B+\frac{\pi d^2h}{4}}\rho gh\approx\frac{\frac{\pi d^2h}{4}}{V_B}\rho gh$$

$$=\frac{1.1^2\times23\pi}{4\times130}\rho gh$$

$$=3.9\times10^{-3}\quad(\text{mmHg})$$

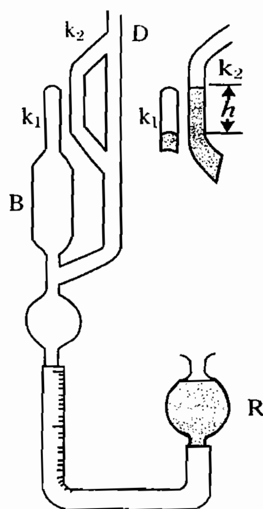


图 1.22　例 1.14 中的压力计

【例 1.15】 可以用图 1.23 所示的装置测量一些轻的矿物的密度，操作步骤如下：

(1) 打开活栓 K，使管 A，B 和罩 C 与大气相通，上下移动 D 使左侧管中的水银面在 n 处；

(2) 关闭 K，上举 D，使水银面达到 m 处，记下 B，D 两管中水银面的高度差 $h_1 = 12.5$ cm；

(3) 打开 K，使水银面重新回到 n 处，将 400 g 矿物投入 C 中，关闭 K；

(4) 上举 D，使水银面重新达到 m 处，此时 B，D 两管中水银面的高度差 $h_2 = 23.7$ cm。

已知罩 C 和 A 管中 m 以上的容积共计 1 000 cm^3，求矿物的密度。

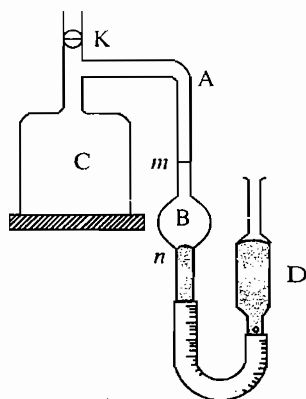


图 1.23　例 1.15 中的装置

解　步骤(1)和(2)中，气体被等温压缩，方程为

$$p_0 V_n = (p_0 + p_1) V_m$$

设矿物的体积为 V，步骤(3)和(4)中，气体的方程为

$$p_0 (V_n - V) = (p_0 + p_2)(V_m - V)$$

联立上述两方程，消去 V_n，可解得 V，即

$$V = \frac{p_2 - p_1}{p_2} V_m = \frac{23.7 - 12.5}{23.7} \times 1\,000$$
$$= 472.6 \quad (\text{cm}^3)$$

从而得密度

$$\rho = \frac{400}{472.6} = 0.846 \times 10^3 \quad (\text{kg/m}^3)$$

1.3.6　道尔顿定律

体积为 V 的混合气体所产生的压强，等于其中各成分气体在体积为 V 时单独产生的压强之和。

这就是**道尔顿分压定律**。

或者说，混合气体的压强等于其中各组分气体的分压强之和。这里所说的某一组分的分压强是指该成分单独存在时(即在与混合气体的温度、体积相同，且与混合气体中所含该成分物质的量相等的条件下，以化学纯状态存在时)的压强。

道尔顿分压定律可以从克拉伯龙方程得到。设在温度 T 时，混合气体的体积为 V，其中各组分物质的量分别为 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots$，分压分别为 $p_1, p_2, p_3, \cdots$，于是有 $p_1 V = \mu_1 RT$，$p_2 V = \mu_2 RT$，$p_3 V = \mu_3 RT$，…，从而有

$$(p_1 + p_3 + p_3 + \cdots) V = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots) RT$$

所以

$$p = p_1 + p_3 + p_3 + \cdots \tag{1.23}$$

就是混合气体的压强。

【例 1.16】(第 2 届全国中学生物理竞赛预赛试题)　设一密闭气缸内装有空气，平衡状态下缸底还有极少量的水(图 1.24)。缸内的气体温度为 T，气体体积为 V_1，压强 $p_1 = 2.00$ atm。现将活塞缓慢下压，并保持缸内的温度不变，当气体体积减少到 $V_2 = V_1/2$ 时，压强变为 $p_2 = 3.00$ atm，求温度 T 的值。

解　气缸中除了空气之外，还有水和水蒸气。其中水和水蒸气处于热平衡态，温度不变时，

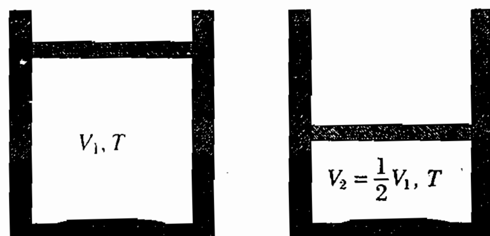


图 1.24　例 1.16 中的密闭气缸

水蒸气的分压强不变。设水蒸气的分压为 p，压缩前后空气的分压分别为 p_{10}，p_{20}，水所占的体积可以忽略，则有

$$\begin{cases} p_{10} + p = p_1 = 2, & p_{10}V_1 = p_{20}V_2 \\ p_{20} + p = p_2 = 3, & V_1 = 2V_2 \end{cases}$$

解得 $p_{20} = 2p_{10}$，且 $p = 1$ atm。因此，水蒸气的分压为 1 atm，这说明水恰好处于沸点，缸内气体的温度也是 100 ℃。

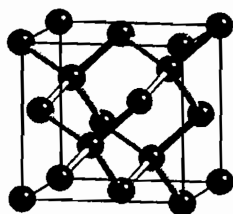
1.4　分子的热运动

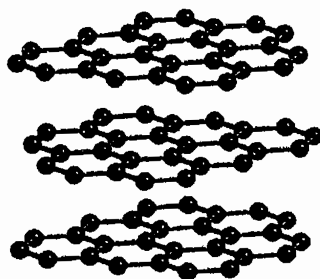
分子由原子结合而成，分子和原子都是物质结构的一个层次。但在不同形态的物质中，分子的概念以及分子之间的相互作用差异较大。

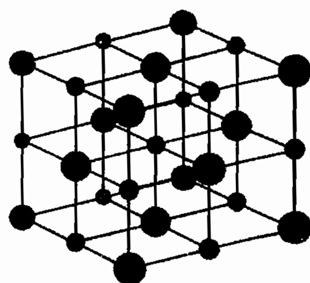
1.4.1　气体、液体、固体中的分子

一般而言，气态物质是由一个个分子构成的，分子之间间隔很大，相互作用很小，因而每个分子是独立的单元。多数气体的分子都是由不止一个原子结合而成的，例如氧气（O_2）、氢气（H_2）、氮气（N_2）、臭氧（O_3）等，每个分子是由两个或多个同类的原子构成；二氧化碳（CO_2）、甲烷（CH_4）等，每个分子由不同种类的原子构成。当然，还有一些气体的分子就是单个原子，如惰性气体、金属蒸气等等。

固态物质中，原子大多是由较强的**化学键（离子键、共价键、金属键）**结合起来的。因此，固体中往往没有独立的分子。例如金刚石（图 1.25）中，每一个碳原子与另外四个碳原子以共价键结合；石墨（图 1.26）中，每一个碳原子与另外三个碳原子以共价键结合；氯化钠（图1.27）中，每一个钠离子与六个氯离子以离子键结合，同时每一个氯离子与六个钠离子以离子键结合，分子式 NaCl 只是表示这种物质的组分。金属各个原子间更是以金属键相结合。但也有例外的情况，如冰是由一个个的水分子通过氢键结合起来的，氢键虽然较弱，但有方向性，所以冰是晶态的固体。


图 1.25　金刚石的结构


图 1.26　石墨的结构


图 1.27　氯化钠的结构

液态物质中，每个分子中的原子之间仍以化学键相结合，但分子之间的结合要弱得多。液体的分子由于正电荷中心与负电荷中心并不重合，所以具有极性，可以形成诸如电偶极子、电四

极子的结构。具有极性的分子之间由于静电引力的作用而相互结合。由于这种极性分子间的引力比较弱，所以液体的分子之间的结合也比较弱，从而液体具有流动性，其中一些能量较大的分子也容易脱离束缚从液体中游离出来，成为气态。

1.4.2　分子的热运动

气体、液体和固体中的分子都在做无休止的运动。气体和液体中的扩散、花粉在液体表面上的布朗运动、相互密接的金属之间的渗透，都是分子运动的实例。

实验表明，这种运动是分子的随机运动，而且温度越高，上述过程进行得越快，进行的程度也越剧烈，说明分子的运动与温度之间有强烈的依赖关系，因而这种运动也称作**热运动**。

不同形态的物质中，分子热运动的类型也不同。固态物质中，原子之间通过很强的化学键结合，各个原子不能随意运动，都被束缚在各自的动力学平衡位置处，而只能在平衡位置附近振动。温度越高，振动的能量也越大，振幅也越大。当振动的能量足够大时，各个原子就能够克服原子间的结合能，脱离平衡位置而可以在很大的空间范围内运动，这时，固体的形态将不能维持，就熔解成为液体。

液体的分子间虽然可以在很大的空间范围内运动，但分子之间仍通过静电势能结合，这种静电势能使液体分子之间的距离保持在一个很小的范围内。若液体的温度足够高，各个分子的动能足够大，就可以脱离束缚，成为游离态的分子，液体蒸发成为气体。

在气体中，分子的动能比分子间的结合能要大得多，所以分子之间的距离很大，每个分子都可以自由运动，如果没有容器的限制，这些分子将会扩散到无限大的空间范围中。

1.4.3　建立热平衡的微观过程

从宏观上看，一个还没有达到热平衡系统的原因，一种可能是其内部各处的温度不相同。这说明系统各处分子热运动的情况不相同。

对于固体，其温度高的地方，分子振动较强烈，振幅较大，会逐渐带动附近的分子也以较大的幅度振动，或者说，能量较高的分子将能量传递给能量较低的分子，从而使各个部分的分子都有相同的能量，从而达到平衡状态。绝缘材料由于只能通过振动传递能量，所以导热较慢，需要较长的时间才能达到热平衡。而金属中有大量的自由电子，振动的能量可以通过电子传递，因而导热较快，可以在较短的时间内达到热平衡。

对于液体，由于分子可以在较大的范围内运动，在运动过程中分子之间会相互碰撞，所以分子之间既可以通过振动传递能量，也可以通过碰撞传递能量。因而对于同类物质，液体的导热性通常优于固体，达到热平衡的时间也比较短。

对于气体，分子之间通过碰撞传递能量以使系统的各个部分的分子都有相同的平均动能，从而达到热平衡。

1.5　系统的内能

内能的含义相当宽广，往往要针对具体的情况进行讨论。

首先，内能不同于机械能。例如密闭容器中的水蒸气，当温度改变时，从宏观上看，由于水蒸气整体并没有做机械运动，所以其机械能没有改变。但温度变化时，这一系统要释放或吸收热量，说明系统的能量发生了变化，这一部分能量就是内能。

其次，物质的状态改变时，其内能也发生改变。在水蒸气凝结成水的过程中，或水凝结成冰的过程中，虽然温度没有变化，但都要释放热量，说明物态变化也会引起内能的改变。

另外，外界对系统做功，或系统对外界做功，其内能也会发生改变。例如气缸中的气体，被压缩后温度升高，就是活塞对气体做功而使气体内能增加的结果；反之，气体膨胀，推动活塞对外做功，其内能就降低。

需要指出的是，在某些没有物态改变和温度改变的情况下，系统的内能也会发生改变。例如，原子跃迁发光，对外释放能量，同时，原子中电子的状态改变，其内能也改变。

但是，在热力学范围内，往往只涉及原子、分子热运动状态的变化和分子间结合的变化，所以，从微观上看，系统的内能仅仅包含分子的动能和分子间结合的势能。

1.5.1 分子的动能

对于气体，其内能仅仅包括动能，而分子间的势能可以忽略。若是单原子分子，仅仅有平动动能；若是多原子分子，分子中的原子之间有振动，整个分子作为一个整体还有转动，所以多原子分子气体，除了平动能量之外，还有振动能量和转动能量。气体的温度升高，分子平动的速度、振动的振幅和转动的角速度都要增大，从而动能相应地增大。

对于液体，由于分子之间的距离较小，有一定的相互作用，所以与气体相比，分子的动能要小一些。

在固体中，原子都被束缚在平衡位置附近，因而没有平动和转动，只有振动。

1.5.2 分子间的势能

分子间的作用力主要是静电作用力，所以势能主要是库仑势能，而库仑势能取决于分子间的距离。实验研究表明，分子间既有吸引力，也有排斥力。分子在平衡位置时，吸引力与排斥力平衡，分子间的势能最小，分子间的结合能最大，这时分子间的距离称作平衡距离。排斥力随距离变化的幅度比吸引力要大得多，如果分子间的距离大于平衡距离，排斥力随分子间的距离增大迅速减小，分子间的作用以引力为主，则势能随距离的增大而增大；如果分子间的距离小于平衡距离，排斥力随分子间的距离减小迅速增大，则势能随着距离的减小而迅速增大。

分子间的势能以及相互作用力与距离的关系可以用图 1.28 表示。

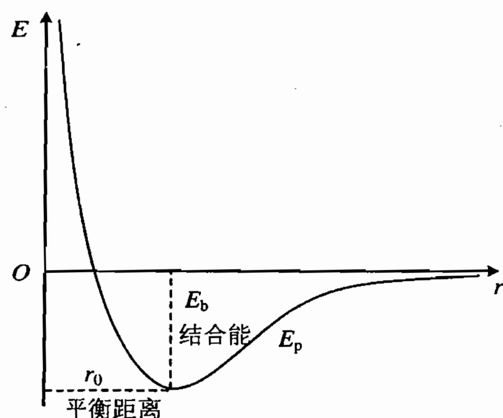


图 1.28 分子间的势能曲线

1.6 热与功

焦耳在1845年前后通过实验证明，对系统做机械功会导致系统的温度升高，说明系统的内能增加了。系统吸热也会导致温度升高，使内能增加。所以，功与热都是能量的表现形式。从这个角度看，功与热是一样的。热量早期的单位是卡(cal)或千卡(kcal)，功的单位是焦耳(J)，两者之间可以通过一个常数进行转换，这个常数是通过实验测得的，这个转换关系称作**热功当量**，即1 cal = 4.186 J，1 J = 0.239 cal。

焦耳热功当量的意义不仅仅是测量出了功与热之间的转换关系，更重要的是，指出了不同形式的能量可以互相转换，转换中，能量是守恒的。*即能量既不能被创生，也不能灭失，只能从一种形式转换为另一种形式。*

如果一个热力学系统只通过机械功(包括外界对系统做功以及系统对外界做功)和热量(包括系统从外界吸收热量以及外界从系统吸收热量)的形式与外界交换能量，则上述能量守恒定律就是热力学第一定律。

1.7 气体分子运动论基础

从气体分子运动的物理模型出发，可以解释气体的温度和压强等物理量的微观机制。

1.7.1 理想气体的微观模型

理想气体是一种模拟真实气体的物理模型。在实际的气体中，分子之间的间隔比较大，分子的半径与之相比，要小很多，由此导致气体分子间的相互作用比较弱。但是，若气体的密度较大，分子之间的间隔就会减小，分子之间的相互作用也会相应增大。所以，只有当气体很稀薄时，才能将其近似地作为理想气体。

理想气体满足下述条件：

(1) 忽略分子本身的大小，或者与分子间的平均距离相比，分子的线度可以忽略不计；

(2) 气体分子之间的碰撞、气体分子与容器壁之间的碰撞都是完全弹性碰撞，碰撞过程中分子不损失动能；

(3) 除了相互碰撞的瞬间，气体分子之间、气体分子与容器壁之间没有吸引或排斥的相互作用；

(4) 忽略气体分子的质量，不考虑分子所受到的重力。

【例 1.17】 目前在室温下所能获得的极限真空度为 10^{-13} torr，在4 K低温下所能获得的极限真空度为 5×10^{-17} torr。在上述情况下，分别估算每立方厘米内有多少个分子。

解 由气体状态方程 $pV = nkT$，其中 n 为分子数，$k = 1.38\times10^{-23}$ J/K 为玻尔兹曼常数，1 torr = 1/760 atm≈133 Pa，有

$$\frac{n}{V}=\frac{p}{kT}$$

若 $p=10^{-13}$ torr≈10^{-11} Pa，$T=300$ K，算得 $n/V=10^9$ m^{-3}=10^3 cm^{-3}；

若 $p=5\times10^{-17}$ torr≈7×10^{-15} Pa，$T=4$ K，算得 $n/V=10^8$ m^{-3}=10^2 cm^{-3}。

【例 1.18】 一容积为 11.2 L 的真空系统已被抽至压强为 1.0×10^{-5} mmHg 的真空，为了提高真空度，将其加热至 300 ℃烘烤，使器壁释放出所吸附的气体。若烘烤后压强增至 1.0×10^{-2} mmHg，问由于烘烤器壁释放出了多少个气体分子？

解 由公式 $n=pV/(kT)$，可算得容器中的分子数：

在室温下，

$$n_1=\frac{1.0\times10^{-5}\times133\times11.2\times10^{-3}}{1.38\times10^{-23}\times300}=0.4\times10^{18}$$

在高温下，

$$n_2=\frac{1.0\times10^{-2}\times133\times11.2\times10^{-3}}{1.38\times10^{-23}\times573}=1.9\times10^{18}$$

因此，烘烤过程中器壁释放出了 1.5×10^{18} 个分子。

1.7.2 气体分子运动的特点

1. 分子运动是无规则的热运动

对于处于平衡态的气体，其温度、压强、体积等物理量都保持不变，也就是说，从宏观上看，这样的气体是没有任何变化的。但是，从微观上看，构成气体的分子却在不停地运动着，而且，每一个分子的运动又是没有任何规律的，即每个分子运动的速度的大小和方向都是随机的。

分子的运动特点可以用布朗运动加以说明。英国科学家布朗通过显微镜观察悬浮在水中的藤黄粉或花粉的颗粒时，注意到这些微小的颗粒都在不停地运动，而运动又没有任何规律。如果较长时间地注视一个颗粒，并记录其运动轨迹，从中难以看出各个颗粒运动的规律，这种运动称作布朗运动。

经过较长时间的探索，人们才对布朗运动作出了合理的解释：液体中分子的运动是无规则的，即每个分子的运动速度的大小和方向都在不断地改变，分子之间的相互碰撞可以认为是引起速度改变的一种原因。在液体内部，任一时刻、任一位置，都有沿各个方向运动的分子，而且速度有大有小。而悬浮在液体中的微小颗粒，不断地受到液体中分子的碰撞，这种碰撞来自各个方向，碰撞的力各不相同，因而颗粒所受到的冲击力是不平衡的，于是颗粒向着冲击力较小的方向运动。但在下一时刻，颗粒所受到的冲击力又会改变，而且这种改变并没有规律，所以颗粒在大量分子的碰撞下做无规则的运动。

布朗运动是分子运动的宏观表现，而且实验观察到，当液体的温度升高时，布朗运动过程会加剧，所以，分子的运动与温度有强烈的依赖关系。温度升高，分子运动的速率增大，分子间的碰撞频度和强度增加，速度的变化相应加剧。因而，将分子的这种无规则的运动称作分子的热运动，宏观上表现为扩散过程加快等等。

气体分子的热运动与液体相似，只是每个分子的运动范围更大，而在固体中，分子往往被束缚在平衡位置附近，运动的方式以振动为主。

除了上述分子的平动之外，对于由两个或多个原子构成的分子，其热运动还包括分子的振

动和转动。这些运动方式都与温度有关。

2. 分子热运动速率的分布规律

虽然每一个分子的运动速度在不断变化，而且没有规律，但作为一个整体，分子的速率分布却是有规律的。也就是说，在不同的温度下，速率在 $v \sim v+\Delta v$ 范围内的分子占所有分子的比例总是确定的。显而易见的是，温度较高时，速率大的分子所占的比例较高；而温度较低时，速率小的分子所占的比例较低。

如果用 N 表示一个处于平衡态的气体系统中的总分子数，而 $\Delta N(v)$ 表示速率在 $v \sim v+\Delta v$ 范围内的分子数，则 $\frac{\Delta N(v)}{N\Delta v}$ 就是在速率 v 附近单位速率间隔内的分子所占的比例。记 $f(v)=\frac{\Delta N(v)}{N\Delta v}$，则有 $\frac{\Delta N(v)}{N}=f(v)\Delta v$。$f(v)$ 称作气体分子的速率分布函数。

上述速率分布函数可以从实验中测得。但事实上，在成功地用实验测量气体的速率分布之前，麦克斯韦、玻尔兹曼等人已经根据统计规律从理论上推算出了速率分布函数。即在平衡状态下，忽略气体分子之间的相互作用时，速率分布函数为

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \tag{1.24}$$

其中，m 为分子的质量，T 为气体的热力学温度，k 为玻尔兹曼常数。

不同温度下气体的速率分布曲线如图 1.29 所示。

速率分布曲线下 $v \sim v+\Delta v$ 范围内的面积表示速率在 $v \sim v+\Delta v$ 范围内的分子所占的比例，如图 1.30 所示。

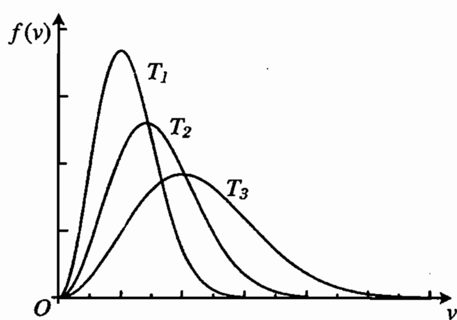


图 1.29　不同温度下气体的速率分布函数

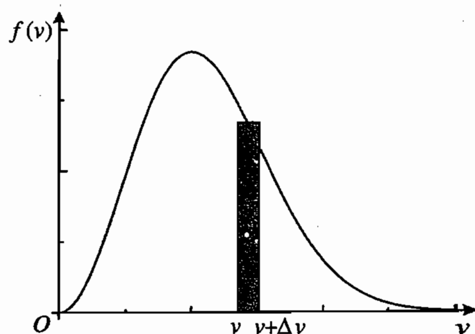


图 1.30　曲线下 $v \sim v+\Delta v$ 范围内的面积表示分子所占的比例

1.7.3　气体压强的微观机制

气体的压强是一个可测量的物理量，对处于平衡态的气体而言，在各处、沿各个方向的压强是相等的。而压强又是单位面积上所受到的正压力，对质量可以忽略的气体分子而言，这种力只能来源于分子与测量装置的碰撞。对于理想气体，容器壁所受到的压强就是大量气体分子与器壁弹性碰撞的结果。

气体中的每一个分子的运动是无规和随机的，但是，大量的分子与器壁碰撞就产生了持续的压力。

设容器的体积为 V，其中的分子数为 N，则单位体积中的分子数为 $n=N/V$。

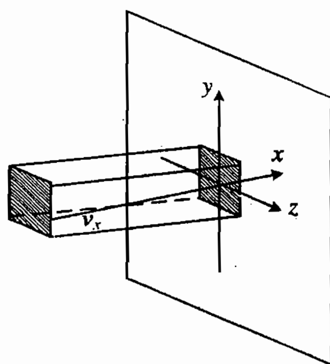


图 1.31 分子与器壁之间的碰撞产生压强

在器壁上取一个面积元 dA，将该面元的法向取作 x 轴方向建立坐标系，如图 1.31 所示。设容器中某一分子的速度为 $\boldsymbol{v}_i=v_{ix}\boldsymbol{e}_x+v_{iy}\boldsymbol{e}_y+v_{iz}\boldsymbol{e}_z$，该分子与面元碰撞。由于是弹性碰撞，碰撞后，该分子的速度变为 $\boldsymbol{v}_i'=-v_{ix}\boldsymbol{e}_x+v_{iy}\boldsymbol{e}_y+v_{iz}\boldsymbol{e}_z$，分子动量的改变为 $2mv_{ix}\boldsymbol{e}_x$，等于受到器壁施与分子的冲量。在时间 $\mathrm{d}t$ 内，能够与面元 $\mathrm{d}A$ 碰撞的分子一定处在底面积为 $\mathrm{d}A$、母线长为 $v_i\mathrm{d}t$、高为 $v_{ix}\mathrm{d}t$ 的柱体内。如果记速度为 $\boldsymbol{v}_i$ 的分子的体积数密度为 n_i，则在时间 $\mathrm{d}t$ 内与面元 $\mathrm{d}A$ 碰撞的速度为 $\boldsymbol{v}_i$ 的分子共有 $n_iv_{ix}\mathrm{d}t\mathrm{d}A$ 个，受到的冲量为 $2mv_{ix}n_iv_{ix}\mathrm{d}t\mathrm{d}A=2n_imv_{ix}^2\mathrm{d}t\mathrm{d}A$，这也是面元受到的冲量。由于有大量速度各不相同的分子，所以该面元受到的总冲量为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}I &= 2(n_1mv_{1x}^2+n_2mv_{2x}^2+\cdots+n_imv_{ix}^2+\cdots)\mathrm{d}t\mathrm{d}A \\
&= 2\sum_i n_imv_{ix}^2\mathrm{d}t\mathrm{d}A
\end{aligned}
$$

该面元所受到的压强为

$$p=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t\mathrm{d}A}=2\sum_i n_imv_{ix}^2$$

式中，v_{ix}都是正值。由于气体并没有宏观运动，所以平均来说，$v_{ix}>0$ 的分子数与 $v_{ix}<0$ 的分子数一样多。若将 v_{ix} 作为速度，则

$$p=m\sum_i n_iv_{ix}^2$$

而

$$\sum_i n_iv_{ix}^2=(n_1+n_2+\cdots+n_i+\cdots)\frac{n_1v_{1x}^2+n_2v_{2x}^2+\cdots+n_iv_{ix}^2+\cdots}{n_1+n_2+\cdots+n_i+\cdots}$$

其中，$\dfrac{n_1v_{1x}^2+n_2v_{2x}^2+\cdots+n_iv_{ix}^2+\cdots}{n_1+n_2+\cdots+n_i+\cdots}$等于所有分子的 v_x^2 的平均值，记作$\overline{v_x^2}$，于是器壁所受的压强为

$$p=m\left(\sum_i n_i\right)\overline{v_x^2}=nm\,\overline{v_x^2}$$

由于 $v_i^2=v_{ix}^2+v_{iy}^2+v_{iz}^2$，而对处于平衡态的大量分子而言，$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\overline{v^2}/3$，于是有

$$p=\frac{n}{3}m\,\overline{v^2} \tag{1.25}$$

而分子的平均平动动能为

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}m\,\overline{v^2} \tag{1.26}$$

则压强可以表示为

$$p=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon} \tag{1.27}$$

1.7.4 气体温度的微观机制

将理想气体的状态方程 $pV=\mu RT$ 改写为$p=\dfrac{\mu}{V}RT$，与 $p=\dfrac{2}{3}n\bar{\varepsilon}$ 比较，则有 $\bar{\varepsilon}=\dfrac{3}{2}\dfrac{V\mu}{n}RT$。

而$\frac{V/\mu}{n}=\frac{\mu}{N}=\frac{1}{N_A}$，于是$\bar{\varepsilon}=\frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T$。又因为$k=\frac{R}{N_A}$，故有

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT \tag{1.28}$$

可见，分子的平均动能与气体的温度之间是线性关系，或者说，温度就是分子平均动能的宏观表现。

【例 1.19】 估算常温下气体分子的平均平动动能是多少；在多高的温度下，气体分子的平均平动动能可达到 10^3 eV？

解 根据$\bar{\varepsilon}=3kT/2$，可算得：

常温下(300 K)，

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\times 1.38\times 10^{-23}\times 300 = 6.21\times 10^{-21}(\text{J}) = 3.88\times 10^{-2}(\text{eV})$$

平均平动动能为 10^3 eV 时，温度

$$T = \frac{2}{3k}\bar{\varepsilon} = \frac{1\,000}{3.88\times 10^{-2}}\times 300 = 7.7\times 10^6 \quad (\text{K})$$

【例 1.20】 质量为 50.0 g、温度为 18.0 ℃的氦气装在容积为 10.0 L 的封闭容器内，该容器以 $v=200$ m/s 的速度做直线运动。若容器突然停止，定向运动的动能全部转化为分子热运动的动能，试计算达到平衡后氦气的温度和压强各增大多少。

解 这部分气体的宏观动能为

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{50.0\times 200^2}{2} = 1.00\times 10^6 \quad (\text{J})$$

容器中的分子数为

$$n_a = \nu N_A = \frac{m}{\mu}N_A = \frac{50.0\times 6.02\times 10^{23}}{4} = 7.5\times 10^{24}$$

上述宏观动能全部转化为内能，平均每个气体分子增加的动能为

$$\Delta\bar{\varepsilon} = \frac{E_k}{n_a} = 0.13\times 10^{-18} \quad (\text{J})$$

由于$\bar{\varepsilon}=3kT/2$，由此引起的气体增加的温度为

$$\Delta T = \frac{2}{3k}\Delta\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3}\frac{0.13\times 10^{-18}}{1.38\times 10^{-23}} = 6\,440 \quad (\text{K})$$

由于$p=2n\bar{\varepsilon}/3$，由此引起的气体增加的压强为

$$\Delta p = \frac{2}{3}n\Delta\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3}\frac{n_a}{V}\Delta\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3}\frac{7.5\times 10^{24}\times 0.13\times 10^{-18}}{10\times 10^{-3}}$$

$$= 6.5\times 10^7(\text{Pa}) = 650\,(\text{atm})$$

原来的压强为

$$p = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} = \frac{50.0}{4}\frac{8.31\times 291}{10.0\times 10^{-3}} = 3.00\times 10^6(\text{Pa}) = 30.0\,(\text{atm})$$

【例 1.21】 一密闭容器中贮有水及其饱和蒸气，水汽的温度为 100 ℃，压强为 1.0 atm。已知在这种状态下每克水汽所占的体积为 1 670 cm^3，水的汽化热为(蒸气凝聚成液体的过程中所释放出的热量)2 250 J/g。

(1) 每秒有多少个水汽分子碰到水面上？

(2) 试将水汽分子的平均平动动能与每个水分子逸出所需要的能量作比较。

解 若将水蒸气视作理想气体,则可算得 100 ℃时每克水蒸气所占的体积为

$$\frac{V}{m}=\frac{1}{\mu}\frac{RT}{p}=\frac{1}{18}\frac{8.31\times 373}{1.01\times 10^5}=1.70\times 10^{-3}(\mathrm{m^3/g})=1\,700(\mathrm{cm^3/g})$$

与实际的值 1 670 $\mathrm{cm^3/g}$ 略有差别。

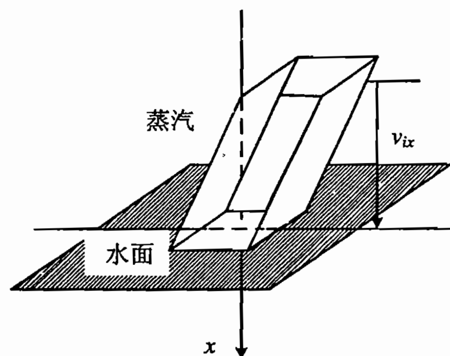


图 1.32　例 1.18 中蒸汽分子与液面的碰撞

(1) 取与水面垂直的方向为 x 轴,设蒸汽中单位体积中沿 x 方向的速度为 v_{ix} 的分子有 n_i 个,则在时间 $\mathrm{d}t$ 内,能够与面积为 $\mathrm{d}A$ 的水面碰撞的这类分子一定处在以 $\mathrm{d}A$ 为底、高为 $v_{ix}\mathrm{d}t$ 的一个斜柱形空间内,如图 1.32 所示。该斜柱的体积为 $v_{ix}\mathrm{d}A\mathrm{d}t$,其中沿 x 方向的速度为 v_{ix} 的分子共有 $n_i v_{ix}\mathrm{d}A\mathrm{d}t$ 个。于是在时间 $\mathrm{d}t$ 内,能够与上述水面碰撞的所有分子的数目为

$$\sum_i n_i v_{ix}\mathrm{d}A\mathrm{d}t=\mathrm{d}A\mathrm{d}t\sum_i n_i v_{ix}=\mathrm{d}A\mathrm{d}t(n_1 v_{1x}+n_2 v_{2x}+n_3 v_{3x}+\cdots)$$

而

$$\sum_i n_i v_{ix}=\sum_i n_i\frac{n_1 v_{1x}+n_2 v_{2x}+n_3 v_{3x}+\cdots}{\sum_i n_i}=n\frac{n_1 v_{1x}+n_2 v_{2x}+n_3 v_{3x}+\cdots}{n}$$

其中,$\frac{n_1 v_{1x}+n_2 v_{2x}+n_3 v_{3x}+\cdots}{n}$即为所有分子沿 x 方向单向的平均速度 $\bar{v}_x$,因而

$$\sum_i n_i v_{ix}\mathrm{d}A\mathrm{d}t=n\bar{v}_x\mathrm{d}A\mathrm{d}t$$

即单位时间内与单位面积水面碰撞的分子数为 $n\bar{v}_x$。而实际上只有沿 x 正方向运动的原子才能与水面碰撞,这种原子占总数的一半,即 $n\bar{v}_x/2$。

由于分子热运动沿各个方向的平均速度是相等的,所以 $\bar{v}_x=\bar{v}$,即分子热运动的平均速度。可以用 $\sqrt{\overline{v^2}}$ 代替 $\bar{v}$,由于 $\bar{\varepsilon}=m\overline{v^2}/2$,所以 $\bar{v}=\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{2\bar{\varepsilon}/m}=\sqrt{3kT/m}$。而单位体积中的分子数为 $n=N/V=p/(kT)$,所以每秒与单位面积水面碰撞的分子数为

$$\frac{1}{2}n\bar{v}_x=\frac{1}{2}\frac{p}{kT}\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\frac{p}{2}\sqrt{\frac{3}{mkT}}$$

$$=\frac{1.01\times 10^5}{2}\sqrt{\frac{3\times 6.02\times 10^{23}}{18\times 1.38\times 10^{-23}\times 373}}=1.8\times 10^{26}\quad(\mathrm{m^{-2}\cdot s^{-1}})$$

(2) 水的汽化热为 2 250 J/g,而每克水所含的分子数为 $6.02\times 10^{23}/18=3.34\times 10^{22}$,据此可算出每个水分子逸出所需的能量为 $\frac{2\,250}{3.34\times 10^{22}}=6.74\times 10^{-20}$(J)。因此,100 ℃时水汽分子的平均平动动能为 $\bar{\varepsilon}=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\times 1.38\times 10^{-23}\times 373=7.72\times 10^{-21}$(J)。

【例 1.22】 当液体与其饱和蒸气共存时,汽化率与凝结率相等。设所有碰到液面上的蒸气分子都能凝聚为液体,并假定当把液面上的蒸气都瞬间抽去时液体的汽化率与存在饱和蒸气时的相等。已知水银在 0 ℃时的饱和蒸气压为 185×10^{-6} mmHg,汽化热为 $\lambda=336.5$ J/g,问

每秒通过每平方厘米液面有多少克水银向真空中汽化？

解 在标准状态下，气体单位体积（每立方米）中的分子数为

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{p_0}{kT} = \frac{1.013\,250\times 10^5}{1.380\,662\times 10^{-23}\times 273.15} = 2.687\,6\times 10^{25}$$

上述结果称作**洛施密特数**，它是一个基本的物理学常数。

题目中每立方米水银蒸气含有的分子数为

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{185\times 10^{-6}/760\times 1.013\,250\times 10^5}{1.380\,662\times 10^{-23}\times 273.15} = 6.542\times 10^{18}$$

从微观上看，蒸气凝聚为液体，分子的动能消失，所以可以认为凝聚过程中气体分子热运动的动能全部转化为热量，则汽化热就等于气体分子热运动的动能。汞的摩尔质量为 200.59 g，每克液态汞的原子数为

$$\frac{6.02\times 10^{23}}{200.59} = 3.00\times 10^{21}$$

每个汞原子的汽化热为$\frac{336.5}{3.00\times 10^{21}}=1.12\times 10^{-19}$(J)，这就是汞原子热运动的动能。由于$\bar{\varepsilon}=m\overline{v^2}/2$，即$\frac{\lambda}{N_A/\mu}=\frac{1}{2}\frac{\mu}{N_A}v^2\ \overline{v^2}$，所以$\overline{v^2}=2\lambda$，由此可得$\bar{v}=\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{2\lambda}$。

单位时间内通过单位液面凝结的汞原子的数目为

$$\frac{1}{2}n\bar{v}_x = \frac{1}{2}n\sqrt{\overline{v^2}} = \frac{1}{2}\frac{p}{kT}\sqrt{2\lambda}$$

$$= 2.68\times 10^{21}(\mathrm{m^{-2}\cdot s^{-1}}) = 2.68\times 10^{17}(\mathrm{cm^{-2}\cdot s^{-1}})$$

换算成质量，结果为 8.9×10^{-5} g/(cm² · s)，或者直接计算：

$$\frac{1}{2}n\bar{v}_x\frac{\mu}{N_A} = \frac{1}{2}\frac{p}{kT}\frac{\mu}{N_A}\sqrt{2\lambda} = \frac{\mu p}{2RT}\sqrt{2\lambda} = 8.9\times 10^{-5}\quad (\mathrm{g/(cm^2\cdot s)})$$

1.8 实际气体的状态方程

实验表明，虽然在压强不是很大、温度不是很低时，可以用理想气体的状态方程较准确地描述各物理量之间的关系，但是，若压强较大、温度较低时，理论值与实验值的偏差会变得比较明显。这时，需要用更精确的方程描述气体状态的变化。

事实上，理想气体状态方程在分子间隔很大时与实际情况符合得较好，在由于压强增大或温度降低而分子间隔变小的情况下，需要考虑分子所占的体积、分子之间的相互作用，以及其他因素的影响。

考虑了上述因素之后，可以用各种不同的方法得到实际气体的状态方程，这样的方程有多种形式，甚至同一个气体系统，在外部条件（压强、温度等）改变时，其状态方程也不完全一样。其中有一种实际气体的状态方程，是通过对理想气体状态方程的修正而得到的，这就是范德瓦耳斯方程。

首先考虑分子所占体积的影响。理想气体状态方程中的体积是分子可以自由运动的空间

的大小，实际的情况是，每一个气体分子都会占据一定的空间，这一空间是无法让分子自由出入的，因而应当把这一空间区域剔除掉。设有 1 mol 气体，由于分子占据空间所引起的体积修正量为 b，故分子可自由运动的空间的体积就是 $V-b$。这时，1 mol 实际气体的状态方程为

$$p=\frac{RT}{V-b} \tag{1.29}$$

可以证明，b 的数值约等于 1 mol 气体内所有分子体积总和的 4 倍。

若每个气体分子的直径为 d，则 d 就是其中分子间所能达到的最小距离，如图 1.33(a)所示。对 1 mol 气体而言，其中一个分子在运动过程中，是不能够进入被另外 N_A-1 个分子所占据的空间的。

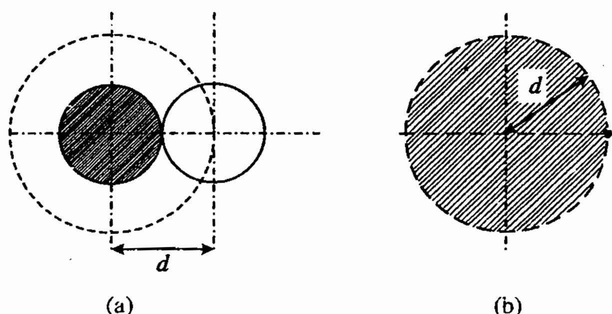


图 1.33　气体分子不能自由进入的区域

如图 1.33(b)所示，每个分子周围不能被其他分子进入的区域的大小为 $4\pi d^3/3$，则对一个分子而言，它不能够自由进入的区域为

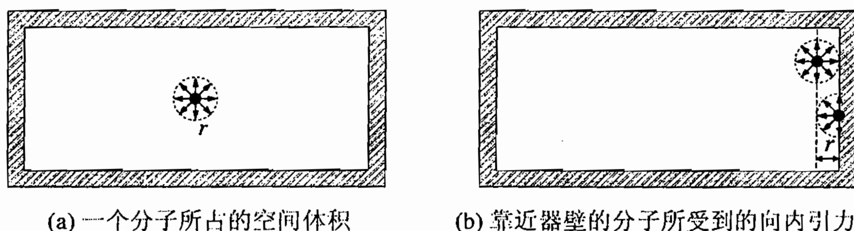
$$(N_A-1)\frac{4\pi}{3}d^3\approx N_A\frac{4\pi}{3}d^3$$

而实际上，只有面对着运动分子的区域才是有效的不能进入的区域，于是体积修正量为

$$b=\frac{1}{2}N_A\frac{4\pi}{3}d^3=4N_A\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3=4V_a$$

其中，V_a 就是 1 mol 气体分子的总体积。

其次考虑分子之间作用力的影响。若记气体分子之间有效的作用力半径为 r，则某一分子会受到其周围半径 r 范围内分子的吸引力，如图 1.34(a)所示。当该分子到器壁的距离大于 r 时，其周围布满其他分子，因而所受到的引力相互抵消；当该分子到器壁的距离小于 r 时，另一侧的分子多于靠近器壁的分子，因而受到一个指向其内部的引力，如图 1.34(b)所示。这样的引力所起的效果是使分子与器壁碰撞的力减小，从而导致器壁所受到的压强减小。



(a) 一个分子所占的空间体积　　(b) 靠近器壁的分子所受到的向内引力

图 1.34　分子之间的作用力

记由上述引力作用而使压强的减小量为 Δp。Δp 称作气体的内压强。从分子运动论的观点看，压强等于气体分子单位时间内施于单位面积器壁的冲量的统计平均值。若以 Δk 表示因内向作用力使一个分子在垂直于器壁方向上动量减少的平均值，则有

$$\Delta p = \text{单位时间内与单位面积器壁碰撞的分子数} \times 2\Delta k$$

Δk 与分子数密度 n（即单位体积内的分子数）成正比，而单位时间内与单位面积器壁碰撞的分子数也与分子数密度成正比，即

$$\Delta p \propto n^2$$

在分子总数一定的条件下，分子数密度与气体的体积成反比，因而压强的减小也可以表示为

$$\Delta p = \frac{a}{V^2} \tag{1.30}$$

同时考虑到气体分子的体积和分子间的相互作用的影响，则实际气体的状态方程为

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

即

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \tag{1.31}$$

式(1.31)称作实际气体的**范德瓦耳斯方程**。

若气体物质的量为 ν，则范德瓦耳斯方程为

$$\left(p + \frac{\nu a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT \tag{1.32}$$

【例 1.23】 把标准状态下 22.4 L 的氮气不断压缩，它的体积将趋于多大？设此时氮分子是一个挨着一个紧密排列的，试计算氮分子的直径。此时由分子间引力所产生的内压强约为多大？（对于氮气，范德瓦耳斯方程中的常量 $a = 1.390\ \text{atm} \cdot \text{L}^2/\text{mol}^2$，$b = 0.039\ 13\ \text{L/mol}$。）

解 根据范德瓦耳斯方程中物理量的含义，可知 b 约为 1 mol 气体内所有分子体积总和的 4 倍。因而将上述氮气不断压缩后，其体积将趋于 $V = b/4 = 1.0\ \text{mL}$。因此每个分子的直径为

$$d = 2\sqrt[3]{\frac{3b}{16\pi N_A}} = 3 \times 10^{-9}(\text{dm}) = 3 \times 10^{-10}(\text{m})$$

内压强为

$$\Delta p = \frac{a}{V^2} = 1.39 \times 10^6\ \text{atm}$$

1.9 热量的测量

热量是一个非常重要的物理量，凡在物理学中定义的物理量都应当是可以从实验中测量的，但它似乎是一个既看不见又摸不着的东西，不像质量、体积、速度等物理量可以直接测量，不过它又是确确实实存在的，它可以储存在物体内部，又可以从物体中释放出来，传递给另一个物体。

可以得到一个合理的推断：一定质量的某种物质，在外部条件不变，同时物质本身的形态和结构也不改变时，若温度降低 1 ℃所放出的热量为 Q，则温度升高 1 ℃，吸收的热量也是 Q。

当然这一推断需要经过实验的验证。实验可以这样做:在一个绝热良好而质量又可忽略不计的容器中盛有 1 kg 20 ℃的水,再向其中倒入 1 kg 22 ℃的水,待其混合均匀并达到平衡状态时,测量得到的温度是 21 ℃。由于没有热量损失,且容器吸收的热量又可以忽略不计,故热水放出的热量全部被冷水吸收,从而热水的温度降低 1 ℃所放出的热量等于冷水的温度升高 1 ℃所吸收的热量。

还可以进一步作这样合理的推断:一定质量的某种物质,在外部条件不变,同时物质本身的形态和结构也不改变时,如果温度降低 1 K 所放出的热量为 Q,则温度降低 n K 所放出的热量为 nQ。

验证上述推断的实验可以这样做:将 1 kg 20 ℃的水与 2 kg 17 ℃的水混合,热平衡时的温度是 18 ℃。这是因为 2 kg 水温度升高 1 ℃所吸收的热量是 1 kg 水温度降低 1 ℃所放出的热量的 2 倍,正好是 1 kg 水温度降低 2 ℃(从 20 ℃降至 18 ℃)所放出的热量。

由于存在上述简单的关系,所以可以定义单位质量的某种物质温度每升高或降低 1 ℃所对应的热量变化是 1 个热量单位,则根据该物质的质量和温度改变可以测量热量。

历史上,早期通用的热量单位是卡路里,简称为卡(cal)。其定义为:在常温常压下,1 g 纯水温度升高 1 ℃所吸收的热量是 1 cal。

有了热量的定义,就可以先用水作为量热介质来测量其他物质温度变化时所吸收和放出的热量。大量的实验研究表明,质量为 m 的某种物质,温度的改变与吸收或放出的热量之间是简单的线性关系,即

$$Q = cm\Delta T \tag{1.33}$$

其中,比例系数 c 就是单位质量的该种物质温度每变化 1 ℃所吸收或放出的热量,称作这种物质的**比热容**,也曾简称为**比热**。

焦耳经过长期的实验研究,证明做功也可以使物质的温度改变,说明机械功的效果与热量是等价的,而且,单位热量总是与一定数值的机械功或电功相当。如果功的单位用焦耳表示,则 1 cal = 4.18 J,这就是著名的热功当量。焦耳的研究证明,热量与功一样,都是能量的表现形式,功与热可以相互转换,在转换的过程中,能量是守恒的。

既然意识到热量是能量的表现形式,所以也就没有必要单独为热量设置一种单位,而只要用能量的单位作为热量的单位就可以了。所以,现在的国际标准单位制中,热量的单位就是焦耳,比热容的单位就是 J/kg(焦耳/千克)。

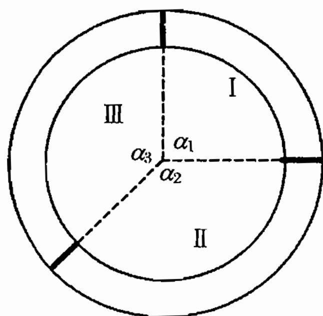


图 1.35　例 1.24 中的装置

【例 1.24】(第 9 届全国中学生物理竞赛预赛试题)　如图 1.35 所示,在一内径均匀的绝热的环形管内,由三个薄金属片制成的活塞将管隔成三部分,活塞的导热性和封闭性良好,且可无摩擦地在圆环内运动。三部分中盛有同一种理想气体。容器平放在水平桌面上,起始时,Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ三部分气体的压强都是 p_0,温度分别是 $t_1 = -3$ ℃,$t_2 = 47$ ℃,$t_3 = 27$ ℃。三个活塞到圆环中心连线之间的夹角分别是 $\alpha_1 = 90^\circ$,$\alpha_2 = 120^\circ$,$\alpha_3 = 150^\circ$。

(1) 试求最后达到平衡时,三个活塞到圆环中心的连线之间的夹角各是多少?

(2) 已知一定质量的理想气体的内能的变化量与其温度的变化量成正比(与压强、体积的

变化无关)，试求达到平衡时气体的温度和压强。

解 由于系统与外界没有热量交换，且与外界之间互相没有做功。因而达到平衡时，三部分气体之间放出的总热量与吸收的总热量相等。设三部分气体物质的量分别为 ν_1、ν_2、ν_3，达到平衡过程中放出的热量分别为 Q_1，Q_2，Q_3。设平衡时温度为 T，由于比热容相等，于是热平衡方程为

$$\nu_1(T - T_1) + \nu_2(T - T_2) + \nu_3(T - T_3) = 0$$

经过整理，上述方程可化为

$$(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)T = \nu_1 T_1 + \nu_2 T_2 + \nu_3 T_3$$

各部分气体的状态方程为 $p_0\alpha_{i0} = k\nu_i RT_i$，$p\alpha_i = k\nu_i RT$，代入上述方程，可得到

$$p(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = p_0(\alpha_{10} + \alpha_{20} + \alpha_{30})$$

于是有 $p = p_0$。对每一部分气体，有 $p_0\alpha_{i0}/T_i = p\alpha_i/T$，所以

$$\frac{\alpha_{10}}{T_1} + \frac{\alpha_{20}}{T_2} + \frac{\alpha_{30}}{T_3} = \frac{\alpha_1}{T} + \frac{\alpha_2}{T} + \frac{\alpha_3}{T}$$

代入数值计算，得

$$T = 297.9\ \text{K}, \quad \alpha_i = \alpha_{i0}\frac{T}{T_i} = 99.3^\circ, 111.7^\circ, 149^\circ$$

1.10 热传递的各种形式

在有些情形下，不同温度的物体通过相互接触，温度高的物体会逐渐冷却，而温度低的物体会逐渐变热，为了描述这一现象，人们说热量从高温物体传递到了低温物体。

从宏观上看，热量总是在温度不同的物质之间传递，或者说，热量总是从高温物体传到低温物体，高温物体放热，低温物体吸热。经过一段时间后，这两个物体就可以达到热平衡，即这两个物体的温度相同了。若物质达到热平衡状态，是不是它们之间的热传递就停止了呢？其实不是的，因为没有证据表明任何一个物体能够停止放热或吸热。事实上，处于热平衡状态的物体之所以保持温度不变，是因为单位时间内放出的热量与吸收的热量相等，因而热平衡是一种动态平衡。这样一来，物体无论温度高低，都在不停地吸热和放热。高温物体在降温过程中，放热大于吸热；低温物体在升温过程中，吸热大于放热。

热量从一个物体传递到另一个物体的物理过程称作**热传递**。热传递的方式有很多种，除了上面的例子中所提到的接触式热传递之外，热量还可以通过对流和辐射的方式传递，以下分别加以介绍。

1.10.1 热传导

1. 热传导现象

热传导是通过接触的方式传递热量的。例如食物制作过程中的煎、炒、烹、炸、煮，都是通过食物与热锅、热油或热水接触使食物达到高温状态而变熟的，“蒸”则是让高温水蒸气与食物接触而使其变熟。

热传导过程既可以在两个物体之间发生，也可以在同一物体的不同部分之间发生。例如炉灶上的锅，虽然只是一部分直接被炉火烧热，但其他部分也会变热；炒菜时虽然只有铲子下部与高温接触，但铲子把也会变得较热。

2. 热传导定律

可以用单位时间内传递的热量衡量热传导的速率。研究表明，热传导的速率与传热介质的截面面积成正比，也与传热介质中单位长度距离的温度差（即温度梯度）成正比，即

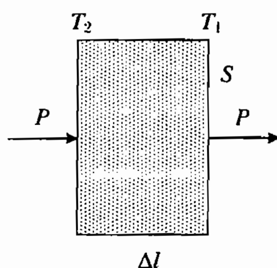


图 1.36　介质的热传导

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta l} S \tag{1.34}$$

其中，ΔQ 为时间 Δt 内所传递的热量，ΔT 为距离 Δl 上的温度差，S 为接触部分的截面面积，比例系数 κ 称作热导率，如图 1.36 所示。

对于不同的物质，热导率也不同，它是表征物质导热能力的物理量。

由于 $\Delta Q/\Delta t$ 是热传导的功率，记 $P = \Delta Q/\Delta t$，则式(1.34)也可以表示为

$$P = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta l} S \tag{1.35}$$

【例 1.25】 密闭容器中有等量的冰和水，初始时温度为 0 ℃，经过 160 分钟后冰全部融化。

(1) 再经过多久容器内温度升高 1 ℃？

(2) 容器内温度从 20 ℃升高到 21 ℃需要多长时间？

解　设环境温度为 T_m，则热传导功率为 $k(T_m - T)$。冰全部熔化的过程中，

$$Q_1 = k(T_m - T_0)\Delta t_1 = m\lambda$$

温度升至 1 ℃的过程中，

$$Q_2 = k(T_m - T_0)\Delta t_2 = 2mc\Delta T$$

解得

$$\Delta t_2 = \frac{2c\Delta T}{\lambda}\Delta t_1$$

温度从 20 ℃升至 21 ℃的过程中，

$$Q_3 = k(T_m - T_2)\Delta t_3 = 2mc\Delta T = k(T_m - T_0)\Delta t_2$$

解得

$$\Delta t_3 = \frac{T_m - T_0}{T_m - T_2}\Delta t_2$$

【例 1.26】 设正方形铜制薄板的一个端面温度维持在 100 ℃，其余三个端面温度维持在 0 ℃。求薄板中心处的温度。

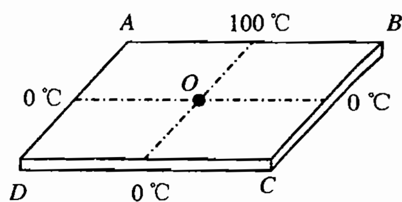


图 1.37　铜板

解　根据对称性（图 1.37）判断，铜板中心处与三个 0 ℃边的温差均相等。由于各处温度不再改变，所以从 100 ℃边流入的热功率与从三个 0 ℃边流出的热功率相等，或者，从中心处流向四个边的热功率的代数和等于 0。因而可以得到

$$k(t-100)+3k(t-0)=0$$

解得

$$t=25\ ℃$$

3. 热阻

若温度分别为 T_1 和 T_2（设 $T_1>T_2$）的介质之间包含两种不同热导率的介质，如图 1.38 所示，设达到稳定状态时，两种介质接触面处的温度为 $T_{1\text{-}2}$，则每种介质的热传导功率为 $P_1=\kappa_1\dfrac{T_1-T_{1\text{-}2}}{\Delta l_1}S$，$P_2=\kappa_2\dfrac{T_{1\text{-}2}-T_2}{\Delta l_2}S$。显然，$P_1=P_2$，则可以得到

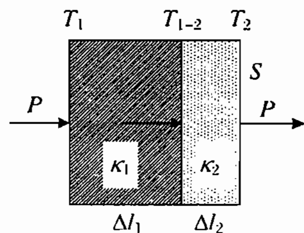


图 1.38　两层介质的热导

$$T_1-T_{1\text{-}2}=P\frac{\Delta l_1}{\kappa_1 S},\quad T_{1\text{-}2}-T_2=P\frac{\Delta l_2}{\kappa_2 S}$$

两式相加，得到 $T_1-T_2=P\left(\dfrac{\Delta l_1}{\kappa_1 S}+\dfrac{\Delta l_2}{\kappa_2 S}\right)$，热传导功率为

$$P=\frac{T_1-T_2}{\dfrac{\Delta l_1}{\kappa_1 S}+\dfrac{\Delta l_2}{\kappa_2 S}} \tag{1.36}$$

若传热介质共有 n 层，其中第 i 层的温差为 $T_i-T_{i+1}=P\dfrac{\Delta l_i}{\kappa_i S}$，第 $i+1$ 层的温差为 $T_{i+1}-T_{i+2}=P\dfrac{\Delta l_{i+1}}{\kappa_{i+1} S}$，于是可以得到第 1 层外侧与第 n 层外侧的温差为

$$T_1-T_{n+1}=P\left(\frac{\Delta l_1}{\kappa_1 S}+\cdots+\frac{\Delta l_i}{\kappa_i S}+\frac{\Delta l_{i+1}}{\kappa_{i+1} S}+\cdots+\frac{\Delta l_n}{\kappa_n S}\right)$$

于是热传导功率可表示为

$$P=\frac{T_1-T_{n+1}}{\dfrac{\Delta l_1}{\kappa_1 S}+\cdots+\dfrac{\Delta l_i}{\kappa_i S}+\dfrac{\Delta l_{i+1}}{\kappa_{i+1} S}+\cdots+\dfrac{\Delta l_n}{\kappa_n S}}$$

其中，$\Delta l_i/(\kappa_i S)$ 称作第 i 层介质的**热阻**，记作

$$R_i=\frac{\Delta l_i}{\kappa_i S} \tag{1.37}$$

于是**热阻串联**时，热阻为

$$R=\frac{\Delta l_1}{\kappa_1 S}+\cdots+\frac{\Delta l_i}{\kappa_i S}+\frac{\Delta l_{i+1}}{\kappa_{i+1} S}+\cdots+\frac{\Delta l_n}{\kappa_n S}=\sum_i\frac{\Delta l_i}{\kappa_i S}=\sum_i R_i$$

热传导功率为

$$P=\frac{\Delta T}{\sum\limits_i\dfrac{\Delta l_i}{\kappa_i S}} \tag{1.38}$$

在已知每层介质的热传导特性的情况下，可以按式(1.38)，再根据温差计算热传导功率。

【例 1.27】（第 25 届全国物理竞赛决赛试题）　制冷机是通过外界对机器做功，把从低温吸取的热量连同外界对机器做功得到的能量一起送到高温处的机器。它能使低温处的温度降低，高温处的温度升高。已知当制冷机工作在绝对温度为 T_1 的高温处和绝对温度为 T_2 的低温处之间时，若制冷机从低温处吸取的热量为 Q，外界对制冷机做的功为 W，则有

$$\frac{Q}{W} \leqslant \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

式中，等号对应于理论上的理想情况。

某制冷机在冬天作为热泵使用(即取暖空调机)，在室外温度为 -5.00 ℃的情况下，使某房间内的温度保持在 20.00 ℃。由于室内温度高于室外，故将有热量从室内传递到室外。本题只考虑传导方式的传热，它服从以下规律：设有一块导热层，其厚度为 l，面积为 S，两侧温度差的大小为 ΔT，则单位时间内通过导热层由高温处传导到低温处的热量为

$$H = \kappa \frac{\Delta T}{l} S$$

其中，κ 为热导率。

(1) 假设该房间向外散热是由面向室外的面积为 $S = 5.00\ \mathrm{m}^2$、厚度为 $l = 2.00\ \mathrm{mm}$ 的玻璃引起的，已知该玻璃的热导率为 $\kappa = 0.75\ \mathrm{W/(m \cdot K)}$，试求在理想情况下该热泵工作 12 小时需要多少度(1 度 $= 1\ \mathrm{kW \cdot h}$)电？

(2) 若将上述玻璃板换为“双层玻璃板”，两层玻璃的厚度均为 2.00 mm，玻璃板之间夹有厚度 $l_0 = 0.50\ \mathrm{mm}$ 的空气层。假设空气的热导率为 $\kappa_0 = 0.025\ \mathrm{W/(m \cdot K)}$，若该热泵仍然工作 12 小时，电费为每度 0.50 元，问这时的电费比(1)中的单层玻璃情形节省多少？

解 在理想情况下，$\frac{Q}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$。

(1) 若记该机器消耗的功率为 P，单位时间内从低温热源处吸取的热量为 q，则空调的制热功率为

$$P_1 = q + P = \frac{T_2}{T_1 - T_2} P + P = \frac{T_1}{T_1 - T_2} P$$

已知房间的散射功率为

$$H = \kappa \frac{\Delta T}{l} S = \kappa \frac{T_1 - T_2}{l} S$$

若维持房间的温度不变，则要求 $P_1 = H$，即

$$\frac{T_1}{T_1 - T_2} P = \kappa \frac{T_1 - T_2}{l} S$$

解得

$$P = \kappa \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1} \frac{S}{l} = 0.75 \times \frac{25^2}{293} \frac{5.00}{2.00 \times 10^{-3}} = 4 \quad (\mathrm{kW})$$

因此，制冷机工作 12 小时的耗电量为 48 度。

(2) 换为双层玻璃之后，热阻

$$R = \sum_i \frac{l_i}{\kappa_i S} = \frac{2l}{\kappa S} + \frac{l_0}{\kappa_0 S}$$

散热功率为

$$H_1 = \frac{T_1 - T_2}{\frac{2l}{\kappa S} + \frac{l_0}{\kappa_0 S}}$$

维持房间的温度不变的方程变为

$$\frac{T_1}{T_1 - T_2}P_1 = \frac{T_1 - T_2}{\frac{2l}{\kappa S} + \frac{l_0}{\kappa_0 S}}$$

解得

$$P_1 = \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1}\frac{S}{\frac{2l}{\kappa} + \frac{l_0}{\kappa_0}} = 0.42 \quad (\text{kW})$$

因此，制冷机工作 12 小时节省的电费为(4－0.42)×12×0.5＝23.6(元)。

1.10.2 热对流

1. 热对流现象

具有流动性的物质，例如液体和气体，一旦相遇，就会相互混合，这是一种相互扩散的过程。如果混合之前两部分的温度不同，则混合后，一方面相互接触的部分会发生热传导，另一方面，各部分由于温度不同压强也不同。这样一来，各部分之间就会有宏观的运动，这种运动称作热对流。

例如，当容器中水的一部分被加热(可能是在底部用火加热，也可能是在中央用电热棒加热)时，靠近热源的水最先受热膨胀，密度变小，压强增大，这部分热水向周围流动；同时周围温度较低、密度较大的水流过来填充空隙，就形成了冷热水的对流，逐渐使各处的水温变得一致。冬季房间中的暖气先将其周围的空气加热，受热的空气膨胀上升，留下的空间被周围密度较大的冷空气填充，形成空气的对流，将热量传送到房间的各个角落。夏季房间中的空调机吹出冷气，由于密度大而降到低处，热空气由于密度小而上升，进入空调机，被制冷，经过不断的对流，使温度较高的空气不断被降温，这也是空气的对流。大气中，由各处的温度不同所造成的空气对流就形成了风，由于地球、大气受太阳的照射而升温，而太阳对地球的照射因纬度和季节而不同，所以地球上，在不同的季节、不同的纬度，风向和风力各有特点。

2. 热对流的特点

热对流是一种扩散过程。从宏观上看，这种扩散是流体内部压强、浮力、重力等相互作用的结果。有时扩散进行得较快，有时则进行得非常缓慢。例如，将容器中的水从下部加热，则下部的热水与上部的冷水之间的对流较容易进行，容器中水的温度很快变得接近。如果仅仅对上部的水加热，则热水密度小，仍然浮在上部，冷水密度大，仍然沉在底部，而水的导热性又较差，所以上下的水温相差较大。大气中低处温度高、高处温度低时，很容易形成对流。若出现相反的情况(例如冬季海面上，或地面附近空气湿度很大时)，热空气在上层，冷空气在下层，这样就形成了逆温层，空气就难以发生对流，因而地面附近被污染的空气不能被稀释，严重时会造成空气中毒。

有时候，自然对流不足，可以采用搅拌、鼓风等方式使流体对流，这就是强迫对流。

1.10.3 热辐射

1. 热辐射现象

阳光照在身上，会使人觉得暖洋洋的，这就是热辐射的效果。其实，不仅发出可见光的物体有热辐射，当汽车驶过身旁，人们也会感到有热量传到身上，走近炉膛关闭的炉子，也会感到热浪扑面而来，这些也都是热辐射的缘故。

2. 热辐射的微观机制

从微观上看，热辐射是带电粒子热运动产生的。构成物质的原子、分子都在做无休止的热运动，热运动是微观粒子的随机运动，这些粒子速度的大小和方向都在迅速地变化。即使是电中性的原子和分子，它们的正电中心与负电中心也往往不重合，从而呈现出极性。这些带电的粒子，包括有极性的粒子，速度改变时，会发出电磁辐射。这种辐射是由热运动而引起的，因而称作热辐射。

3. 热辐射定律

热辐射是电磁波，波长范围很大，从极短到极长都有。

一般情况下，物体既发出电磁辐射，也会吸收和反射照射到其表面的电磁辐射。电磁辐射是能量的载体，物体通过热辐射可以传递能量。

物体对照射到其表面的电磁辐射，一部分吸收，另一部分反射。被吸收的电磁辐射转化成物体的热能。吸收部分的能量占辐照能量的比率称作物体的吸收系数。

热辐射的规律要通过实验测量，但是，由于物体总有反射，所以实验仪器测量到的辐射，既有物体本身由热辐射而发出的，也有由物体表面反射的，难以区分。

有一些物体的吸收系数很大，对辐照到其表面的能量几乎全部吸收，这样的物体称作黑体。严格说来，天然的黑体是不存在的。黑色的物体不反射可见光，但对于长波和短波的电磁辐射还是有反射的。在实验上，可以用一个开有小孔的空腔代替黑体，射入空腔中的电磁波，在腔内经多次反射后，几乎全被内壁吸收，再从小孔反射出来的概率几乎为零，但空腔内部的热辐射却可以从小孔辐射出来。这样，只需测量从小孔辐射的电磁波就能够得知热辐射的规律。

通过在黑体的内部设置加热装置改变其内部的温度，就可以测量出不同温度时热辐射的特性。

实验上测得的黑体辐射的规律如图 1.39 所示。图中横坐标是电磁辐射的波长 λ 或频率 ν，纵坐标是在某一温度 T 下，单位时间内通过单位截面的单位波长或频率间隔内的辐射通量 $E(\lambda,T)$ 或 $E(\nu,T)$，实际上就是黑体在单位波长内或单位频率内辐射的功率密度，简称为单色辐出度或辐射本领。

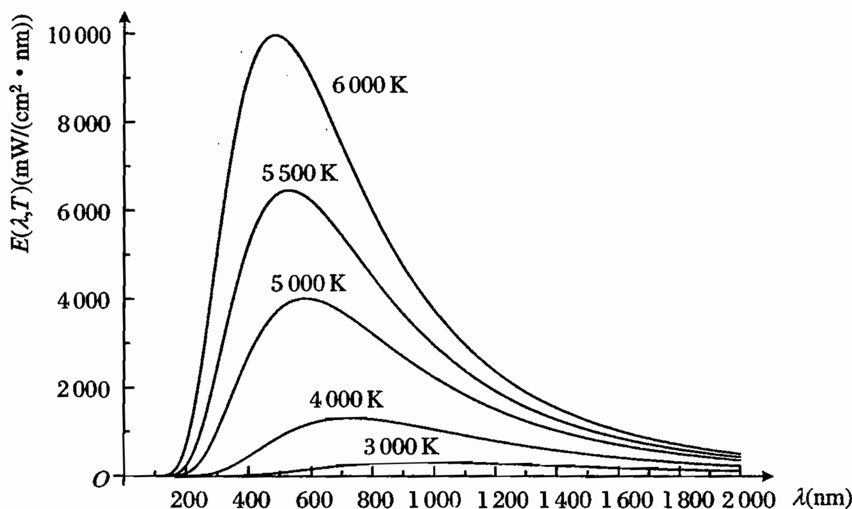


图 1.39　黑体辐射的测量结果

从图 1.39 中可以看出，在某一温度下，辐射曲线下的面积就是黑体在这一温度下的总辐射功率密度，即黑体单位表面积的热辐射功率。实验表明，黑体辐射的功率密度只与温度有关，温度越高，辐射的功率密度越大，可表示为

$$\Phi(T) = \sigma T^4 \tag{1.39}$$

这就是**斯特藩-玻尔兹曼定律**，其中，$\sigma = 5.670\,32 \times 10^{-18}\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$为**斯特藩-玻尔兹曼常量**。

另外，在每一温度下，某一波长的单色辐出度是最大的，即每一条辐射曲线都有一个最大值。温度低时，最大值所对应的波长较长；温度高时，最大值所对应的波长较短。如果用 λ_{max}表示单色辐出度最大的波长，则 λ_{max}与黑体温度 T 之间的关系为

$$T\lambda_{max} = b \tag{1.40}$$

式(1.40)称作**维恩位移定律**(详见 13.1.1 小节)，其中，$b = 2.897\,8 \times 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$。

对黑体辐射的研究，在物理学的发展史上有着极其重要的意义。当人们试图用经典的电磁理论和热力学理论解释黑体辐射的特性时，遇到了无法克服的困难，这一困难当时称作“紫外灾难”。为了克服这一困难，普朗克提出了黑体辐射是能量分立的谐振子的假说，这是第一个认为光波具有粒子特性的假说，具有划时代的意义，导致了量子物理学的建立。

【例 1.28】 从地球看太阳，张角约为 0.53°，设地球表面的平均温度为 300 K，不考虑地球对日光的反射，试估算太阳表面的温度 T。

解 将太阳和地球的热辐射作为黑体辐射处理。

设太阳的半径为 R，则太阳表面热辐射的功率为

$$P = 4\pi R^2 \Phi(T) = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

地球的公转轨道在以太阳为中心、日-地间距为半径(d)的球面上。在该球面上，太阳辐射的功率密度为

$$\frac{P}{4\pi d^2} = \frac{R^2}{d^2}\sigma T^4$$

设地球的半径为 r，则地球朝向太阳的截面面积为 πr^2，所以地球吸收太阳辐射的功率为

$$P_1 = \pi r^2 \frac{R^2}{d^2}\sigma T^4$$

设地球的温度为 T_0，则地球热辐射的功率为

$$P_2 = 4\pi r^2 \sigma T_0^4$$

热平衡时，地球辐射的功率 P_2 与吸收太阳辐射的功率 P_1 相等，即

$$\pi r^2 \frac{R^2}{d^2}\sigma T^4 = 4\pi r^2 \sigma T_0^4$$

解得

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{R/(2d)}} = \sqrt{\frac{2}{\theta}}T_0 = \sqrt{\frac{2 \times 180}{0.53\pi}} \times 300 \approx 4\,400 \quad (\mathrm{K})$$

太阳表面的实际温度约为 6 000 K，上述计算结果之所以有一定的误差，主要是由于认为地球是黑体，它对太阳的辐射全部吸收。而实际上，地球表面只吸收了太阳的一部分辐射，应当将地球视作灰体。

【例 1.29】 设有一双层金属圆筒，内、外半径分别为 $R_1 = 40$ cm，$R_2 = 60$ cm，内、外筒温度分别为 100 ℃，0 ℃。在中间加一半径 $R = 50$ cm 的圆筒，筒的表面都涂黑，可看作是黑体，筒间

已被抽成真空。求：

(1) 达到热平衡后，中间筒的温度；

(2) 在插入中间圆筒前后，筒间能量流动的变化。

解 (1) 设筒高为 H，中间筒的温度为 T，则达到热平衡时，中间筒的吸收功率与辐射功率相等，即

$$\frac{\pi R_1 H\sigma T_1^4}{\pi RH}\pi RH + \frac{\pi R_2 H\sigma T_2^4}{\pi RH}\pi RH = 2\pi RH\sigma T^4$$

实际上，由于内筒向外的辐射全部被中间筒的内侧表面吸收，外筒向内的辐射全部被中间筒的外侧表面吸收，所以上述热平衡方程可以直接写为

$$\pi R_1 H\sigma T_1^4 + \pi R_2 H\sigma T_2^4 = 2\pi RH\sigma T^4$$

解得

$$T = \sqrt[4]{T_1^4\frac{R_1}{2R} + T_2^4\frac{R_2}{2R}} = \sqrt[4]{373^4 \times \frac{40}{100} + 273 \times \frac{60}{100}} \approx 324.4 \quad (\mathrm{K})$$

(2) 由于平衡时各处的能流相等，所以只需计算中间筒与内筒间能流的变化即可。

原来的能流为内筒向外辐射的功率与外筒向内辐射的功率之差，即

$$P = \pi R_1^2\sigma T_1^4 - \pi R_2^2\sigma T_2^4$$

插入中间筒后，能流变为

$$P' = \pi R_1^2\sigma T_1^4 - \pi R^2\sigma T^4$$

两者之比为

$$\frac{P'}{P} = \frac{\pi R_1 H\sigma T_1^4 - \pi RH\sigma T^4}{\pi R_1 H\sigma T_1^4 - \pi R_2 H\sigma T_2^4} = \frac{R_1 T_1^4 - RT^4}{R_1 T_1^4 - R_2 T_2^4}$$

由于 $RT^4 = (R_1 T_1^4 + R_2 T_2^4)/2$，所以

$$\frac{P'}{P} = \frac{R_1 T_1^4 - \frac{1}{2}(T_1^4 R_1 + T_2^4 R_2)}{R_1 T_1^4 - R_2 T_2^4} = \frac{1}{2}\,\frac{T_1^4 R_1 - T_2^4 R_2}{R_1 T_1^4 - R_2 T_2^4} = \frac{1}{2}$$

即插入中间筒之后，散热功率减为原来的 1/2。上述中间筒被作为了辐射层，可见增加辐射层，能起到很好的绝热效果。

【例 1.30】（第 27 届全国中学生物理竞赛复赛试题） 已知太阳表面的温度为 $T_s = 5.78\times10^3$ K，太阳的半径为 $R_s = 6.96\times10^5$ km，地球到太阳的平均距离为 $d = 1.50\times10^8$ km。假设温室气体在大气层中集中形成一个均匀的薄层，并设它对热辐射的反射率 $\beta = 0.38$。

(1) 若地球表面对太阳辐射的平均反射率为 $\alpha = 0.30$，考虑了温室气体对热辐射的反射作用后，地球表面的温度是多少？

(2) 地球表面一部分被冰雪覆盖，这部分对太阳辐射的反射率为 $\alpha_1 = 0.85$，其余部分的反射率为 $\alpha_2 = 0.25$，问冰雪覆盖面积占多大时，地球表面的温度为 273 K？

解 (1) 在地球的轨道处，太阳辐射的功率密度为

$$I = \frac{4\pi R_s^2\sigma T_s^4}{4\pi d^2} = \frac{R_s^2}{d^2}\sigma T_s^4$$

地球吸收的辐射功率为

$$\Phi_A = (1-\alpha)I\pi R_c^2 = (1-\alpha)\pi\frac{R_s^2 R_c^2}{d^2}\sigma T_s^4$$

地球热辐射的功率为

$$\Phi_E = 4\pi R_e^2(1-\beta)\sigma T_E^4$$

地球达到热平衡时，$\Phi_E = \Phi_A$，即

$$(1-\alpha)\pi\frac{R_s^2R_e^2}{d^2}\sigma T_s^4 = 4\pi R_e^2(1-\beta)\sigma T_E^4$$

因此

$$T_E = \sqrt[4]{\frac{1-\alpha}{1-\beta}}\sqrt{\frac{R_s}{2d}}T_s = \sqrt[4]{\frac{0.7}{0.62}}\sqrt{\frac{6.96\times10^5}{2\times1.50\times10^8}} \approx 5.78\times10^3 \quad (\mathrm{K})$$

(2) 设地球表面被冰雪覆盖部分的比例为 η，则有

$$\Phi_A = \pi R_e^2[(1-\alpha_1)\eta+(1-\alpha_2)(1-\eta)]I$$
$$= \pi[(1-\alpha_1)\eta+(1-\alpha_2)(1-\eta)]\frac{R_e^2R_s^2}{d^2}\sigma T_s^4$$

平衡时，

$$4\pi R_e^2(1-\beta)\sigma T_E^4 = \pi[(1-\alpha_1)\eta+(1-\alpha_2)(1-\eta)]\frac{R_e^2R_s^2}{d^2}\sigma T_s^4$$

解得

$$\eta = \frac{1-\alpha_2-\dfrac{4(1-\beta)d^2T_E^4}{R_s^2T_s^4}}{\alpha_1-\alpha_2}$$

【例 1.31】(第 25 届全国中学生物理竞赛复赛试题) 在地面上方垂直于太阳光的入射方向，放一半径 $R=0.10$ m、焦距 $f=0.50$ m 的薄凸透镜，在薄凸透镜下方的焦平面上放置一黑色薄圆盘(圆盘的中心与透镜的焦点重合)，于是可以在黑色圆盘上形成太阳的像(图 1.40)。已知黑色圆盘的半径是太阳像的半径的 2 倍。圆盘的导热性极好，圆盘与地面之间的距离较大。对太阳而言，取其温度 $T_s=5.50\times10^3$ ℃。大气对太阳能的吸收率为 $\alpha=0.40$。又设黑色圆盘对照射到其上的太阳能全部吸收，同时圆盘也按斯特藩-玻尔兹曼定律向外辐射能量。如果不考虑空气的对流，也不考虑杂散光的影响，试问薄圆盘达到稳定状态时可能达到的最高温度为多少摄氏度？

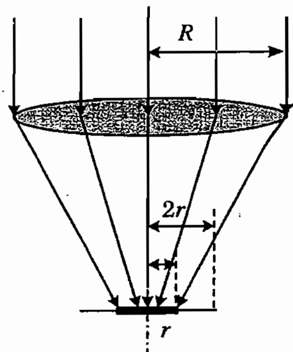


图 1.40 例 1.31 中的装置

解 通过透镜并被圆盘吸收的光通量(即光功率)为

$$\Phi_A = (1-\alpha)I\pi R^2$$

其中，$I=\dfrac{4\pi R_s^2\sigma T_s^4}{4\pi d^2}$。圆盘热辐射的通量为 $\Phi_R = 2\times(\pi 2r)^2\sigma T^4$，平衡时，

$$(1-\alpha)\frac{4\pi R_s^2\sigma T_s^4}{4\pi d^2}\pi R^2 = 2\times(\pi 2r)^2\sigma T^4$$

因此

$$T^4 = \frac{(1-\alpha)}{8}\left(\frac{R_s}{rd}\right)^2R^2T_s^4$$

如图 1.40 所示，太阳经透镜成像，物距为太阳到地球的距离 d。由于 $d\gg f$，所以像距即为焦距

f。从而成像时的横向放大率为$\frac{r}{R_s}=\frac{f}{d}$，即$\frac{R_s}{rd}=\frac{1}{f}$。于是

$$T^4 = \frac{(1-\alpha)}{8}\left(\frac{R}{f}\right)^2 T_s^4$$

即

$$T = \sqrt[4]{\frac{1-\alpha}{8}}\sqrt{\frac{R}{f}}T_s = \sqrt[4]{\frac{1-0.4}{8}}\sqrt{\frac{0.1}{0.5}}\times 5.77\times 10^3 \approx 1.35\times 10^3 \quad (\text{K})$$

【例 1.32】 设有两个内表面为完全反射面的空腔，开有直径相同的小孔，孔径为 1.0 cm，两小孔的平行面相对，小孔间的距离为 10 cm。若维持空腔 1 中的温度为 1 700 K，试计算出空腔 2 中的温度。

解 由于两空腔的孔径与距离相比并不是很小，所以不能认为向各个方向的辐射相等，这是一个余弦辐射体。如图 1.41 所示，若记空腔 1 沿轴向在空腔 2 开口处的光强(即辐射的功率密度)为 I_0，则在以空腔 1 开口的中心为圆心、以两孔距离为半径的半球面 S 上，沿 θ 方向的光强为$I(\theta)=I_0\cos\theta$。可求出通过此半球面的辐射通量为

$$\iint_S I\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0\cos\theta\sin\theta l^2\mathrm{d}\theta = I_0\pi l^2$$

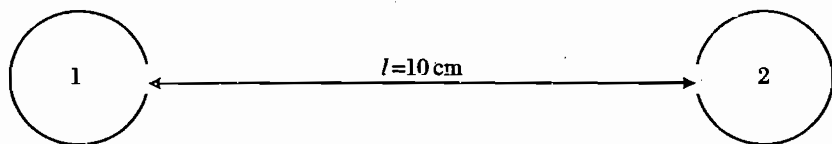


图 1.41 例 1.32 中的装置

由于从空腔 1 开口辐射的通量为 $\sigma T_1^4 S$，所以有 $\sigma T_1^4 S = I_0\pi l^2$。由此解得

$$I_0 = \frac{\sigma T_1^4 S}{\pi l^2}$$

进入空腔 2 的通量为

$$I_0 S = \frac{\sigma T_1^4 S^2}{\pi l^2}$$

而空腔 2 的辐射通量为 $\sigma T_2^4 S$，于是

$$\frac{\sigma T_1^4 S^2}{\pi l^2} = \sigma T_2^4 S$$

解得

$$T_2 = \sqrt[4]{\frac{S}{\pi l^2}}T_1 = \sqrt[4]{\frac{\pi d^2}{4\pi l^2}}T_1 = \sqrt{\frac{d}{4l}}T_1 = 400\ \text{K}$$

第 2 章　物态及物态变化

物质都是由原子构成的。虽然自然界中稳定原子的种类是有限的，但物质的种类却几乎是无限的，而且，在不同的物理条件下，每一种物质可以具有不同的物理形态。例如，水除了液态之外，还有固态（冰）、气态（水蒸气）；多数金属常温下是固态，受热后熔解为液态，温度更高时蒸发为气态；气态金属是由原子组成的，若温度进一步升高，则成为等离子态，电子从其中游离出来，原子成为正离子，这两种组分的电荷数量相等（恒星是由炽热气体所构成的，其中的物质大多处于等离子态）。

固态、液态、气态和等离子态是自然界中物质稳定存在的形态，也称作物态。所谓物态，是指物质存在的宏观形态。

2.1　固　　态

固态物质（固体）具有一定的几何形状，不像液体和气体那样具有流动性；固体也具有一定的硬度，不像液体和气体那样容易被压缩或改变体积。

从微观结构上看，构成固体的粒子（原子、分子等）之间的距离较小，因而这些粒子之间以稳定的化学键（离子键、共价键、金属键）相结合，具有较强的相互作用力，从而形成稳定的结构。在固态中，所有原子、分子都被束缚在一个极小的空间范围内，不能任意运动，而只能在各自的平衡位置附近做有限幅度的振动。因而，固体能够保持一定的几何形状。从固体中的原子、分子之间的相互作用力分析，当它们之间的距离大于平衡距离时，相互间的吸引力增大，距离小于平衡距离时，相互间的排斥力增大，因而，固体具有一定的机械强度，在一定的外力作用下，仍尽可能保持原有的体积，不太容易被拉伸或压缩。

根据固体的外观和微观结构，可以将其分为**晶体**、**非晶体**和**准晶体**。

2.1.1　晶体

晶体无论大小都有规则的外形，这种宏观表现是由原子或分子在空间做规则排列而形成的，这种规则排列称作**长程有序**，可以用原子、分子在空间的周期性或对称性来描述。

1. 晶体的空间结构

例如，金属铜具有面心立方结构（图 2.1），金属钠具有体心立方结构（图 2.2）。而金刚石的结构如图 2.3 所示，它其实是由两套相同的面心立方结构沿着立方体的对角线移动 1/4 对角线长度所形成的嵌套结构，这种结构也称作金刚石结构。同一种原子也可以形成具有不同的空间的晶体。例如，碳既可以形成立方的金刚石结构，也可以形成平面六角的石墨结构；在常压下，α 铁（熔

点为 912 ℃)具有体心立方结构,γ 铁(熔点为 1 394 ℃)具有面心立方结构,δ 铁(熔点为1 538 ℃)具有体心立方结构。若压强达到 10^{10} Pa,则 α 铁转变成具有六角密排结构的 ε 铁(图 2.4)。

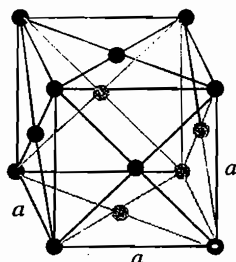


图 2.1 面心立方结构

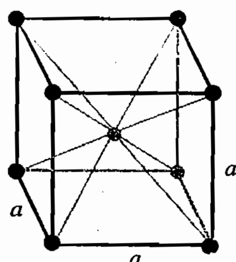


图 2.2 体心立方结构

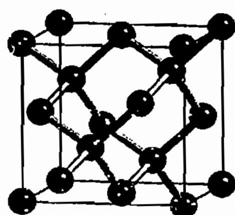


图 2.3 金刚石结构

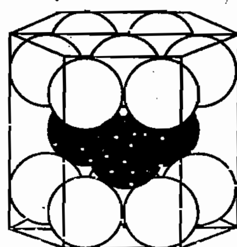


图 2.4 六角密排结构

除单质外,更多的是化合物所构成的晶体。例如,氯化铯晶体具有简单的立方结构,其中的氯原子和铯原子各自构成同样的立方结构,而一种原子处于另一种原子的立方体的中心,如图 2.5 所示;氯化钠晶体中,两种原子各自构成相同的面心立方结构,如图 2.6 所示。

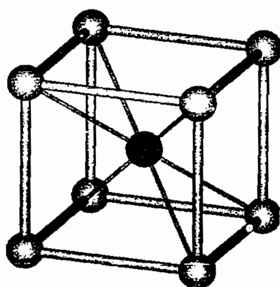


图 2.5 氯化铯晶体

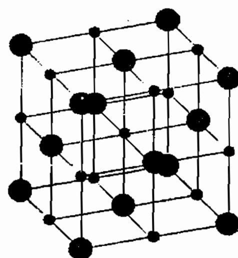


图 2.6 氯化钠晶体

2. 空间点阵

晶体的周期性空间结构可以用三维格子加以描述,其中的每一个格点代表真实晶体的一个基本结构单元。若是单质构成的晶体,每个格点代表一个原子;若是化合物构成的晶体,每个格点代表一组原子。例如上述氯化铯晶体中的一个氯原子和一个铯原子,或氯化钠晶体中的一个氯原子和一个钠原子。这样构成的空间格子称作**晶格**,或晶体的**空间点阵**。

【例 2.1】 已知金属钠具有体心立方结构,密度为 0.968 g/cm³,金属铜具有面心立方结构,密度为 8.96 g/cm³。据此分别计算其中钠原子之间、铜原子之间的最小距离。

解 钠的原子量为 23,即 23 g/mol,每一个体心立方晶格中包含两个原子。设该立方体的

边长为 a，则其体积为 $V=a^3$，质量为 $M=2\times A/N_A$，其中 A 为摩尔质量，N_A为阿伏伽德罗常数，因此其质量密度为 $\rho=M/V=2\times\frac{A}{N_A a^3}$，立方体的边长为

$$a=\sqrt[3]{\frac{2A}{\rho N_A}}=\sqrt[3]{\frac{2\times 23}{0.968\times 6.02\times 10^{23}}}\approx 4.3\times 10^{-8}(\text{cm})=0.43(\text{nm})$$

所以钠原子间的最小距离为 $\sqrt{3}a/2=0.37\ (\text{nm})$。

铜的原子量为 63.5，即 63.5 g/mol，对具有面心立方结构的铜而言，$\rho=\frac{M}{V}=4\times\frac{A}{N_A a^3}$，立方体的边长为

$$a=\sqrt[3]{\frac{4A}{\rho N_A}}=\sqrt[3]{\frac{4\times 63.5}{8.96\times 6.02\times 10^{23}}}=3.6\times 10^{-8}(\text{cm})=0.36\ (\text{nm})$$

所以铜原子间的最小距离为 $\sqrt{2}a/2=0.26\ (\text{nm})$。

对于具有面心立方结构的 γ 铁，

$$a=\sqrt[3]{\frac{4A}{\rho N_A}}=\sqrt[3]{\frac{4\times 55.8}{7.86\times 6.02\times 10^{23}}}=3.6\times 10^{-8}(\text{cm})=0.36\ (\text{nm})$$

如果认为晶体中的原子是密排的，则可以将原子之间的距离作为原子的直径。根据上面的计算结果，可以看出不同原子的半径的数值是非常接近的。

3. 晶体的熔点

由于晶体中的原子具有空间周期性，所以构成晶体的原子之间、分子之间都有相同的化学键。随着温度的升高，原子、分子的振动能量也相应增大，当温度升高到一定程度时，振动的能量足以克服束缚能，从而使化学键受到破坏，晶体从固态变为液态，这一过程就是熔解。由于晶体中的化学键都是相同的，且在相同的条件下被破坏，所以每种晶体具有特定的熔点。

2.1.2 非晶态

多数固体以非晶态存在。非晶态固体中，虽然原子、分子之间仍以各种化学键紧密地结合，但由于原子、分子的排列没有周期性，所以这些化学键并不完全相同，因而非晶体并没有规则的几何形状，也没有固定的熔点。

2.1.3 准晶态

这是一种介于晶态和非晶态之间的固态。在一个比较小的空间区域内，原子、分子做周期性的规则排列，具有晶体的特征，这种情形称作是短程有序的。但是，在较大的空间区域中，各部分的排列却是无规的，因而不像晶体那样为长程有序的。

2.1.4 固体的热膨胀

物体都有热胀冷缩现象。受热后，固体中的原子、分子具有较大的动能，在平衡位置附近振动的振幅会增大，从而导致原子、分子间的距离增大。从宏观上看，固体的线度和体积都会随着温度的升高而增加，这就是固体的**热膨胀**。

固体沿某一方向线度的膨胀称作线膨胀，体积的膨胀称作体膨胀。实验研究表明，在有限的温度区间中，固体的线膨胀和体膨胀都与温度的变化成正比，所以可以定义线膨胀系数和体

膨胀系数。

1. 线膨胀系数

记固体在某一方向上原来的长度为 l_0，温度变化 ΔT 所引起的在该方向的长度的改变量为 Δl，则有

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta T$$

其中，α 称作线膨胀系数. 由此得 $\alpha = \dfrac{\Delta l}{l_0 \Delta T}$。

2. 体膨胀系数

记固体原来的体积为 V_0，温度变化 ΔT 所引起的体积的改变量为 ΔV，则有

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta T$$

其中，β 称作线膨胀系数. 由此得 $\beta = \dfrac{\Delta V}{V_0 \Delta T}$。

【例 2.2】 证明：固体的体膨胀系数与线膨胀系数间的关系为 $\beta = 3\alpha$。

解 不妨以立方体为例来证明。

设固体在 x, y, z 方向的线度分别为 x_0, y_0, z_0。若温度改变 ΔT，上述方向上长度的改变分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$，则有

$$\Delta x = \alpha x_0 \Delta T, \quad \Delta y = \alpha y_0 \Delta T, \quad \Delta z = \alpha z_0 \Delta T$$

膨胀后的体积为

$$\begin{aligned} V &= (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)(z_0 + \Delta z) \\ &= x_0 y_0 z_0 + x_0 y_0 \Delta z + y_0 z_0 \Delta x + z_0 x_0 \Delta y + x_0 \Delta y \Delta z \\ &\quad + y_0 \Delta z \Delta x + z_0 \Delta x \Delta y + \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

由于 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 本身就是小量，所以上式可写为

$$\begin{aligned} V &\approx x_0 y_0 z_0 + x_0 y_0 \Delta z + y_0 z_0 \Delta x + z_0 x_0 \Delta y \\ &= x_0 y_0 z_0 + x_0 y_0 z_0 \alpha \Delta T + x_0 y_0 z_0 \alpha \Delta T + x_0 y_0 z_0 \alpha \Delta T \\ &= V_0 + 3\alpha V_0 \Delta T \\ &= V_0 + \Delta V \end{aligned}$$

即 $\Delta V = 3\alpha V_0 \Delta T = \beta V_0 \Delta T$，所以 $\beta = 3\alpha$。

表 2.1 中列出了一些物体的线膨胀系数。

表 2.1 一些固体材料的线膨胀系数

材料	α(×10⁻⁶/K)	材料	α(×10⁻⁶/K)	材料	α(×10⁻⁶/K)	材料	α(×10⁻⁶/K)
铍	12.3	镍	13.0	锗	6.0	金刚石	1.3
镁	26.0	铜	17.5	钨	4.5	石墨	2.0
铝	23.2	黄铜	18.4	锑	10.5	普通玻璃	7.1
钛	10.8	镉	41.0	铅	29.3	窗玻璃	7.6
铬	6.2	锡	26.7	银	19.5	石英玻璃	0.5
锰	23.0	钼	5.2	金	14.2	花岗岩	3.0
铁	12.2	锌	36.0	铂	9.0	水泥	6~14

【例 2.3】(第 1 届全国中学生物理竞赛预赛试题)　钢尺 A、钢尺 B 和一段角钢是用同样的材料制成的。钢尺 A 在 20 ℃使用时是准确的,钢尺 B 在 −30 ℃使用时是准确的。

(1) 用这两把尺子在 −30 ℃的野外去测量上述角钢的长度,比较测量所得读数的大小;

(2) 在 20 ℃温度下,用这两把尺子分别去测量角钢的长度,比较测量所得读数的大小。

解　(1) −30 ℃时,钢尺 A 的刻度小于实际值,而钢尺 B 的刻度等于实际值,所以 A 的读数比 B 的大。

(2) 20 ℃时,钢尺 A 的刻度等于实际值,而钢尺 B 的刻度大于实际值,所以 A 的读数比 B 的大。

从上述分析可见,由于钢尺 A 校准的温度高于钢尺 B 的,在同一温度下,钢尺 A 的刻度比钢尺 B 的要短,因而测量同一物体时,A 的读数总是大于 B 的读数。

2.2 液　　态

液态物质具有流动性,在外力作用下,形状往往与容器有关,不能保持一定的几何外形,说明液体中的分子之间的键联较弱。但液体也不容易被外力压缩,能够保持一定的体积,说明原子或分子之间的间隔较小。

液态物质的原子、分子之间主要依靠范德瓦耳斯键相连接,范德瓦耳斯键是依靠范德瓦耳斯力而建立的,范德瓦耳斯力是中性的分子或原子中由内部运动所引起的正负电荷中心瞬间不重合而引起的静电相互作用,作用力较弱,且没有方向性。因而液体的分子或原子之间虽然距离很短,靠得很近,但原子之间、分子之间的相对位置并不固定,从而导致液体具有流动性,同时,液体中的分子、原子也容易从表面逸出,成为游离态,这就是液体的蒸发。

在常温常压下,绝大多数液体都是化合物,单质只有汞和溴。很多气体在一定的压强和温度条件下可以被液化。

【例 2.4】(第 8 届全国中学生物理竞赛预赛试题)有人曾用图 2.7 所示的装置测量液体的体膨胀系数。A,B 为粗细均匀的 U 形细玻璃管,竖直放置,两臂分别插在恒温器 C(较热的)和 D(较冷的)内。U 形管内盛有适量的待测液体。通过测量 C,D 内的温度和 U 形管两臂内液面的高度,就可以计算出待测液体的体膨胀系数,试导出计算公式。(不计玻璃管的热膨胀。)

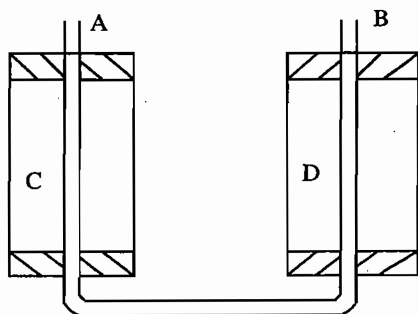


图 2.7　例 2.4 中的装置

解　设恒温器 C,D 的温度分别为 T_1,T_2,管中液柱的高度分别为 h_1,h_2。水平部分管中液体的密度为 ρ,温度为 T。由于温度升高,一定量物质的体积膨胀,密度下降。

由于 $V=V_0[1+\beta(T-T_0)]$,所以

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{V_0[1+\beta(T-T_0)]}=\frac{\rho_0}{1+\beta(T-T_0)}$$

平衡时，两段直管中的液柱所产生的压强相等，$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$，即

$$\frac{h_1}{1+\beta(T_1-T_0)} = \frac{h_2}{1+\beta(T_2-T_0)}$$

上式对任意的温度 T_0 都成立，所以不妨取 $T_0 = 0\,℃$，于是

$$\frac{h_1}{1+\beta T_1} = \frac{h_2}{1+\beta T_2}$$

解得

$$\beta = \frac{h_1-h_2}{h_2 T_1 - h_1 T_2}$$

2.2.1 液体的表面张力

液体中的任何一个分子都受到其周围分子的范德瓦耳斯力的作用。处于内部的分子，在各个方向上所受到的力是均衡的，因而其合外力为零，处于受力的平衡态。而处在液体表面的分子，只受到液体内部和表面分子的作用力，如图 2.8 所示。如果液体表面的另一侧是空气或其他液体，其中的分子当然也会受到表面的另一侧其他物质分子的作用力。显然，另一侧分子的引力要小，所以表面的分子受到的合力指向液体内部，都有向液体内部收缩的趋势。然而，表面分子一旦向液体内部运动，由于其与内部近邻的分子之间的距离减小，两者之间的静电斥力又会增大，表面分子就处在力学平衡状态。

尽管处在平衡态，但液体表面分子之间的引力较大，因而使得这一层分子较紧密地结合，形成一个具有一定弹性的薄膜，整个薄膜有向液体内部收缩的趋势，同时在表面上的任何一条线都受到向两侧的拉力，这就是液体的表面张力，如图 2.9 所示。

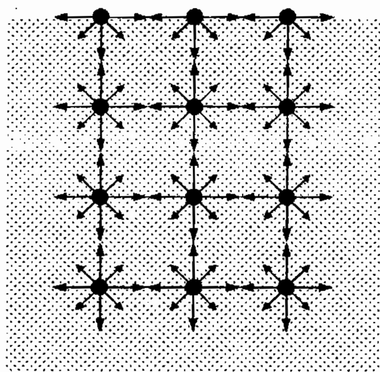


图 2.8　液体内部分子的受力与表面分子的受力

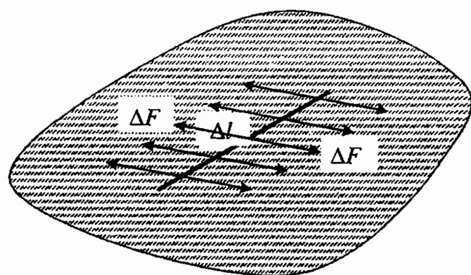


图 2.9　液体的表面张力

实验表明，表面张力的大小与液体的种类、液面两侧的物质的种类、环境温度等因素有关。张力的大小还与上述线的长度有关。液面上一段长度为 Δl 的线段所受到的表面张力可表示为

$$\Delta F = \sigma \Delta l \tag{2.1}$$

其中，σ 称作表面张力系数，表示液面上单位长度线段的表面张力。

一些常见的液体在空气中的表面张力系数如表 2.2 所示。

表 2.2　一些液体的表面张力系数

液体	表面张力系数 ($\times 10^{-3}$ N/m)	液体	表面张力系数 ($\times 10^{-3}$ N/m)	液体	表面张力系数 ($\times 10^{-3}$ N/m)
水	72.75	汞	476	聚乙烯	36.1
乙醇	22.55	n-己烷	18.4	聚四氟乙烯	22.5
甲醇	22.60	n-戊烷	16.0	聚醚酮	46.0
丙酮	23.3	苯	28.9		

若拉伸液体表面，则需要克服表面张力而做功。若液面被拉伸的长度为 Δx，则做的功为

$$\Delta W = \Delta F \Delta x = \sigma \Delta l \Delta x = \sigma \Delta S \tag{2.2}$$

其中，ΔS 为液体增大的表面积。由此可见，表面张力系数 σ 等于增加单位面积过程中所做的功。若在液面被拉伸的过程中保持温度不变，则液体及其表面的内能不变，做功使液体的表面自由能增大，于是表面张力系数 σ 也等于液体增加单位表面积所增加的表面自由能。表面自由能是一种机械能，由于表面相当于一层弹性薄膜，具有收缩而使表面积变小的趋势，所以表面自由能就是存储于表面的使液面收缩的能量。

如果将一根细丝浸入肥皂液中，可以拉起一段肥皂膜。这样的膜与皂液表面的膜不同，它有两个表面，每一个表面都有张力，因而细丝所受到的拉力为

$$\Delta F = 2\sigma \Delta l \tag{2.3}$$

2.2.2　表面张力引起的压强

表面张力都是沿着表面的切向的，因而，平直的液面不会由于表面张力产生额外的压强。但是，若液面是弯曲的，则会产生指向曲率中心一侧的压强。

压强是单位面积上的正压力，为了计算任意形状表面的压强分布，不妨在表面上 M 点附近取一个很小的区域 $ABCD$，M 点处的法线为 $\boldsymbol{n}$（图 2.10）。由于这是一个任意形状的空间曲面，所以曲面上过 M 点的各条曲线的曲率一般是不相等的，即通过上述法线的平面与曲面的交线的曲率不相等。但是，可以证明，对于一个足够小的曲面，其平均曲率是确定的。对于任意一对过法线且相互垂直的平面，如果它们与曲面交线的曲率半径分别是 R_1，R_2，则 M 点处的平均曲率 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ 是定值。可以根据这一性质计算弯曲液面的表面张力引起的压强。

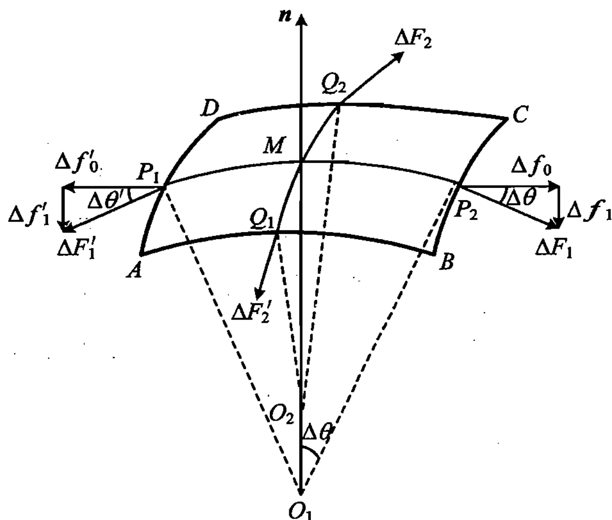


图 2.10　弯曲液面的表面张力所引起的压强

在图 2.10 中，记一对过法线的正交平面与小曲面相交形成的圆弧分别为 $\overset{\frown}{P_1MP_2}$ 和 $\overset{\frown}{Q_1MQ_2}$，这两段圆弧的中心都在法线的反向延长线上，分别记为 O_1 和 O_2。记 $\overset{\frown}{P_1MP_2}$，$\overset{\frown}{Q_1MQ_2}$ 的圆心角分别为 $2\Delta\theta$，$2\Delta\varphi$，BC 段的表面张力为 ΔF_1，ΔF_1 沿圆弧 $\overset{\frown}{P_1MP_2}$ 的切线方向，沿法线方向的分力为 $\Delta f_1 = \Delta F_1\Delta\theta = \sigma\,\overline{BC}\,\Delta\theta$。同理，$AD$ 段沿法线方向的分力为 $\Delta f'_1 = \Delta F'_1\Delta\theta = \sigma\,\overline{AD}\Delta\theta$。对一个足够小的区域而言，$\overline{BC} = \overline{AD} = \overline{Q_1Q_2} = 2R_2\Delta\varphi$。

BC 段和 AD 段表面张力引起的沿法线方向的分力为 $\Delta f_1 + \Delta f'_1 = 2\sigma\,\overline{Q_1Q_2}\Delta\theta$。

AB 段和 CD 段表面张力引起的沿法线方向的分力为 $\Delta f_2 + \Delta f'_2 = 2\sigma\,\overline{P_1P_2}\Delta\varphi$。

区域 $ABCD$ 的面积为 $\Delta S = \overline{P_1P_2}\times\overline{Q_1Q_2} = 4R_1R_2\Delta\theta\Delta\varphi$，所以 M 点的压强为

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\Delta f_1 + \Delta f'_1 + \Delta f_2 + \Delta f'_2}{\Delta S} \\
&= \frac{2\sigma\,\overline{Q_1Q_2}\Delta\theta + 2\sigma\,\overline{P_1P_2}\Delta\varphi}{4R_1R_2\Delta\theta\Delta\varphi} \\
&= \sigma\left(\frac{\overline{Q_1Q_2}}{2\Delta\varphi R_2R_1} + \frac{\overline{P_1P_2}}{2\Delta\theta R_1R_2}\right) \\
&= \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)
\end{aligned}
$$

即

$$
p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{2.4}
$$

对于球形液面，$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$，表面张力引起的压强为

$$
p = \frac{2\sigma}{R} \tag{2.5}
$$

对于液体形成的球形空泡，由于它具有内外两个表面，每个表面都产生压强，所以空泡的压强为

$$
p = \frac{4\sigma}{R} \tag{2.6}
$$

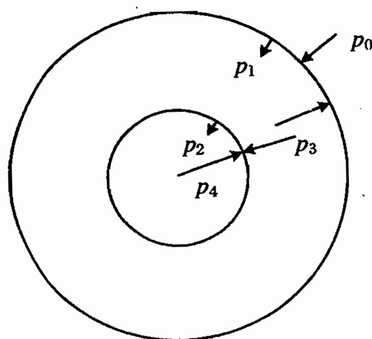


图 2.11　例 2.5 中的肥皂泡

【例 2.5】 设大肥皂泡里有一个小肥皂泡，大泡的半径是小泡的 10 倍。若将它们从空气中转移至真空中，发现大气泡的半径增大 1 倍，问小气泡的半径如何变化？（不计气泡所受的重力。）

解 气泡由于表面张力会产生指向球内侧的压强。本题中，设膨胀前后大气泡的半径分别为 R，R'，小气泡的半径分别为 r，r'。按题意，$R = 10r$。

如图 2.11 所示，膨胀之前，大、小气泡由液面弯曲产生的压强分别为

$$
\begin{cases}
p_1 = \dfrac{4\sigma}{R} \\[2ex]
p_2 = \dfrac{4\sigma}{r}
\end{cases}
$$

记大气压强为 p_0，两气泡间空气的压强为 p_3，小气泡内空气的压强为 p_4。平衡条件为

$$\begin{cases} p_0 + p_1 = p_3 \\ p_2 + p_3 = p_4 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} p_0 + \dfrac{4\sigma}{10r} = p_3 & (2.7) \\ \dfrac{4\sigma}{r} + p_3 = p_4 & (2.8) \end{cases}$$

在真空中，两气泡间空气的压强为 p_3'，小气泡内空气的压强为 p_4'。平衡条件为

$$\begin{cases} p_1' = p_3' \\ p_2' + p_3' = p_4' \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{4\sigma}{20r} = p_3' & (2.9) \\ \dfrac{4\sigma}{r'} + p_3' = p_4' & (2.10) \end{cases}$$

气泡内的气体等温膨胀，于是有

$$\begin{cases} p_3 r^3(10^3 - 1) = p_3'(20^3 r^3 - r'^3) & (2.11) \\ p_4 r^3 = p_4' r'^3 & (2.12) \end{cases}$$

由于大小气泡的半径相差 9 倍，所以必有 $r^3 \gg r'^3$。式(2.11)可写为$10^3 p_3 r^3 = 20^3 p_3' r^3$，即 $p_3 \approx 8p_3'$，代入式(2.9)，可得

$$p_3 = 8p_3' = \frac{8\sigma}{5r} \tag{2.13}$$

代入式(2.7)，解得 $p_0 = 6\sigma/(5r)$。

再由式(2.10)和(2.12)，可得

$$p_4 = \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \left(\frac{4\sigma}{r'} + \frac{\sigma}{5r}\right) \tag{2.14}$$

将式(2.13)和(2.14)代入式(2.8)，可得

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^3 \left(\frac{4\sigma}{r'} + \frac{\sigma}{5r}\right) = \frac{4\sigma}{r} + \frac{8\sigma}{5r}$$

即

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^3 \left(\frac{4r}{r'} + \frac{1}{5}\right) = \frac{28}{5}$$

利用逼近法，可得到 $r'/r \approx 1.15$。

2.2.3 液体与固体表面之间的附着力

当液体与固体接触时，固体表面处的分子与液体的分子之间也存在相互吸引的作用力，这种吸引力称作附着力。相应地，液体分子之间的相互吸引力称作内聚力。

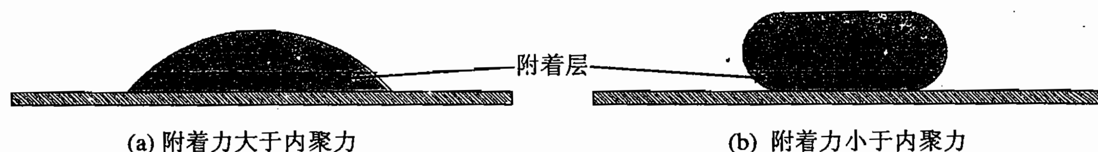
在附着层内的液体分子，既受到附着力的作用，又受到内聚力的作用。附着力使液体分子存在与固体接触的趋势，内聚力使液体分子存在与固体脱离的趋势。除此之外，液体分子还受到液体内部压力（这样的压力是由大气压和重力引起的，因而不能单独考虑重力）的作用以及弯

曲液面所产生的压强。若附着力大于内聚力，接触面的分子有脱离液体的趋势；反之，若内聚力大于附着力，接触面的分子有脱离固体的趋势。除附着力和内聚力之外，还有表面张力的压强和压力的作用。这些力共同作用的结果，使得液体与固体的接触面呈现不同的形状。以下针对不同的情形进行分析。

1．水平面上的液滴

(1) 附着力大于内聚力

在附着力的作用下，液体的分子会尽可能地与固体相接触，结果使液体在固体表面上铺开。对于一定量的液体，高度减小，其底部所受的压强也减小，使得斜向上的表面张力与向下的附着力和压力相平衡，则液滴维持一定的形状和大小，如图 2.12(a)所示。



(a) 附着力大于内聚力　　(b) 附着力小于内聚力

图 2.12　水平固体表面上的液滴

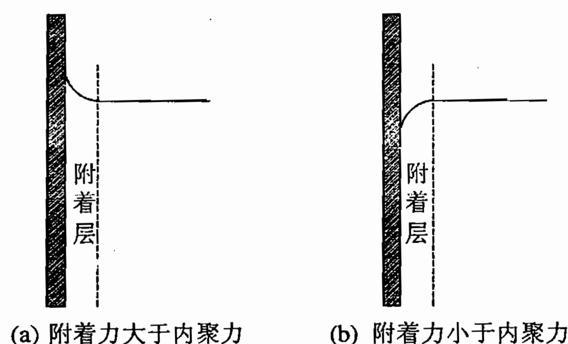
(2) 附着力小于内聚力

在附着力的作用下，液体表面处的分子会尽可能脱离与固体的接触，但同时受到内部压强的作用，从而形成如图 2.12(b)所示的形状。

2．竖直平面上的液体

(1) 附着力大于内聚力

由于受到指向固体的作用力，附着层中的液体分子受到挤压，处在液体表面的分子会受到向上的作用力，沿着固体表面向上移动，移动到一定程度，所受到的液体的表面张力向下并与之平衡，从而导致在固体表面附近形成一个向上弯曲的液面，如图 2.13(a)所示。



(a) 附着力大于内聚力　　(b) 附着力小于内聚力

图 2.13　竖直固体表面上的液体

(2) 附着力小于内聚力

由于受到指向液体的作用力，附着层中靠近液体表面的分子脱离固体表面，而距表面稍远的分子由于液体压强的作用，脱离程度要小一些，但因受到液体压强的作用，仍与固体表面接触，从而在固体表面附近形成一个向下弯曲的液面，如图 2.13(b)所示。

2.2.4　浸润

当附着力大于内聚力时，液体被吸附在固体表面，两者之间有尽可能大的接触面，这种现象称作浸润(也称作润湿)。反之，若内聚力大于附着力，液体不能被吸附在固体表面，两者之间有尽可能小的接触面，这种现象称作不浸润(也称作不润湿)。例如，水滴可以吸附在玻璃、金属、塑料、木材等物体的表面，即水可以浸润这些物体；而水银在这些物体的表面上会凝聚成球形并到处滚动，说明水银不浸润这些物体。

在生活中，有时需要利用浸润。例如书写时，墨水浸润纸张而使字迹得以保留；未脱脂的棉花不能被水浸润，脱脂后的棉花可以被水浸润。有时需要避免浸润。例如，炊具内表面的特氟龙涂层使得油、水、食物不会粘在锅上；在金属部件的表面涂油脂，油脂浸润在金属表面，而水不浸润油脂，这样可起到防锈的效果；木制家具喷涂油漆，利用水的不浸润性质起到防潮、防腐的效果。

2.2.5 接触角

无论液体与固体浸润与否，在接触部分，液体的表面与固体的表面之间都会形成一个夹角，两个表面的切线之间的夹角称作接触角。从图 2.14 中可以看出，浸润时，接触角 $\theta<\pi/2$；不浸润时，接触角 $\theta>\pi/2$。

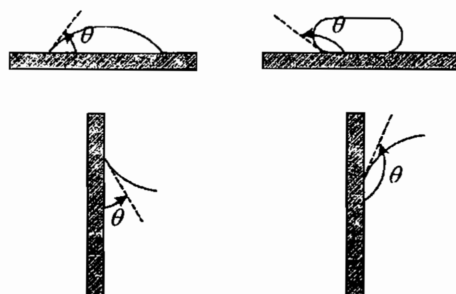


图 2.14　浸润与不浸润时的接触角

2.2.6 毛细现象

毛细管是指内径很细（当然比毛发要粗得多）的管子（内部通常为圆柱形）。进入毛细管内部的液体，如果浸润内壁，则靠近管壁的液面将会升高；如果不浸润内壁，则靠近管壁的液面将会降低。上述现象就是**毛细现象**。

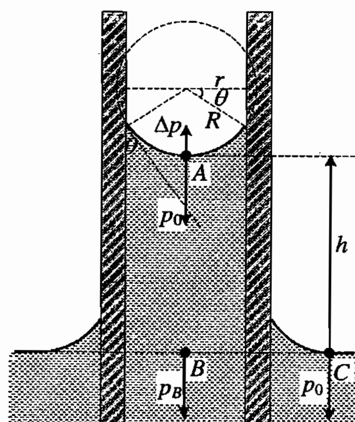


图 2.15　毛细现象产生原因的分析

由于毛细管的内径较小，可以近似地认为管内的液面为球面。如图 2.15 所示，设球面半径为 R，细管内径为 r，接触角为 θ，则

$$R=\frac{r}{\cos\theta}$$

由于液面弯曲，表面张力产生指向球面曲率中心的压强为

$$\Delta p=\frac{2\sigma}{R}$$

设大气压强为 p_0，则在液面底部 A 点处的压强为

$$p_A=p_0-\Delta p$$

而在液体内部的 B 点处，计入液面质量以及表面张力，则其压强为

$$p_B=p_A+\rho gh=p_0+\rho gh-\Delta p$$

易知 B 点处的压强与管外同一高度处液体的压强是相等的。设 B 点与管外液面的高度相等，则 B 点处的压强与管外液体表面上 C 点处的压强相等，而 C 点处的压强等于大气压强，即 $p_B=p_0$，于是有

$$p_0=p_0+\rho gh-\Delta p$$

从而得到

$$h=\frac{\Delta p}{\rho g}=\frac{2\sigma}{\rho gR}=\frac{2\sigma\cos\theta}{\rho gr}\tag{2.15}$$

h 就是毛细管中的液面与管外液面的高度差。

从式(2.15)中可以看出，液体浸润时，接触角 $\theta<\pi/2$，$h>0$，液面上升；不浸润时，接触角 $\theta>\pi/2$，$h<0$，液面下降（图 2.16）。

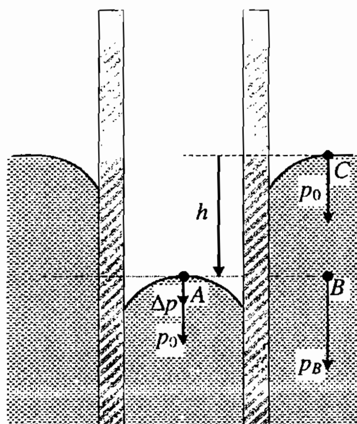


图 2.16　不浸润时的毛细现象

【例 2.6】　如图 2.17 所示，向内径为 $r=0.30$ mm 的毛细管中注水，在管的下端会形成一水滴，其形状可以认为是半径为 $R=3$ mm 的球形的一部分。试求管中水柱的长度。(已知水的表面张力系数为 $\sigma=7.3\times10^{-2}$ N/m。)

解　对于水柱的上端，认为水与管壁完全浸润，接触角 $\theta=0$，液面曲率半径为 r。受大气压以及液面弯曲产生的压强的作用，总压强为

$$p_1 = p_0 - \frac{2\sigma}{r}$$

对于水柱的下端，向上的压强是大气压以及弯曲液面的压强，其值为

$$p = p_0 + \frac{2\sigma}{R}$$

向下的压强是水柱重力的压强与水柱上端的压强之和，其值为

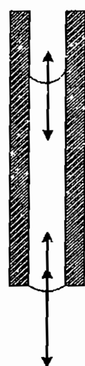
$$p_2 = p_1 + \rho g h = p_0 - \frac{2\sigma}{r} + \rho g h$$

平衡时，$p=p_2$，即

$$p_0 + \frac{2\sigma}{R} = p_0 - \frac{2\sigma}{r} + \rho g h$$

从而可得

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) = 5.5\times10^{-3}\quad(\text{m})$$


图 2.17　毛细管

【例 2.7】　图 2.18 中，两铅垂玻璃的平板部分浸入水中，设其间距为 $d=0.50$ mm，问两板间水面上升的高度为多少？(接触角可视为 0，水的表面张力系数为 $\sigma=7.3\times10^{-2}$ N/m。)

解　两平板间的水面是圆柱面，而非球面。由于接触角为 0，所以水面上两相互垂直的正截口的曲率半径可取作

$$R_1 = \frac{d}{2},\quad R_2 = \infty$$

因而由水面弯曲所产生的压强为

$$p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2\sigma}{d}$$

于是水面上升的高度为

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{2\sigma}{\rho g d} = 3.0\times10^{-2}\quad(\text{m})$$

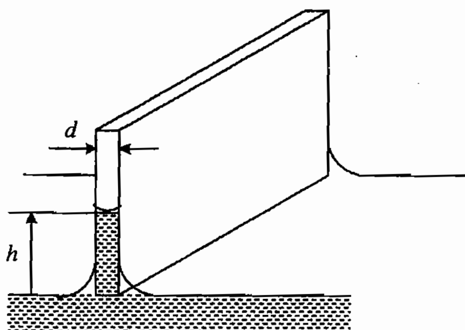


图 2.18　例 2.7 中的玻璃平板

【例 2.8】　设玻璃管的内径为 $d=2.0\times10^{-5}$ m，长为 $l=0.20$ m，垂直插入水中，管的上端是封闭的，问插入水中的那一段的长度是多少，才能使管内外的水面持平？(已知大气压强为 1.013×10^5 Pa，接触角可视为 0，水的表面张力系数为 $\sigma=7.3\times10^{-2}$ N/m。)

解　设露出水面部分玻璃管的长度为 h，则管中空气柱的长度由 l 变为 h。根据气体状态

方程，并认为这是一个等温过程，则有

$$phS = p_0 lS, \quad 即 \quad p = p_0 \frac{l}{h}$$

管中水面的压强为

$$p_1 = p_0 \frac{l}{h} - \frac{4\sigma}{d}$$

管内外水面持平时，$p_1 = p_0$，因此

$$p_0 = p_0 \frac{l}{h} - \frac{4\sigma}{d}$$

解得

$$h = \frac{p_0 dl}{4\sigma + p_0 d}$$

所以玻璃管插入水面部分的长度

$$l_1 = l - h = l - \frac{p_0 dl}{4\sigma + p_0 d} = \frac{4\sigma l}{4\sigma + p_0 d}$$
$$= 0.025\,2\,(\mathrm{m}) = 25.2\,(\mathrm{mm})$$

【例 2.9】 设一粗细均匀的玻璃管的内径为 $d = 4.0 \times 10^{-4}$ m，长度为 $l_0 = 0.20$ m，水平地浸在水银中，其中的空气全部留在管子中。若管子在水银中的深度 $h = 0.15$ m 处，问管中空气柱的长度为多少？（已知水银的表面张力系数为 $\sigma = 0.49$ N/m，与玻璃管的接触角为 $\theta = \pi$，大气压强为 $p_0 = 76$ cmHg。）

解 玻璃管所在处的压强为

$$p = p_0 + \rho gh = 91 \text{ cmHg}$$

管中水银液面弯曲产生的压强指向外侧，大小为

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{d} = 4\,900\,(\mathrm{N/m^2}) \approx 3.7\,(\mathrm{cmHg})$$

则管中气体的压强为

$$p_1 = p_0 + \rho gh - \Delta p$$
$$= 91 - \frac{4\sigma}{d} = 87.3 \quad (\mathrm{cmHg})$$

其中空气柱的长度为

$$l = \frac{p_0 l_0}{p_1} = \frac{76 \times 0.20}{87.3} = 0.174\,(\mathrm{m}) = 17\,(\mathrm{cm})$$

【例 2.10】 在内径为 $R_1 = 2.0 \times 10^{-3}$ m 的玻璃管中，插入一半径为 $R_2 = 1.5 \times 10^{-3}$ m 的玻璃棒，两者的轴线重合，求水在管中上升的高度。（已知水的密度为 $\rho = 1.00 \times 10^3$ kg/m³，水与玻璃的接触角 θ 可视为 0，水的表面张力系数为 $\sigma = 7.3 \times 10^{-2}$ N/m。）

解 液面与管内表面接触线的长度为 $l_1 = 2\pi R_1$，则在接触线处，由于表面张力，液体所受到的向上的力为 $f_1 = \sigma l_1 = 2\pi\sigma R_1$。同理，液体与玻璃棒外表面之间的力为 $f_2 = \sigma l_2 = 2\pi\sigma R_2$。这两个力与上升液柱的重力平衡，即

$$f_1 + f_2 = mg$$

易知，液柱的体积为 $\pi(R_1^2 - R_2^2)h$，质量为 $m = \pi(R_1^2 - R_2^2)\rho h$，于是有

$$2\pi\sigma(R_1 + R_1) = \pi(R_1^2 - R_2^2)\rho gh$$

解得

$$h = \frac{2\sigma(R_1 + R_1)}{(R_1^2 - R_2^2)\rho g}$$

$$= \frac{2\sigma}{(R_1 - R_1)\rho g}$$

$$= 1.5 \times 10^2\ \mathrm{m}$$

【例 2.11】 设一长 6 m 的玻璃毛细管的内外径各为 0.5 mm 和 5 mm，将其一半竖直浸入水中。若保持其不动，需要多大的向上的力？（已知玻璃的密度是水的 2 倍，水的表面张力系数为 0.07 N/m，水与玻璃的接触角 θ 可视为 0。）

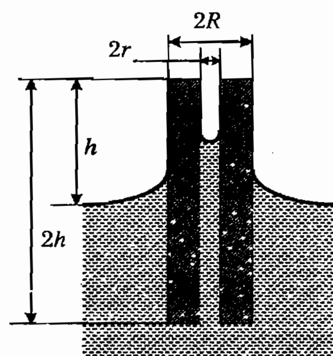


图 2.19 例 2.11 的示意图

解 如图 2.19 所示，由于毛细现象，管中的液面比管外的高，高出管外液面的这一部分液体是在表面张力的作用下而上升的。可算出管内液柱的高度为

$$h_0 = \frac{2\sigma\cos\theta}{g\rho r} = 5.6\ \mathrm{m}$$

而水面上的管长只有 3 m，即管内的水已冒出。因而其中水柱的高为 $h = 3$ m。这部分水柱的重量为（设水的密度为 ρ_0）

$$G_1 = m_1 g = \rho_0 g \pi r^2 h$$

管外壁所受的附着力为

$$F_1 = \sigma 2\pi R$$

玻璃管所受的重力为

$$G = mg = \rho_g \pi(R^2 - r^2)gh$$

$$= 4\rho_0 \pi(R^2 - r^2)gh$$

所受到的浮力为

$$F_0 = \rho_0 g \pi(R^2 - r^2)h$$

因而向上拉管子的力为

$$F = G + G_1 + F_1 - F_0$$

$$= 4\rho_0\pi(R^2 - r^2)gh + 2\pi\sigma R + \rho_0 g\pi r^2 h - \rho_0 g\pi(R^2 - r^2)h$$

$$= \rho_0\pi(3R^2 - 2r^2)gh + 2\pi\sigma R$$

$$= 1.86 \times 10^{-2}\ \mathrm{N}$$

【例 2.12】 设某大容器中盛有液体，容器的侧壁为铅垂面。设液体与器壁的接触角为 θ，表面张力系数为 σ，密度为 ρ。试计算液体沿器壁上升的高度 h。

解 如图 2.20 所示，取一部分高出平面的液体，分析这一部分液体所受的水平方向的力。

在器壁与液面接触线处，对液体的附着力为 σl，该力在水平方向上的分量为

$$f_1 = \sigma l \sin\theta$$

液体对器壁有侧向压强，则器壁对液体有反作用力，指向液体内部的压力为

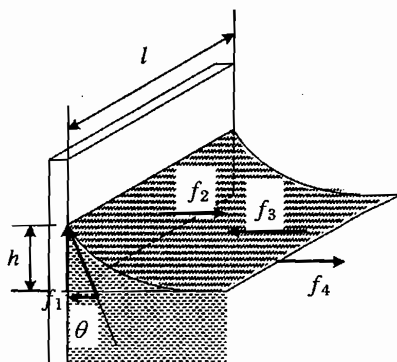


图 2.20 例 2.12 的示意图

$$f_2 = p_0 hl - \frac{1}{2}\rho gh \times hl$$
$$= p_0 hl - \frac{1}{2}\rho gh^2 l$$
大气对液体沿水平方向上的压强等于大气压与这部分液体竖直截面的乘积，即
$$f_3 = p_0 hl$$
在弯曲液面与水平面的交线处，液体之间的表面张力为
$$f_4 = \sigma l$$
力学平衡条件为
$$f_1 + f_3 = f_2 + f_4$$
代入相应的值，即得
$$\sigma l \sin\theta + p_0 hl = p_0 hl - \frac{1}{2}\rho gh^2 l + \sigma l$$
解得
$$h = \sqrt{\frac{2\sigma(1-\sin\theta)}{\rho g}}$$

【例 2.13】（第 4 届全国中学生物理竞赛预赛试题） 在航天飞机坐舱中原来有两个圆柱形洁净的玻璃容器，其中分别封装有水和水银（图 2.21）。当航天飞机处于失重状态时，试把水和水银的表面形状分别画在两空框内。

解 在失重状态下，由于表面张力，液体将尽量呈现球形。容器中水比较多，且水与玻璃浸润，由于附着力，水与器壁接触，中间为球形。水银与玻璃不浸润，且水银较少，故其外形为球形。如图 2.22 所示。

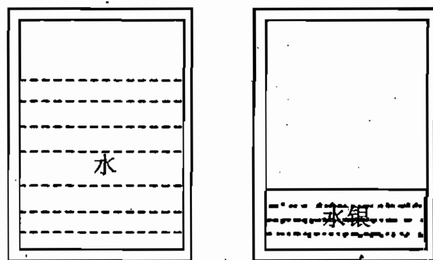


图 2.21 例 2.13 中的玻璃容器

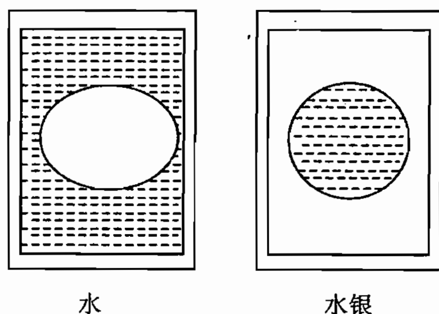


图 2.22 失重状态下水和水银的外形

2.3 熔化与凝固

固态物质吸收热量，温度升高，构成固体的分子的动能增大，当动能大于分子之间的束缚能时，分子将不再被束缚在平衡位置上，而可以挣脱束缚，化学键被破坏，分子可以到处运动，物质将具有流动性，形态从固态变为液态，这一过程就是熔化。

2.3.1 熔点

晶体固体的分子是周期性排列的，分子之间的化学键都是相同的，这些化学键被破坏所需要的能量都是相同的，即只要分子具有一定的动能，化学键都会遭到破坏。而分子的动能取决于温度，所以晶态固体中分子之间的化学键在一定的温度下都会被破坏，固态变为液态，即晶体熔化过程中，温度是不变的，这一温度就是晶体的熔点。

非晶态的固体的分子做无序排列，每个分子的结合能不尽相同，因而形成不同的化学键，这些键联在不同的温度下被破坏，因而在温度较低时，一部分分子先挣脱束缚，随着温度的升高，越来越多的分子挣脱束缚，可以到处运动。所以，非晶态固体熔解的过程，从宏观上看，总是一部分先熔化，使固体变软，随着温度的升高，熔化的固体越来越多，直至全部熔化。因此非晶体没有固定的熔点。

固体的熔点与压强有关，压强增大，相当于外界对固体分子做机械功，这些机械功会转化为分子的动能，从而使固体的熔点降低。

例如，冰上运动员脚下的冰刀与冰的接触面很小，冰所受到的压强很大，这样的压强使得冰的熔点降低，冰刀下的冰熔化成水，在冰刀和冰面之间的水可以起到润滑的作用，减小摩擦力。冰刀移开后，压强减小，熔化的水又迅速凝结成冰。

2.3.2 熔化热

晶体有固定的熔点，但并不是一旦达到熔点晶体就熔化。在熔化过程中，晶体的温度不变，吸收的热量用于破坏分子间的键联。单位质量的固体在熔化成同温度的液体过程中所吸收的热量，就是这种物质的熔化热。

2.3.3 凝固

凝固是与熔解相反的过程，是指随着温度的降低，液态变为固态的过程。

从微观上看，温度降低时，液体分子的动能减小，振幅减小，热运动程度降低，这时分子的间隔也相应变小，分子间由于引力作用而形成化学键，结合成为固体。

由于具有相同的化学键，所以对同一种物质，从液态凝固成固态的温度与其从固态熔化成液态的温度是相同的，都是熔点；凝固过程中释放出的热量与熔化过程中吸收的热量是相同的，都等于熔化热。

2.4 升华与凝华

固态物质可以不经液态而直接成为气态，这样的过程称作升华。例如，干冰就是二氧化碳在低温下凝成的固态，在常温下，干冰迅速升华成气态，升华的过程中吸收大量的热量，而使周围空气的温度迅速降低，使空气中的水蒸气液化成大量的小水珠，而呈现出雾气弥漫的效果。除此之外，樟脑丸（萘）会逐渐挥发，冬天晾在室外的衣物即使在 0 ℃以下，结了冰也能变干，这些都是升华的过程。当然也存在与升华相反的过程，在较低的温度下，气态物质可以不经历液

态而直接凝成固态，这一过程称作凝华。例如寒冷的季节，夜间空气中的水蒸气由于凝华而结成小冰晶，在地面上就形成了霜。

从分子运动论的观点看，升华过程可以这样解释：在一定的温度下，固态物质中分子热运动的平均动能是确定的，但是其中某些分子的动能较大，这些动能较大的分子就能够挣脱周围分子的束缚，从固体中逃逸出来成为气体。温度越高，动能较大的分子数就越多，升华过程就越容易实现。当然，由于处在固体内部的分子难以逃逸出来，所以发生升华的总是表面的分子。因为逃逸出来的分子需要克服固体中其他分子的束缚和外界的压强，所以升华过程需要吸收热量。单位质量的物质升华所吸收的热量称作升华热。由于不同温度下分子热运动的平均动能不同，所以升华热与温度有关。

凝华和升华的过程总是同时发生的。固体中的动能较大的分子不断逸出而成为气态的分子，气态分子在运动过程中也会重新进入固体中。如果将固态物质置于一个密闭的容器内，初始时，固体中的分子升华成为气态，而由于气态的分子少，凝华的分子数也较少。经过一段时间后，气态的分子数多到一定程度，这时，相同时间内升华的分子数与凝华的分子数相等，就达到了平衡态，即固态升华的过程与气态凝华的过程相平衡。这种情况下，固态的分子数与气态的分子数都不再变化，气体处于饱和状态。处于饱和状态的气体称作饱和蒸气。温度越高，固体中动能较大的分子数越多，升华过程就越剧烈，气态的分子数也就越多，达到饱和状态时，蒸气的压强也就越大。所以，对于同一种物质，其固态与气态平衡时，饱和蒸气压随温度改变。可以用压强 p 随温度 T 变化的曲线表示这一过程，如图 2.23 所示。固态与气态平衡时，饱和蒸气压随温度变化的曲线称为升华曲线，如图 2.23中的 AS 线，其上的各点表示固态与气态平衡时的温度与压强，曲线的两侧的区域分别表示固态、液态单独稳定存在时相应的温度和压强。

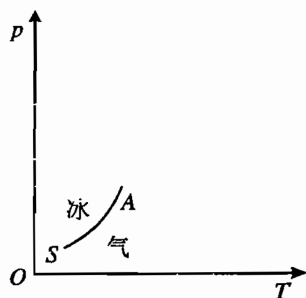


图 2.23　冰的升华曲线

多数稳定的固态物质在常温下的饱和蒸气压很低，即固态与气态平衡时气态的分子非常少，因而升华几乎可以忽略，例如多数金属就是这样。但也有少数饱和蒸气压很高的固体，例如，干冰在 -78.5 ℃时的饱和蒸气压就可达到 760 mmHg，即一个大气压；碘在 114 ℃时的饱和蒸气压为 90 mmHg，它们都是很容易发生升华的物质。冰在 0 ℃时的饱和蒸气压是 4.6 mmHg，并不算很低，升华不能忽略。

2.5　汽化与液化

物质从液态变为气态的过程称作汽化，相反，从气态转变为液态的过程称作液化或凝结。汽化的过程有两种：一种是在温度较低时，液体中动能较大的分子克服其他分子和液体表面的束缚，从其中逸出而成为气体，这一过程称为蒸发。例如，在 0～100 ℃范围，水分子不断地从液态水中逸出，变为水蒸气。另一种是温度升高到一定程度时，液体中大量的分子都有足够高的动能，完全可以克服周围其他液体分子的束缚，这时，处在液体内部的分子也可以变为

气态，在液体内部形成大量的气泡，气泡膨胀，上升到液体表面处，气泡破裂，释放出大量的蒸气，这一过程称作沸腾。沸腾是剧烈的汽化过程。在沸腾过程中，若保持压强不变，液体的温度不再升高，直至液体全部汽化，沸腾的温度就是液体的沸点。例如，在 1 atm 下，水的沸点是 100 ℃。

2.5.1 蒸发

蒸发可以在任何温度下进行，发生蒸发的都是液体表面处的分子。温度越高，液体中较大动能的分子越多，能够挣脱液面分子束缚而逃逸的分子也就越多，同时，液体的表面积越大，单位时间内从液面逸出的分子数也就越多。因此，夏季江河湖海的蒸发量比冬季的要大得多；将地面上的积水扫开来，地面很快就会变得干燥。

与蒸发同时进行的是另一个相反的过程，液面上方的气态分子由于做无规的热运动，也会重新回到液体中去，这就是气体的凝结。液面上方的气态分子越多，单位时间内凝结成液态的分子数也越多，而净蒸发量等于从液面逸出的分子数与从气态进入液面的分子数之差，所以，液面上方的气态分子数越少，净蒸发量越大。因此，在通风良好的环境中，水较容易蒸发，环境也比较干燥。

由于动能较大的分子从液体中蒸发，留在液体中都是动能较小的分子，结果就是液体分子的平均动能减小，即蒸发会导致液体的温度下降。

2.5.2 饱和气与饱和蒸气压

将液体储存在一个密闭的容器中，经过一段时间后，有足够多的液态分子蒸发为气态分子，这时，在相同的时间内，蒸发的分子数与凝结的分子数相等，液态与气态达到平衡，气态分子数不再增加，气体就处于饱和状态。处于饱和状态的气体称作饱和气，由其所产生的压强称作饱和蒸气压。

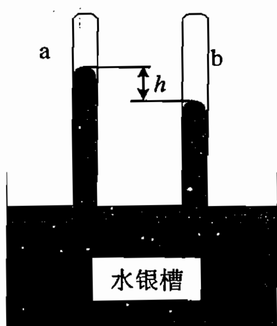


图 2.24 测量液体饱和蒸气压的装置

由于单位时间内从液体表面逸出的分子数与温度有关，所以饱和气所含有的分子数也与温度有关，因而饱和蒸气压与温度有关。

可以用图 2.24 所示的装置测量液体的饱和蒸气压。将两根装满水银的一端密封的玻璃管 a，b 倒立在水银槽中，并保证露在槽中水银面之上的管子的高度不小于 760 mm，则两管中水银面的高度相等，水银面上方的管子是真空。现在利用一根弯曲的玻璃管向 b 管中注入少量易挥发的液体，例如乙醚。由于乙醚的密度比水银的小得多，因而将浮在 b 管中的水银面上。在管中密闭的空间中，乙醚蒸发，形成饱和气。为了保证气体处于饱和态，应当使其中有少量的液态乙醚。由于饱和气的压强，b 管中的水银面的高度将下降，测量 a，b 两管中水银面的高度差，就可知道在这样的温度下乙醚的饱和蒸气压。

实验表明，同一种物质，液态与气态平衡时的饱和蒸气压只与温度有关，而与容器的体积无关，也与容器中是否有其他气体无关（当然前提是这种气体不溶于液体）。例如，20 ℃时，乙醚的饱和蒸气压是 437 mmHg，水的饱和蒸气压是 17.5 mmHg，说明易挥发的物质具有较大的饱和蒸气压。而 20 ℃时水银的饱和蒸气压只有 0.001 2 mmHg，非常小，可以忽略不计，所以通常

认为上述水银气压计中水银面的上方是真空。

图 2.25 是水的饱和蒸气压与温度关系曲线。

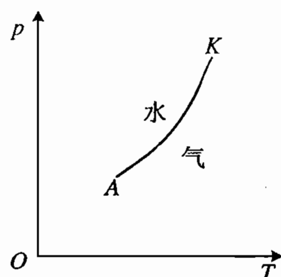


图 2.25 水的饱和蒸气压曲线

由于液体表面张力的作用，液面会出现弯曲。与平直的液面相比，弯曲的液面会引起饱和蒸气压的改变。例如，对于图 2.26(a)中所示的凹液面，逸出的液态分子还需要克服比平液面多出的液体分子的束缚，因而必须具有更大的动能，或者说，只有动能更大的分子才能逸出液体的表面，所以能够蒸发的分子比较少，在同一温度下，饱和蒸气压就比平直液面的低。反之，对于图 2.26(b)中所示的凸液面，逸出的液态分子所受的束缚比平液面的小，因而单位时间内蒸发的分子数比较多，饱和蒸气压比平直液面的要高。

当液面的曲率半径很小时，这种差别就比较显著。例如空中的气体，若发生凝结，最初先是凝成非常小的液滴。由于液滴的曲率半径非常小，所以其饱和蒸气压比平液面要高得多，这时气体要继续凝结，必须要具备很高的饱和蒸气压，这样的气压甚至要比平直液面的饱和蒸气压大许多倍，而气压达不到这一要求时，液体就不能凝结。这时的气体就是过饱和气。天空中的云含有大量的水蒸气，由于气压不足，不能凝结，所以形不成降雨。

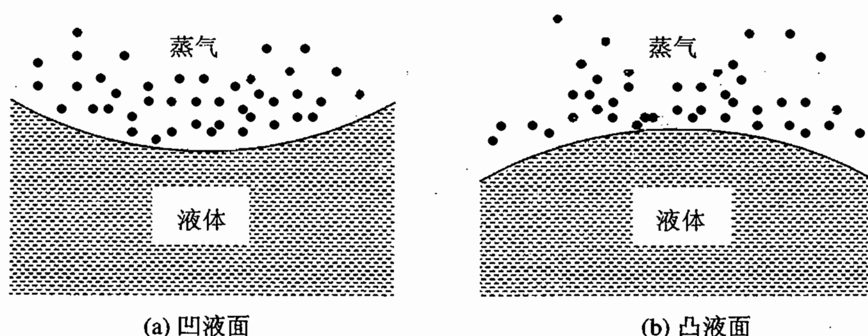


图 2.26 弯曲液面引起饱和蒸气压的改变

但是，如果气体中有一些尘埃等颗粒状的物体，气体被吸附在这些颗粒的表面，凝结成的小液滴就可以聚成较大的液滴。由于液滴的曲率半径增大，所以大液滴的饱和蒸气压就与平直液面的相差不大，这时气体就可以继续凝结成液体，使气液达到平衡，气体成为饱和气。这些小颗粒就称为凝结核。所以，云中的气压达到一定程度时，水蒸气以尘埃为核心形成水滴，水滴大到一定程度时，重力大于空气的浮力，就形成降雨。人工降雨或人工增雨，就是利用高炮将干冰等物质射入云中，被炸开的干冰颗粒作为凝结核，使云中的水蒸气迅速凝结，形成有效的降雨。

电子、离子、原子核等带电粒子，虽然尺度非常微小，但由于静电作用，可以将蒸气分子吸引到它们周围，聚集而成为液滴，因而也是很好的凝结核。威尔逊云室就是利用这一原理设计的：在密闭容器中充入过饱和气（通常是乙醚或乙醇），高能粒子（既可以是带电的，也可以是中性的，如中子和 γ 射线）射入气体中，在粒子飞行的路径上气体分子被电离而成为凝结核，在其周围迅速凝结成较大的液滴，这些液滴就可以显示出粒子的径迹。

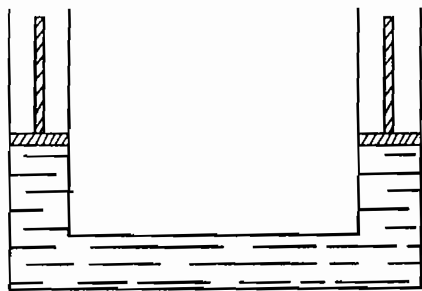


图 2.27　例 2.14 中的装置

【例 2.14】（第 3 届全国中学生物理竞赛预赛试题）图 2.27 所示的为一两臂内径相同的 U 形管，其中盛有乙醚。两臂中各有一活塞与液面紧密接触。起始时，两活塞在同一水平面上。现将两活塞同时十分缓慢地上提，左右臂活塞提高的距离分别为 h 和 $2h$，然后将两活塞固定，两臂中液面的高度差为多少？

解　活塞上提后，管中有乙醚的饱和蒸气。由于两臂等温，所以其中的饱和蒸气压相等。因此，液面高度差为 0。

2.5.3　沸腾

沸腾也是液体汽化的一个过程，但是，与蒸发不同的是，沸腾的过程要剧烈得多，有大量的气泡在液体内部生成，然后膨胀上升，到达液体表面后气泡破裂并释放出气体，而且，在一定的外界气压下，某种液体沸腾的温度总是确定的，这一温度就是液体的沸点。

如果仔细观察，不难发现，温度上升到液体开始沸腾之前，总是在容器壁上先出现一些小气泡，这些小气泡起初附着在器壁上，随着温度进一步升高，小气泡逐渐增大，当增大到一定程度时，开始上升，在上升的过程中气泡的体积有一定程度的缩小。温度再升高，气泡又开始膨胀，并迅速上升到液体的表面，然后气泡破裂，其中的气体被释放出来。

可以从微观角度解释沸腾的过程。在任何情况下，总是有少量的空气溶解于液体的内部，在容器壁上和液体中的固态杂质的表面上也会吸附有空气。容器中的液体温度升高时，其中的空气分子的动能增加，热运动增强，从液体中分离出来，在液体内部以气态存在，形成一个个小气泡。在气泡与液体的界面处，也会有少量的液体分子由于蒸发而变为气态，进入气泡中。所以，气泡中既有空气，也有饱和蒸气。气泡内气体的压强就是空气的压强 p_a 与饱和蒸气的压强 p_s 之和。而气泡外部的压强为大气压 p_0、气泡表面张力产生的压强 p_σ 与液体的压强 p_l 之和，$p_l=\rho gh$，其中 ρ 为液体的质量密度，h 为气泡在液体中的深度。易知

$$p_a + p_s = p_0 + p_\sigma + p_l$$

一般情况下，$p_\sigma \ll p_l \ll p_0$，所以可以忽略 p_l 和 p_σ。气泡处于平衡时，内外压强的关系为

$$p_a + p_s = p_0$$

这时，气泡的体积很小，所受到的浮力也很小，仍被吸附于器壁上和杂质的表面上，不能上升到液体的表面处。

当温度进一步升高，气泡内气体的压强增大，气泡的体积也相应增大，导致所受液体的浮力增大，使得气泡能够挣脱器壁和杂质表面的吸附，开始上升。当温度升高使得气泡内饱和蒸气压 p_s 等于大气压 p_0 时，$p_a+p_s>p_0$，即气泡内部的压强大于外部的压强，气泡进一步膨胀，继续上升，到达液体表面时，气泡破裂，将其中的空气和蒸气释放，达到沸腾。

因此，沸腾的条件是气泡内蒸气的饱和蒸气压等于外部的气压，而饱和蒸气压与温度有关，所以，在外部气压恒定的条件下，液体的沸点也是恒定的。外部气压增大，液体必须使温度升高，才能使气泡中的饱和蒸气压增大，以实现沸腾。所以液体的沸点会随着外部气压的增大而升高，相反，当外部气压降低时，液体的沸点也会降低。

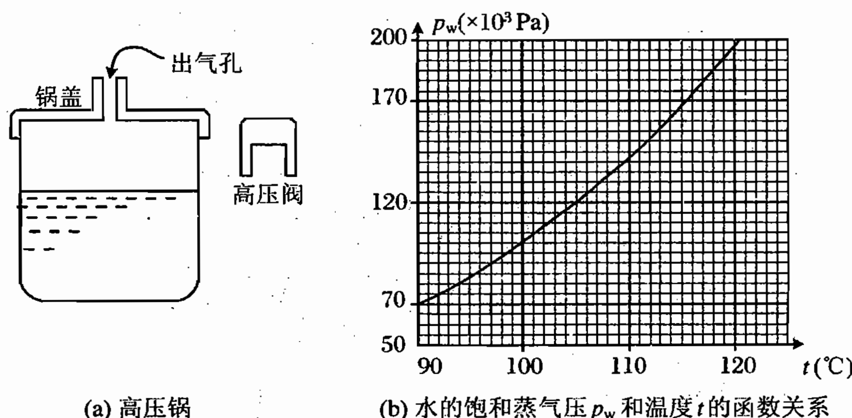
经过长时间沸腾的液体，其中的空气被排出殆尽，难以形成气泡，即使被加热到高于沸点的

温度，仍不能沸腾，这样的液体称作过热液体。过热液体中，由于分子的动能很大，分子做剧烈的热运动，在液体内部的某一处，由于大动能的分子迅速向别处运动，周围分子动能较小，不能立刻填补空隙，就可以在该处形成一个很小的真空区域，这样的区域称作空泡。然而，空泡一旦形成，就会有大量的分子迅速向泡内蒸发，由于温度很高，所以泡内的饱和蒸气压也很高，大量气体瞬间形成的高压气泡会破裂并释放出大量的高温气体，犹如爆炸，这种现象称作爆沸。若爆沸时气体的温度足够高，释放出的气体又足够多，可以将容器炸裂。因此，高压锅炉必须有防止和避免爆沸的措施。

带电粒子射入尚未达到爆沸温度的过热液体中，其附近的液体分子由于受到静电引力的作用向带电粒子运动，这样也会在粒子运动的路径两侧形成一连串的空泡，分子进入空泡形成气泡，成串的气泡就可以显示出粒子的径迹。这就是粒子物理中的气泡室的工作原理，其中的液体通常是液态丙烷。

【例 2.15】（第 14 届全国中学生物理竞赛复赛试题） 如图 2.28(a)所示，正确使用高压锅的办法是：将已加上密封锅盖的高压锅加热，当锅内水沸腾时，加上一定质量的高压阀，此时可以认为锅内的空气已全部排除，只有水的饱和蒸气。继续加热，水温将继续升高，到高压阀被蒸汽顶起时，锅内温度即达到预期温度。

设某一高压锅的预期温度为 120 ℃。如果某人在使用此锅时，未按上述程序，而在水温被加热至 90 ℃时就加上高压阀（可以认为此时锅内水汽为饱和的），问当继续加热到高压阀开始被顶起而冒汽时，锅内的温度为多少？



(a) 高压锅　　(b) 水的饱和蒸气压 p_w 和温度 t 的函数关系

图 2.28　高压锅以及 p_w 和 t 的函数关系

已知：大气压强为 $p_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa；90 ℃时水的饱和蒸气压为 $p_w(90) = 7.010 \times 10^4$ Pa；120 ℃时水的饱和蒸气压为 $p_w(120) = 1.985 \times 10^5$ Pa；在 90～120 ℃范围内水的饱和蒸气压 p_w 和温度 t（℃）的函数关系 $p_w(t)$ 如图 2.28(b)所示。

解　当水被加热至 90 ℃时，锅内干空气的压强为 $p_0 - p_w(90) = 3.12 \times 10^4$ Pa。加上阀后，由于是等容过程，所以温度改变时，干空气的分压为

$$p(t) = \frac{T}{T_0} p_0 = \frac{t + 273}{90 + 273} \times 3.12 \times 10^4 = (0.086t + 23.5) \times 10^3 \quad (\text{Pa})$$

当阀被顶起时，饱和水蒸气的分压与干空气的分压之和等于 120 ℃时水的饱和蒸气压，即

$$p(t) + p_w(t) = p_w(120)$$

代入参数，可得

$$(0.086t+23.5)\times10^3+p_w(t)=198.5\times10^3$$

当阀被顶起时，锅内的饱和蒸气压为

$$p_w(t)=198.5\times10^3-(0.086t+23.5)\times10^3$$
$$=(175.0-0.086t)\times10^3$$

这是一条直线。在图 2.28 上画出此直线，该直线与饱和蒸气压的曲线的交点即是所求。温度为 114.5 ℃。

【例 2.16】（第18届全国中学生物理竞赛复赛试题） 现有一压力锅，在海平面处加热能达到的预期温度为 120 ℃，某人在海拔 5 000 m 的高山上使用此压力锅，锅内有足量的水。

(1) 若不加盖压力阀，锅内水的温度最高可达多少？

(2) 若按正确的方法使用压力锅，锅内水的温度最高可达多少？

(3) 若未按正确的方法使用压力锅，即盖好密封锅盖一段时间后，在点火前就加上压力阀，此时水温为 27 ℃，那么加热到压力阀刚被顶起时，锅内水的温度是多少？若继续加热，锅内水的温度最高可达多少？（假设空气不溶于水。）

已知：水的饱和蒸气压 p_w 与温度 t 的关系如图 2.29(a)所示，大气压强 p 与高度 z 的关系的简化图线如图 2.29(b)所示。当 $t=27$ ℃时，$p_w(27)=3.6\times10^3$ Pa；在 $z=0$ 处，$p(0)=1.013\times10^5$ Pa。

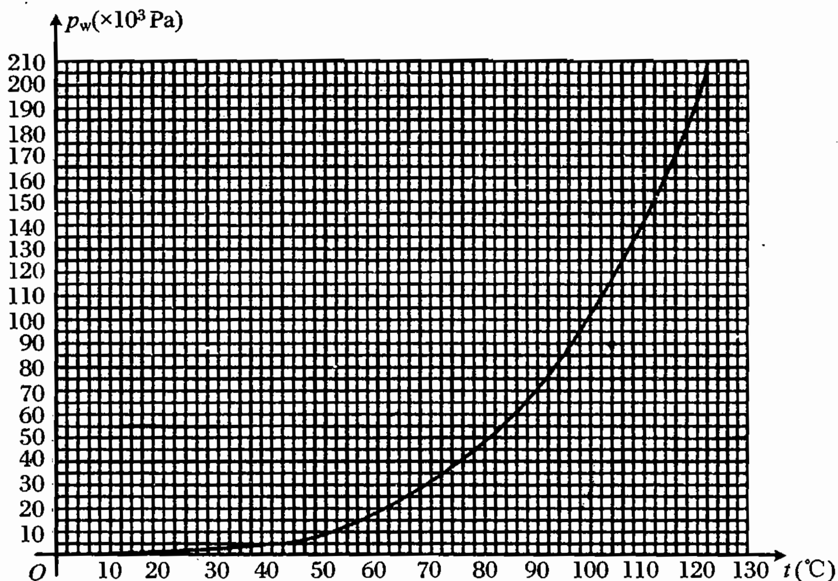


图 2.29(a) 水的饱和蒸气压与温度的关系

解 (1) 由图 2.29(b)可以看出，在海拔 5 000 m 处，大气压强为 $p(5\,000)=53.0\times10^3$ Pa。若不加阀，锅内的压强最高可达 53.0×10^3 Pa，这就是水的饱和蒸气压。根据图2.29(a)，对应的温度约为 81 ℃。

(2) 当温度为 120 ℃时，水的饱和蒸气压为 195×10^3 Pa，这是海平面处大气压与阀产生的总压强。而在海拔 5 000 m 处，大气压强为 53.0×10^3 Pa，比海平面的减小了 48.0×10^3 Pa。因而此时锅内的最高压强为 147×10^3 Pa。按正确的方法使用，待锅内干空气全部排出后再加阀，

锅内最大的饱和蒸气压为 147×10^3 Pa，对应的温度为 111 ℃.

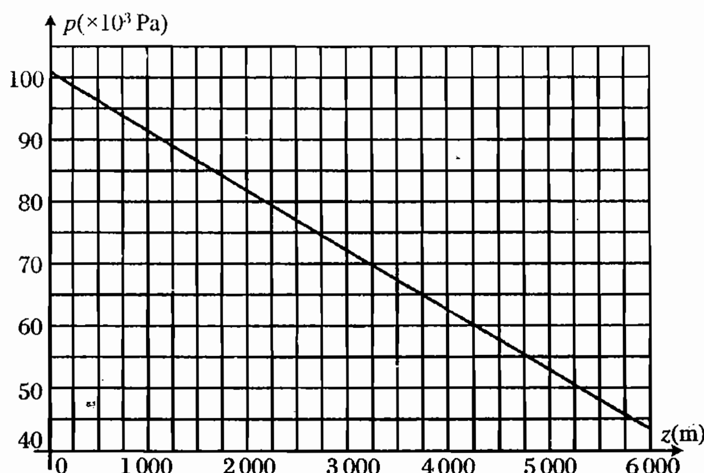


图 2.29(b) 大气压强与高度的关系

(3) 本问题与例 2.14 相似。当 27 ℃时，锅内干空气的分压为

$$p_0 = p(5\,000) - p_w(27) = 49.4\times10^3\ \text{Pa}$$

当阀被顶起时，锅内的压强为 147×10^3 Pa。可以解得压力阀刚被顶起时，锅内水的温度是 97 ℃。若继续加热，锅内的干空气最终会被排空，水的温度仍可达到 111 ℃。

2.5.4 汽化热

液体当蒸发和沸腾时，都要吸收热量。蒸发可以在任何温度下进行。同一种物质，在不同的温度下，蒸发单位质量液体所吸收的热量是不同的。而沸腾过程中温度不变，所以单位质量的同种液体在同一沸点时变为同温度气体所吸收的热量是相同的。

单位质量的某种液体变为同温度的气体时所吸收的热量，称作这种液体的汽化热。

凝结(液化)是与汽化相反的过程，气体凝结为液体要放出热量。实验研究证明，单位质量的蒸气凝结为同温度的液体时所放出的热量，与这一温度下液体的汽化热相等。

2.5.5 液化与临界温度

物质从气态转变为液态的过程称作液化，也叫凝结。

在盛有液体的密闭容器中，液体中的分子不断蒸发，气体中的分子也不断凝结。当蒸气未饱和时，相同时间内蒸发的分子数大于凝结的分子数；而当蒸气饱和时，相同时间内蒸发的分子数等于凝结的分子数，液体和气体处于平衡态，从宏观上看，液体和气体都不再变化。这时，若设法使蒸气处于过饱和状态，则相同时间内凝结的分子数将多于蒸发的分子数。

可见，使气体液化的条件就是让气体处于过饱和态。

在保持温度不变时将饱和气体压缩，气体的压强增大，大于该温度时的饱和蒸气压，气体就成为过饱和气，有一部分气体就会被液化，直至气体重新成为饱和气，液体与气体又达到平衡态，液化过程才停止。

在保持体积不变时，使容器降温，这时气体的压强大于饱和气的压强，气体成为过饱和气，

这样就使一部分气体被液化。

采用第一种方法，可以在常温下将二氧化碳、氨、氯、二氧化硫、氯化氢、硫化氢等多种气体液化。但有些气体，如氧、氮、氢、氦等，无论怎样增大压强，都不能将其液化。这说明，在常温下，这些气体无论在怎样的压强下都不能成为过饱和气。此时就只能采用第二种方法将这些气体液化。

实验研究表明，上述难以液化的气体只有温度低于某一数值时，才能够被液化。这样的温度称作临界温度。

其实，从逻辑上看，我们得到通过增加压强使气体液化的结论，前提是气体与液体共存。而事实是，在高于临界温度时，物质不能以液态存在，气体是否过饱和也就无从谈起。

只要温度低于临界温度，所有的气体都可以被液化。氦的临界温度是 -268 ℃，是最难被液化的气体，但也在 100 年前被液化了。

2.5.6 空气的湿度

地球表面分布着大量的水，这些水蒸发到大气层中，形成水蒸气。大气中水蒸气含量高，人们会感到空气很潮湿；水蒸气含量少，人们会感到空气很干燥。空气中水蒸气的含量对地球上各种生物的活动都有较大的影响，为了准确表征空气中水蒸气的含量，人们建立了湿度的概念。

严格来说，应当用空气中单位体积中所包含的水蒸气的质量来表示空气的湿度，但测量空气中的含水量比较困难，而且，即使空气中水蒸气的含量相同，气温不同时，不同的人对潮湿程度的感觉是不同的。例如，冬季空气中的含水量比夏季要少很多，但冬季时人们一样会感到空气很潮湿。事实上，在温度不变时，空气中水蒸气的含量近似地与其分压强成正比，所以，可以用空气中水蒸气的分压强表征空气的湿度。

1. 绝对湿度

空气中所含水蒸气的分压强称为空气的绝对湿度。

2. 相对湿度

在某一温度下，空气中水蒸气的分压强与同一温度下水的饱和蒸气压的比值称作空气的相对湿度。

2.5.7 露点

雾和露的形成都与空气的湿度和温度有关。常常有这种情况，前一天白天空气的湿度较大，在第二天的凌晨就会出现雾气和水珠。这是因为，白天空气中的水蒸气含量虽然高，但由于气温也高，水蒸气还没有达到饱和状态。夜里温度下降，空气中的水蒸气就成为饱和气，大量凝结成小水珠。这些小水珠漂浮在低空中就形成雾气，聚集在地面和植物叶片上就形成露珠。有时候，空气污染严重，其中大量的尘埃颗粒起到凝结核的作用，更有助于雾和露的形成。

温度降低导致空气中的未饱和水蒸气成为饱和水蒸气，这时的温度就是露点。

可见，如果空气中的相对湿度较高，地表温度只要略略降低，就能达到露点；反之，如果空气中的相对湿度较低，地表温度要大幅度降低才能达到露点。所以，露点与地表温度之差就能反映出空气相对湿度的大小。

测定露点的仪器原理是这样的：在一个导热良好的金属杯中倒入乙醚，并插入一根温度计，向乙醚吹风，使其加速蒸发，则乙醚和杯子的温度都会降低，温度低到一定程度时，就会在杯壁

上出现一层露珠，记录下这时的温度 t_1；停止吹风，温度稍稍上升，露开始消失，再记录下温度 t_2。t_1 和 t_2 的平均值就是这时空气的露点。

上面测量露点的过程告诉我们，乙醚和杯子的温度降低，引起杯壁附近空气的温度降低，空气的压强也随之降低，但由于空气的流动性，其他地方的空气会迅速向低压处流动，使压强又恢复到原来的量值。也就是说，在测量过程中，杯壁附近空气中水蒸气的分压强与其他地方的是一样的，就是未饱和气的分压强。或者说，空气中水蒸气的分压强就是露点时饱和水蒸气的分压强。所以首先查出露点时水蒸气的饱和蒸气压，该气压就是当时气温下的水蒸气的分压 p，也就是空气的绝对湿度；再查出当时室温下的饱和蒸气压 P，就能知道相对湿度 β。

综上，通过测定露点就能够知道空气的绝对湿度和相对湿度。

除上述方法之外，还可以利用干湿泡温度计和毛发湿度计测量空气的湿度。

干湿泡温度计由两支完全相同的温度计构成，其中一支 A 为干泡温度计，直接测量空气的温度，另一支 B 为湿泡温度计，它的水银泡被棉纱包裹，棉纱的下端浸在水中。如果空气中的水蒸气已经饱和，棉纱中的水不再蒸发，则 A，B 两温度计测量到的温度是一样的。若空气中的水蒸气没有饱和，由于棉纱中水的蒸发，B 温度计测量到的温度就要低于 A 温度计测量到的温度，而且，两温度计的温度差与空气的相对湿度有着一一对应的关系。那么，根据空气的温度和两支温度计的读数之差，就能够通过查表而知道空气的相对湿度。

毛发湿度计是利用毛发的伸缩测量湿度的。脱脂的毛发吸湿后会变长，变干后会缩短。毛发伸缩时，带动指针旋转，将表盘上的刻度按湿度标注并进行校准，就可以指示空气的湿度。

2.6 三 相 图

许多物质都能够以固、液、气三种物理形态存在，例如冰、水、水蒸气。某种物质的一种物理形态也称作相，则冰、水、水蒸气就分别是水的固相、液相、气相。

物态变化即物质从一种物理形态转变为另一种物理形态，也可以称作相变。熔解与凝固、汽化与液化、升华与凝华都是相变。

相变需要在一定的物理条件下才能发生，如压强为 1 atm 时，水在 0 ℃时凝结成冰，如果压强改变，冰的熔点也会改变。压强为 1 atm 时，水的沸点是 100 ℃时，压强改变，沸点也相应改变。如果将上述熔点或沸点的关系以图形表示，就可以得到相变的曲线。例如，图 2.30(a)是水的熔化曲线，图 2.30(b)是水的汽化曲线，而图 2.30(c)是水的升华曲线。

熔点是固相液相相互转化时的温度，所以，在熔化曲线 AL 上的每一点都是固相与液相共存时的压强和温度，曲线的任一侧都是单独的固相或液相存在时的温度和压强。

液化曲线 AS 是液相与气相平衡时的温度和压强，液、气两相平衡时，气体处于饱和状态，所以液化曲线也就是饱和气的压强与温度关系的曲线。曲线的一侧表示未饱和气的压强与温度，就是气相单独存在时的压强与温度，而另一侧是液相单独存在时的压强与温度。

升华曲线 AS 上的每一点所代表的是固相与气相平衡时的温度与压强，因而曲线上的每一点所代表的就是固、气共存时的饱和蒸气的温度与压强。曲线一侧的每一点是未饱和气的温度与压强，这一区域只有单独的气相，而另一侧只有单独的固相。

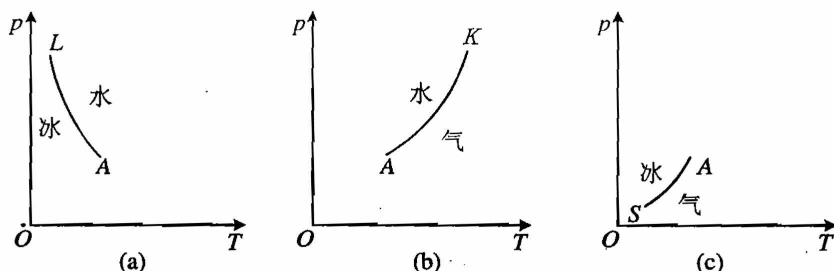


图 2.30　水的熔化、汽化、升华曲线

事实上,上述每一张图都是不完整的。例如,固相与液相的熔化曲线的一侧的某一区域中的每一点,都是气相单独存在的温度与压强,所以,为了全面地表示物质的相变,应当在同一张图中画出每两相共存的压强-温度曲线以及每一相单独存在时的压强与温度的区域,这就是物质的三相图。例如,图 2.31 就是根据实验所得到的水的三相图。

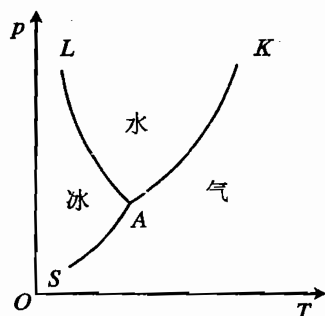


图 2.31　水的三相图

三条相变曲线的公共点 A 表示固相、液相、气相共存的温度和压强,就是物质的三相点。这一点既是该种物质在某一压强下的熔点,也是其在某一温度下的饱和蒸气压。对水而言,其三相点的压强是 4.581 mmHg,温度是 0.001 ℃(273.16 K)。每一种物质的三相点是固定不变的,所以可以用作标定压强或温度的基准。水的三相点就是国际温标的固定参考点,定义该点的温度为 273.16 K。

【例 2.17】(第 6 届全国中学生物理竞赛预赛试题)　已知冰、水和水蒸气在一密闭容器内(容器内没有其他任何物质)。若能三态平衡共存,则系统的温度和压强必定分别是 $t_1 = 0.01$ ℃和 $p_1 = 4.58$ mmHg。现在有冰、水和水蒸气各 1 g 处于上述平衡状态。若保持总体积不变而对此系统缓慢加热,输入的热量为 $Q = 0.255$ kJ,试估算系统再达到平衡后冰、水和水蒸气的质量。(已知在此条件下冰的升华热为 $L_1 = 2.83$ kJ/g,水的汽化热为 $L_2 = 2.49$ kJ/g。)

解　根据题目所给的条件,可知冰的熔化热约为 $L_3 = L_1 - L_2 = 0.34$ kJ/g(实际值为 334 J/g)。因此,输入的热量不足以使冰全部熔化,所以重新平衡后,依然是三相共存的状态,温度不变,则饱和蒸气压不变。由于部分冰熔化为水,体积的变化可以忽略,所以可认为水蒸气的质量没有变化,过程中只有部分冰熔化成水。

冰熔化的质量为

$$\Delta m = \frac{Q}{L_3} = 0.75 \text{ g}$$

最后,冰、水和水蒸气的质量分别为 0.25 g,1.75 g,1 g。

第3章　准静态过程与热力学第一定律

3.1　准静态热力学过程

热学的研究对象就是所谓的**热力学系统**。例如图3.1(a)中封闭在气缸中的气体，吸热后，温度上升，压强增大，体积膨胀，推动活塞向外运动，这就是气体吸收热量推动活塞对外界做功的过程；在图3.1(b)中，若外力推动活塞，则可以将气体压缩，气体由于被压缩，压强增大，温度升高，这就是外界对气体做功使气体能量增加的过程。

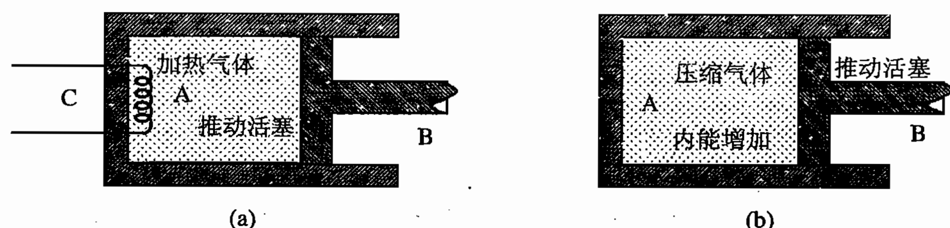


图3.1　热力学系统及其状态的变化

上述过程都是热力学过程，一个系统在经历热力学过程中，各个部分的状态是不相同的。例如，在图3.1(a)中，电热丝附近的气体首先吸热，温度升高，进而压强增大，体积膨胀，而其他部分的温度和压强还没有变化，经过一段时间后，活塞附近的气体温度才升高，压强跟着增大，才能推动活塞；而在图3.1(b)中，向内推动活塞，开始时仅仅是靠近活塞的气体受到压缩，压强增大，温度升高，经过一段时间后，远离活塞部分气体的温度才能升高，压强才能增大。

一个系统各部分的温度、压强都相等时，该系统处于热平衡状态。在上述的热力学过程中，各部分的温度、压强都不相等，而且都在变化，这样的系统处在非平衡状态。只有在加热停止后，或活塞静止后，再经历一段时间，气缸中的气体才能达到平衡状态。从非平衡态到平衡态所经历的时间称作**弛豫时间**。可见，热力学过程中系统必然要经历一系列非平衡态，这样的过程中，系统的许多物理量都在变化着，是**非静态过程**。

非静态过程是实际的过程，但这样的过程却难以用简单的物理量进行描述，这就给研究热力学过程带来了困难。为了描述热力学过程中各个物理量的变化规律以及它们之间的联系，可以想象这样一个过程：*过程进行得足够慢，在过程中的每一时刻，整个系统都处于平衡态*。这样的过程称作**准静态过程**。

例如，在图3.1(a)中，设初态系统的压强、体积、温度分别为 p_0，V_0，T_0，若加热电流无限小，则外界以无限小的功率给系统提供热量，经过很长的一段时间，电热丝附近气体的温度才能

够比原来略略升高一个小量 ΔT，同时压强也比原来增大一个小量 Δp，而在这样长的时间内，系统完全能够达到平衡态，即各部分的温度都相等且比原来升高 ΔT。但如果活塞与气缸之间无摩擦，在内外压强差的作用下，活塞向外运动，气体体积膨胀，系统的压强又恢复到 p_0，而体积和温度则分别变为 $V_0+\Delta V$ 和 $T_0+\Delta T$。这样的过程无限缓慢地连续进行，缸内气体的压强始终与外界相等，系统进行等压膨胀，过程结束后，末态系统的状态参量变为 p_0, V, T。

在图 3.1(b)中，在活塞与气缸间无摩擦的情况下，外界压强比气体大一个无限小量 Δp，则气体将被压缩，由于过程进行得无限缓慢，系统有足够的时间达到平衡态，压强、体积、温度都分别相对于初态改变一个无限小量。然后，外界压强缓慢增加，气体被缓慢压缩，在气体被压缩的过程中，系统的压强始终与外界压强相等，直至过程结束。

可见，准静态过程是一个假想的过程，是一个无限缓慢的过程，实际上根本不可能存在。但是，可以用准静态过程无限趋近实际的热力学过程，更重要的是，在准静态过程中，系统时刻处于平衡状态，可以用有关的物理量描述系统在每一时刻的状态，因而，准静态过程具有非常重要的意义。

因而，本书所涉及的热力学过程，若无特别说明，都是准静态过程，而且，在系统体积变化的过程中，都忽略摩擦力的影响，活塞可以自由滑动。

3.2 功

在图 3.2 中，活塞将气体封闭在气缸内，外力推动活塞将气体压缩，对气体做功。在准静态过程中，若在某一时刻，气体的压强为 p，活塞移动的距离为 Δl，设活塞的截面面积为 S，则活塞对气体所做的元功为

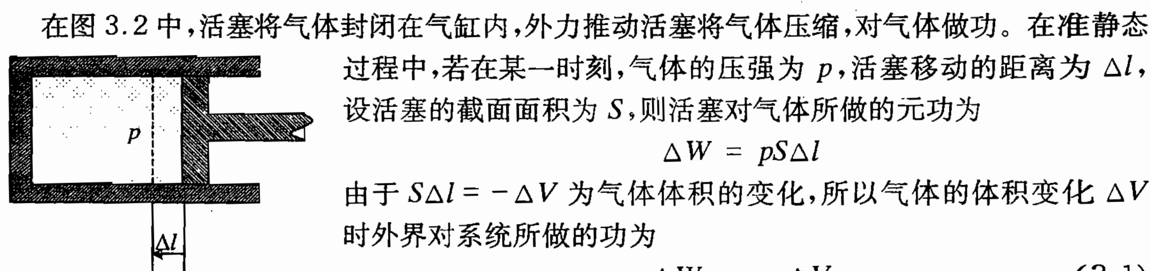


图 3.2　外界对系统做功

$$\Delta W = pS\Delta l$$

由于 $S\Delta l = -\Delta V$ 为气体体积的变化，所以气体的体积变化 ΔV 时外界对系统所做的功为

$$\Delta W = -p\Delta V \tag{3.1}$$

反之，若气体膨胀，向外推动活塞，则 $\Delta V > 0$，系统对外界做功，或者说外界对系统做负功。

将系统所经历的准静态过程中压强与体积的变化关系用图表示，见图 3.3。从图上可以看出，系统体积改变 ΔV，外界对系统所做的功 ΔW 就是曲线下底边为 ΔV 的一块矩形条的面积。那么系统的体积从 V_2 变化到 V_1 的准静态过程中，外界对系统所做的功就是 $p-V$ 曲线下的面积。

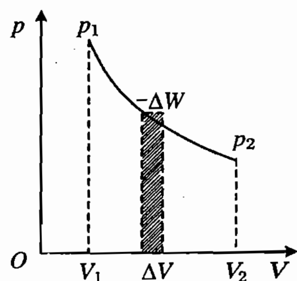


图 3.3　热力学系统的 $p-V$ 曲线

若上述气缸壁和活塞都是用不导热材料制成的，则缸中的气体与外界没有热交换，既不从外界吸热，也不向外界传热，即系统是绝热的。在这种情况下，外界对气体做功，将气体压缩，同时气体的压强增大，温度升高。由于温度是气体分子热运动动能大小的标志，温度升高，说明组成气体的分子的平均动能增大。即在绝热情况

下，外界对系统做功，导致系统的内能增加。反之，若气体膨胀，向外推动活塞，则气体对外做功。气体由于体积膨胀，压强减小，温度降低，造成气体分子热运动的平均动能减小，即系统对外界做功，或者说外界对系统做负功，导致系统的内能减少。

3.3 热　　量

物体放出热量，温度降低，内能减少；吸收热量，温度升高，内能增加。从这一点看，热量与功的效果相当，都是能量的表现和转化形式。

功与热也可以转换。例如，摩擦生热就是机械功转变为热，瘪的乒乓球放在热水中鼓起来就是热转化为功。其实，早在 1840 年，焦耳就通过实验证明了功与热是等效的。

在图 3.4 的装置中，将容器用不导热的材料包裹起来，其中的水与外界没有热量交换，即系统是绝热的，而滑轮、轴承等机械装置是没有摩擦的。利用重物的升降带动水中的叶片旋转，在叶片的搅动下，水温升高，说明产生了热量。在这一过程中，机械功可以通过重物的升降来测量，产生的热量被水吸收，这些热量可以通过水温的增加来测量。在将近 40 年的过程中，焦耳不断改进实验装置以提高测量的精度，经过无数次的实验，焦耳证明，对 55～60 ℉范围的水而言，在北纬 53.27°的曼彻斯特，使 1 磅(0.453 6 kg)的水升高 1 ℉总是需要 772 英尺・磅(1 英尺・磅＝ 1.355 8 牛顿・米)的功。

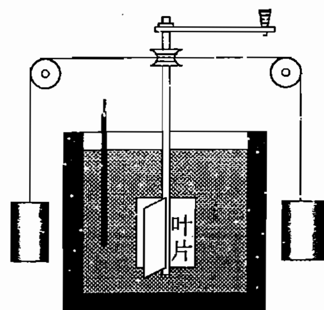


图 3.4　焦耳热功当量的实验装置

焦耳的实验证明，机械功可以转化为热量，而且，一定数值的功总是与一定数值的热量等价。

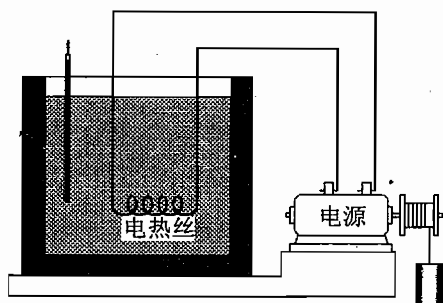


图 3.5　焦耳的电功实验装置

焦耳还做了其他类型的实验，其中一个重要的实验是用电功使水温升高。在图 3.5 中，电源是一个靠重力驱动的发电机，电流通过电阻产生的热量使水温升高。这样的装置是先将机械功转化为电功，再将电功转化为热量。在实验过程中，一定数值的机械功产生一定数值的电功，一定数值的电功又产生一定数值的热量。可见，其他形式的功也可以转化为热量，功与热之间也存在确定的数值关系。

焦耳的实验称作热功当量实验。正是为了纪念焦耳杰出的工作，功的单位被命名为焦耳。更精确的实验表明，1 cal 的热量等效于 4.184 0 J 的功。

所以，热量是能量的表现形式之一。其他形式的能量如机械能、电能、化学能等都可以通过做功转化为热量，热量也可以转化为功。物体之间通过热量的传递来转移能量。

3.4 内　　能

做机械运动的物体，速度越高，其动能越大；高度越高，其势能越大。动能和势能都是机械能，是力学中表示物体状态的物理量。例如，静电场中的电荷具有静电势能，其静电势能是描述其状态的物理量；磁场中的磁矩具有磁势能，这是描述其在磁场中状态的物理量。那么，对于一个热力学系统，其能量状态与哪些因素相关？又该用什么样的物理量进行描述呢？

例如，对一个气体系统而言，实验事实告诉我们，其吸收的热量越多，温度就越高；对其做功越多，气体被压缩的程度就越高，温度也会变得越高。功和热都是能量转化和传递的形式，这就说明吸热和做功能够改变热力学系统的能量状态，而温度就是表征系统热力学状态，特别是能量状态的一个物理量。

正如可以用机械能(包括动能、重力势能、弹性势能等)表征做机械运动的力学系统的能量状态，电磁能表示电磁学系统的能量状态一样，也可以用一个相关的物理量表示热力学系统的能量状态，这个物理量就是内能。

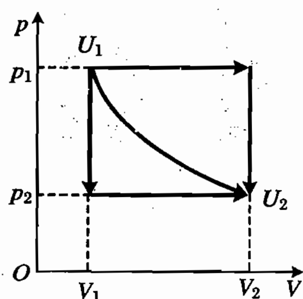


图 3.6　内能是状态参量

热力学系统从外界吸收热量，内能增加；外界对热力学系统做功，内能也增加。反之，外界从系统吸收热量，或系统对外界做功，内能则减少。

对于一个绝热系统，若外界对其做的功为 W，则其内能的增加为 $\Delta U = U_2 - U_1 = W$；若系统对外界做的功为 W，则其内能的减少为 $\Delta U = U_2 - U_1 = -W$。对于一个体积不变的系统，若它从外界吸收热量 Q，则其内能的增加为 $\Delta U = U_2 - U_1 = Q$；若外界从系统吸收热量 Q，则其内能的减少为 $\Delta U = U_2 - U_1 = -Q$。

内能是系统的状态参量(图 3.6)，只与系统的温度等参量有关，而与过程无直接关联。一个热力学系统经历不同的过程变化到某一状态，在不同的过程中，尽管热量与功各不相同，但末态的内能是相同的。

3.5 热力学第一定律

普遍意义上的**能量守恒定律**是：自然界中的一切物质都具有能量，能量有各种不同的形式，能够从一种形式转化为另一种形式，从一个物体传递给另一个物体，在转化和传递中，能量的数值不变。

对一个热力学系统而言，上述能量守恒定律就是热力学第一定律。若系统经历一个热力学过程，其中系统从外界所吸收的热量为 Q，外界对系统所做的功为 W，而系统内能的增量为 $\Delta U = U_2 - U_1$，则该过程的热力学第一定律可以表示为

$$\Delta U = Q + W \tag{3.2}$$

式中，若系统从外界吸热，则 $Q>0$，若系统对外放热，则 $Q<0$；若外界对系统做功，则 $W>0$；若系统对外界做功，则 $W<0$。

3.6 热力学第一定律对理想气体的应用

3.6.1 焦耳实验

1845 年，焦耳通过实验研究了气体的内能，图 3.7 是实验装置的示意图。开始时，容器 A 充满了被压缩的气体，容器 B 为真空，A，B 两容器通过一根管子相连接，连接管上有一活门 C，整个装置放在水中。将活门打开后，A 中的气体将进入 B 中，直到两容器中的压强相等，达到平衡状态。由于 A 中的气体向真空膨胀的过程不受阻碍，因而这一过程称作自由膨胀过程。上述实验称作焦耳的**气体自由膨胀实验**，简称**焦耳实验**。

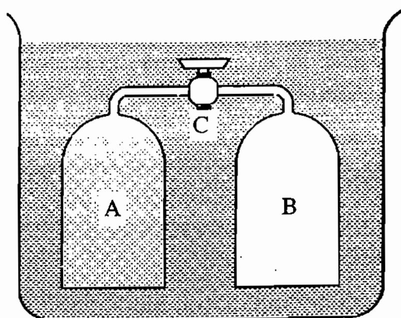


图 3.7 焦耳的实验装置

焦耳测量了膨胀前后水和气体的温度，没有发现温度改变，即膨胀前后系统的温度相同。这一方面说明自由膨胀前后气体的温度没有改变，另一方面说明水和气体之间没有发生热量交换，所以，气体所进行的过程是绝热自由膨胀过程。

气体向真空自由膨胀的过程不受外界阻力的作用，因而外界不对气体做功。尽管过程中后进入容器 B 中的气体要推动先进入的气体，即后进入的气体对先进入的气体做功，但这些功是系统内一部分对另一部分所做的，而非外界对系统所做的。

由于绝热自由膨胀过程中外界与气体系统之间没有热量交换，并且外界不对系统做功，即 $Q=0$，$W=0$，所以系统的内能不变，$\Delta U=0$，即膨胀前后气体的内能相等，$U_1=U_2$。

焦耳实验中，气体的温度没有变化，体积发生了变化（压强也相应变化），而气体的内能没有变化，说明气体的内能仅仅是温度的函数，而与体积和压强无关。

3.6.2 焦耳-汤姆孙实验

焦耳实验中，气体与水之间是一种热接触，而水的热容量比气体的大得多，即气体从水中吸收一些热量，或气体向水中释放一些热量，所引起的水温的改变不容易被温度计测量出来。例如，气体自由膨胀后温度可能会降低，但从水中吸收少许热量后，温度又可以保持与水温相同，同时，水放出少许热量后，温度降低的幅度极小。在这一过程中，水相当于一个容量很大的热源，使气体在膨胀过程中温度保持不变。

为了更精确地测量气体内能的变化，1852 年，焦耳与汤姆孙（即开尔文勋爵）又采用另一种方法进行了实验，这就是**多孔塞实验**。

实验装置如图 3.8 所示，一个绝热良好的管子 L 被一个多孔物质（例如棉絮等）制成的塞子

隔开。由于多孔塞的阻滞作用，气体不容易迅速通过，左侧的压强大于右侧的压强，从而在多孔塞的两侧维持一定的压强差。实验中，压缩机使气体稳定流动，不断地从多孔塞的一侧流到另一侧，水冷却器使流进管子 L 的气体维持在一定的温度。在实验过程中，能够时刻测量多孔塞两侧气体的温度和压强。

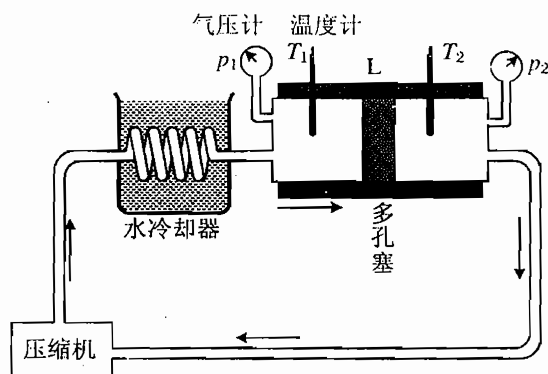


图 3.8 多孔塞实验

在管子 L 中，绝热条件下，高压气体经多孔塞流到低压一侧的过程称作**绝热节流过程**。

气体在实验装置中所经历的过程，既有在管子 L 中的绝热节流过程，也有在压缩机中的压缩过程和在水冷却器中的放热过程，此处仅研究气体绝热节流过程对气体内能的影响，因而可以选取一定量的气体，讨论这部分气体经过多孔塞后内能的变化。

如图 3.9 所示，设在时间 Δt 内，一定量的气体流经多孔塞，这部分气体在多孔塞左侧时，压强、体积、温度分别为 p_1, V_1, T_1，在多孔塞右侧时，压强、体积、温度分别变为 p_2, V_2, T_2。这一部分气体是其在左边气体的推动下通过多孔塞的，因而，这一部分气体全部通过多孔塞，左侧的气体所做的功为

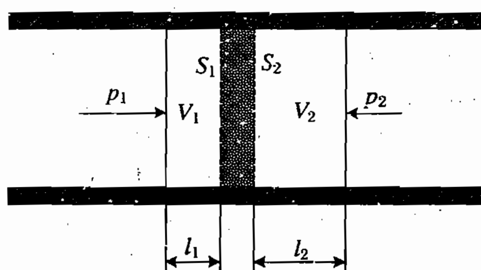


图 3.9 绝热节流过程中压强、体积的变化

$$W_1 = p_1 S_1 l_1 = p_1 V_1$$

而这一部分气体通过多孔塞后，又要推动其右侧的气体，左侧的气体对其做的功为

$$W_2 = -p_2 S_2 l_2 = -p_2 V_2$$

因而节流过程中外界对这一部分气体所做的总功为

$$W = W_1 + W_2 = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

由于是绝热过程，$Q=0$，所以气体内能的增量为

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

即

$$U_2 + p_2 V_2 = U_1 + p_1 V_1 \tag{3.3}$$

可见，在绝热节流的过程中，物理量 $U + pV$ 是保持不变的，它是一个描述系统热力学状态的函数，称之为焓，记为 $H = U + pV$。因而也可以说绝热节流过程就是气体的焓保持不变的过程。

节流后，气体的压强 p 将稍许降低，由此可能会引起温度 T 的改变，可以用 $\Delta T/\Delta p$ 表示温度随压强改变的关系，称之为**焦耳-汤姆孙系数**，即

$$\alpha = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\frac{\Delta T}{\Delta p}\right)_H \tag{3.4}$$

实验表明，临界温度不太低的气体如氮气、氧气、二氧化碳等，在常温下节流后温度都降低，即 $\alpha>0$，这叫作**正效应**（也称制冷效应）；而对于临界温度都很低的气体如氢、氦等，常温下节流后温度反而升高，即 $\alpha<0$，这叫作**负效应**。例如，在室温下，节流前压强 $p_1 = 2\,\text{atm}$，节流后压强

$p_2 = 1$ atm，空气的温度会降低 0.25 ℃，二氧化碳的温度会降低 1.3 ℃。在同样的情况下，氢气的温度却会升高 0.3 ℃。

若气体的内能只是温度的函数，而且气体又遵循理想气体的状态方程，即 $pV = \nu RT$，则气体的焓 $H = U + \nu RT$ 也只是温度的函数，与体积和压强无关。因而，在节流过程中，由于焓不变，气体的温度也应当不变，即焦耳-汤姆孙系数 $\alpha = 0$，而实际上，$\alpha \neq 0$，说明实际气体的内能不仅仅是温度的函数，还与气体的体积有关。

实验表明，压强越小，气体的内能随体积的变化越不明显，当实际气体的压强趋于 0 时，内能趋向于仅仅是温度的函数。

可以从分子运动论理解气体的内能。对理想气体而言，由于气体分子之间无相互作用，所以其内能只是分子的各种形式的动能之和，例如分子的平动动能、振动动能和转动动能之和。而分子的各种平均动能仅仅是温度的函数，所以理想气体的内能仅仅是温度的函数。而对于实际的气体，分子之间的距离并不是无限大，因而分子之间相互作用的势能也是气体内能的一部分，而这部分势能与体积相关，即一定量的气体，其体积减小，分子间的平均距离也减小，势能增大；反之，体积增大，势能减小。当压强足够小时，说明一定量的气体的体积很大，其势能可以忽略，内能仅仅包括动能，只与温度有关。

3.6.3 理想气体的内能表达式

理想气体的内能只是温度的函数，而与体积无关，即 $U = U(T)$，这也称作**焦耳定律**。

若一定量的理想气体在经历一个热力学过程中体积保持不变，这一过程就是定容过程。在定容过程中，外界不对气体做功，$W = 0$，则热力学第一定律为

$$\Delta U = Q$$

定义 1 mol 气体温度升高 1 K 所吸收的热量为**摩尔热容**，则定容过程中的摩尔热容为

$$c_V = \frac{1}{\nu}\left(\frac{Q}{\Delta T}\right)_V = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\Delta U}{\Delta T}\right)_V \tag{3.5}$$

或者

$$\Delta U = \nu c_V \Delta T \tag{3.6}$$

若气体在经历热力学过程中压强不变，这一过程就是定压过程。定压过程中外界对气体所做的功为 $W = -p\Delta V$，这一过程的热力学第一定律为

$$\Delta U = Q + W = Q - p\Delta V$$

即

$$Q = \Delta U - W = U_2 - U_1 + p_2 V_2 - p_1 V_1$$
$$= U_2 + p_2 V_2 - (U_1 + p_1 V_1)$$
$$Q = H_2 - H_1$$

定压过程的摩尔热容为

$$c_p = \frac{1}{\nu}\left(\frac{Q}{\Delta T}\right)_p = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\Delta H}{\Delta T}\right)_p \tag{3.7}$$

即

$$\Delta H = \nu c_p \Delta T \tag{3.8}$$

另外，由于理想气体 $pV = \nu RT$，所以 $H = U + \nu RT$，焓也仅仅是温度的函数，而且，由于 $\Delta H =$

$\Delta U + \nu R \Delta T$，所以

$$\frac{1}{\nu}\frac{\Delta H}{\Delta T} = \frac{1}{\nu}\frac{\Delta U}{\Delta T} + R\frac{\Delta T}{\Delta T}$$

即

$$c_p = c_V + R \tag{3.9}$$

这就是理想气体的摩尔定压热容与摩尔定容热容之间的关系。

3.6.4 定容过程

定容过程(图 3.10)中外界不对系统做功，系统内能的增量等于系统从外界吸收的热量，即

$$\Delta U = Q = \nu c_V \Delta T \tag{3.10}$$

或者，若初态、末态系统的内能和温度分别记作 U_1, T_1 和 U_2, T_2，则有

$$U_2 - U_1 = \nu c_V (T_2 - T_1) \tag{3.11}$$

3.6.5 定压过程

在定压过程(图 3.11)中，外界对系统所做的功为

$$W = -p\Delta V = -p(V_2 - V_1)$$

则

$$\Delta U = Q + W = \nu c_p \Delta T - p\Delta V$$

由于内能是状态参量，内能的增量仅仅与初态、末态有关，而与过程无关，所以

$$U_2 - U_1 = \nu c_V (T_2 - T_1)$$

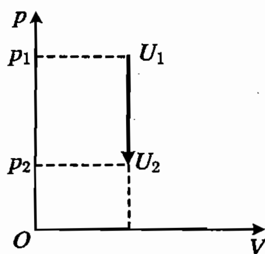


图 3.10　定容过程

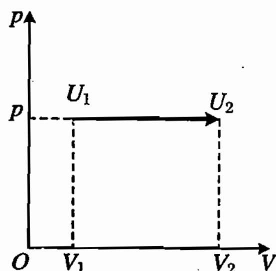


图 3.11　定压过程

3.6.6 等温过程

理想气体在等温过程(图 3.12)中，温度保持恒定。若气体体积膨胀，外界对气体做负功，气体同时从外界吸收热量；若气体被压缩，外界从气体吸收热量。整个过程中，内能保持不变。根据气体的状态方程 $pV = \nu RT$，可以算得等温过程中外界对气体所做的功为

$$W = \int_{V_1}^{V_2}(-p)\mathrm{d}V = -\int_{V_1}^{V_2}\frac{\nu RT}{V}\mathrm{d}V = -\nu RT\ln\frac{V_2}{V_1} \tag{3.12}$$

由于 $\Delta U = Q + W = 0$，所以气体所吸收的热量为

$$Q = -W = \nu RT\ln\frac{V_2}{V_1} \tag{3.13}$$

3.6.7 绝热过程

在绝热过程(图 3.13)中,系统与外界没有热交换,$Q=0$,于是 $\Delta U = W$。若气体的初态、末态分别为(p_1, V_1, T_1)和(p_2, V_2, T_2),则由于内能是状态函数,$U_2 - U_1 = \nu c_V(T_2 - T_1)$,所以 $W = \nu c_V(T_2 - T_1)$。在一个元过程(即微小过程)中,外界对系统所做的元功为

$$\mathrm{d}W = -p\mathrm{d}V$$

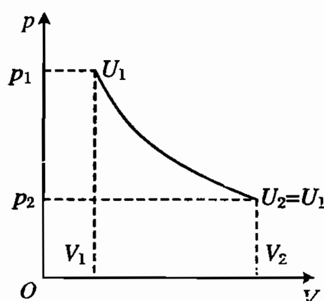


图 3.12 等温过程

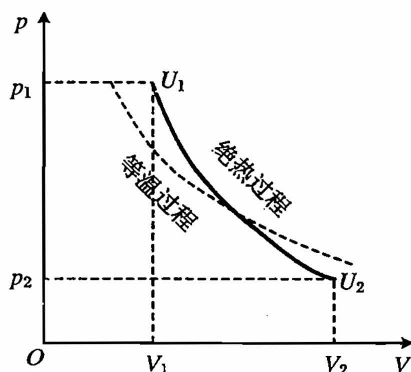


图 3.13 绝热过程

在准静态过程中的每一时刻,都有 $pV = \nu RT$。从而在一个元过程中,有

$$V\mathrm{d}p + p\mathrm{d}V = \nu R\mathrm{d}T$$

而由热力学第一定律,知 $\mathrm{d}W = -p\mathrm{d}V = c_V\mathrm{d}T$。从两式中消去 $\mathrm{d}T$,则有

$$(c_V + R)p\mathrm{d}V = -c_V V\mathrm{d}p, \quad -\frac{c_V + R}{c_V}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}p}{p}$$

由于 $c_V + R = c_p$,故若记 $c_p/c_V = \gamma$,则上式可化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

解得

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \tag{3.14}$$

即

$$pV^\gamma = 常数 \tag{3.15}$$

上式就是理想气体在准静态绝热过程中压强与体积变化的关系式,称作泊松公式。除了压强与体积的关系之外,准静态过程中温度与体积、压强与温度之间的关系分别为

$$TV^{\gamma-1} = 常数 \tag{3.16}$$

和

$$\frac{p^{\gamma-1}}{T^\gamma} = 常数 \tag{3.17}$$

在绝热过程中,外界对气体所做的功为

$$W = \int_{V_1}^{V_2}(-p)\mathrm{d}V = -\int_{V_1}^{V_2} p_1\frac{V_1^\gamma}{V^\gamma}\mathrm{d}V$$

$$= -p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V^\gamma}\mathrm{d}V = -p_1 V_1^\gamma\left(\frac{V_2^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

$$= \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = \frac{1}{\gamma - 1}(p_2 V_2 - p_1 V_1) \tag{3.18}$$

【例 3.1】(第 17 届全国中学生物理竞赛复赛试题) 在一大水银槽中竖直插有一根玻璃管,管的上端封闭,下端开口。已知槽中水银液面以上的那部分玻璃管的长度为 $l = 76$ cm,管内封闭有 $n = 1.0\times10^{-3}$ mol 的空气。保持水银槽与玻璃管都不动而设法使玻璃管内空气的温度缓慢地降低 10 ℃,问在此过程中管内空气放出的热量为多少?(已知管外大气的压强为 76 cmHg,每摩尔空气的内能为 $U = c_V T$,其中 T 为绝对温度,常量 $c_V = 20.5$ J/(mol · K),普适气体恒量 $R = 8.31$ J/(mol · K)。)

解 管中气体在降温的过程中,要向外放出热量,其体积也相应减小,水银面上升,外界对气体做功。

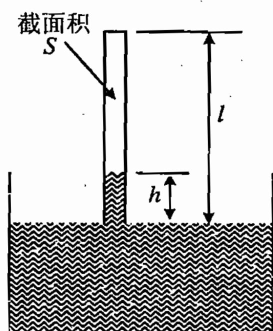


图 3.14 例 3.1 中的装置

如图 3.14 所示,设玻璃管的截面面积为 S,管中水银柱的高度为 h,水银密度为 ρ,则管中气体的体积为

$$V = (l - h)S \tag{3.19}$$

管内气体的压强为

$$p = p_0 - \rho g h \tag{3.20}$$

由式(3.19),用管中气体体积 V 表示管中水银柱的高度 h,即

$$h = l - \frac{V}{S}$$

式(3.20)可写作

$$p = p_0 - \rho g l + \frac{\rho g V}{S}$$

由于 $l = 76$ cm,$\rho g h = 76$ cmHg $= p_0$,故气体的压强为

$$p = \frac{\rho g V}{S}$$

若降温过程中气体的体积由 V_1 变为 V_2,温度由 T_1 变为 T_2,则由状态方程 $pV = \nu RT$,可得

$$\frac{\rho g V^2}{S} = \nu RT$$

降温过程中,外界对气体做的功为

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{\rho g V}{S}\mathrm{d}V$$

$$= \frac{\rho g}{2S}(V_1^2 - V_2^2) = \frac{\nu R}{2}(T_1 - T_2) = -\frac{\nu R \Delta T}{2}$$

气体内能的增量为

$$\Delta U = \nu c_V (T_2 - T_1) = \nu c_V \Delta T$$

于是,按照热力学第一定律,降温过程中气体所吸收的热量为

$$Q = \Delta U - W = \nu c_V \Delta T - \frac{\nu R \Delta T}{2} = \nu \Delta T\left(c_V - \frac{R}{2}\right)$$

$$= -10 \times \left(20.5 - \frac{8.31}{2}\right) = -163.45 \quad \text{(J)}$$

即放出的热量为 163.45 J。

【例 3.2】(第 22 届全国中学生物理竞赛复赛试题) 如图 3.15 所示,水平放置的横截面面积为 S 的带有活塞的圆筒形绝热容器中盛有 1 mol 的理想气体,其内能为 $U=CT$(C 为已知常量,T 为热力学温度)。器壁和活塞之间不漏气且存在摩擦,最大静摩擦力与滑动摩擦力相等且皆为 F。图中 r 为电阻丝,通电时可对气体缓慢加热。起始时,气体压强与外界大气压强 p_0 相等,气体的温度为 T_0。现开始对 r 通电,已知当活塞运动时克服摩擦力做功所产生热量的一半被容器中的气体吸收。若用 Q 表示气体从电阻丝吸收的热量,T 表示气体的温度,试以 T 为纵坐标,Q 为横坐标,画出在 Q 不断增加的过程中 T 和 Q 的关系图线,并在图中用所给的已知量及普适气体常量 R 标出反映图线特征的各量(不要求写出推导过程)。

解 加热过程中,题中的气体经历一个准静态的绝热过程,气体吸热,温度升高,体积膨胀,推动活塞对外做功。

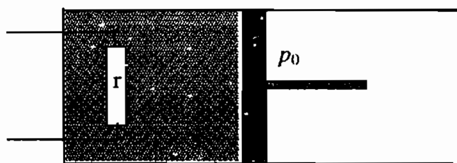


图 3.15 例 3.2 中的装置

由于活塞与气缸之间有摩擦,且活塞右侧的大气压强不变,所以只在气体的压强达到临界值之前,体积不变,是等容过程。该压强的临界值为

$$p_1 = p_0 + \frac{F}{S} \tag{3.21}$$

相应的温度为

$$T_1 = \frac{p_1 T_0}{p_0} = \left(p_0 + \frac{F}{S}\right)\frac{T_0}{p_0} \tag{3.22}$$

在等容过程中,由于做的功为零,热力学第一定律为

$$Q = \Delta U = \nu C(T - T_0)$$

可得

$$T = \frac{Q}{\nu C} + T_0 \tag{3.23}$$

其中,$\nu = 1$ mol。

显然,第一过程中 T 和 Q 为线性关系,直线斜率为 $1/C$。

第一过程中,从外界吸收的总热量为

$$Q_1 = \nu C(T_1 - T_0) = \nu C\left[\left(p_0 + \frac{F}{S}\right)\frac{T_0}{p_0} - T_0\right] = \frac{F}{p_0 S}\nu C T_0$$

第二过程中,由于摩擦力与大气压强均保持不变,所以气体等压膨胀,压强为 p_1。等压过程中,温度升高至 T 时体积为 $V_0 + \Delta V = (T/T_1)V_0$,即

$$\Delta V = \left(\frac{T}{T_1} - 1\right)V_0 \tag{3.24}$$

根据气体的状态方程 $pV = \nu RT$,可得初始的体积为

$$V_0 = \frac{\nu R T_0}{p_0} \tag{3.25}$$

综合式(3.22),(3.24),(3.25),得到

$$\Delta V = \left[\frac{T}{\left(p_0 + \frac{F}{S}\right)\frac{T_0}{p_0}} - 1\right]\frac{\nu R T_0}{p_0} = \frac{p_0 ST - (p_0 S + F)T_0}{p_0 S + F}\frac{\nu R}{p_0}$$

体积增大 ΔV 过程中,克服摩擦力所做的功为

$$W = p_1\Delta V = \left(p_0 + \frac{F}{S}\right)\left(\frac{T}{T_1} - 1\right)\frac{\nu R T_0}{p_0}$$

所产生的热量被气体吸收的部分为

$$\Delta Q = \frac{1}{2}W = \left(p_0 + \frac{F}{S}\right)\left(\frac{T}{T_1} - 1\right)\frac{\nu R T_0}{2p_0}$$

第二过程中，热力学第一定律为

$$\Delta U_2 = Q_2 + \Delta Q - W = Q_2 - \frac{W}{2}$$

其中

$$\Delta U = \nu C(T - T_1), \quad Q_2 = Q - Q_1 = Q - \frac{F}{p_0 S}\nu C T_0$$

进一步得到

$$\begin{aligned} C(T - T_1) &= Q - \frac{F}{p_0 S}CT_0 - \left(p_0 + \frac{F}{S}\right)\left(\frac{T}{T_1} - 1\right)\frac{\nu R T_0}{2p_0} \\ &= Q - \frac{F}{p_0 S}CT_0 + \left(p_0 + \frac{F}{S}\right)\frac{\nu R T_0}{2p_0} - \left(p_0 + \frac{F}{S}\right)\frac{\nu R T_0}{2p_0}\frac{T}{T_1} \end{aligned}$$

将式(3.22)代入，可解得

$$T = \frac{2(p_0 S + F)}{2Cp_0 S + 2CF + 2Rp_0 S + FR}\left(Q - \frac{CFT_0}{p_0 S}\right) + \frac{(p_0 S + F)T_0}{p_0 S} \tag{3.26}$$

第二过程中 T 和 Q 仍为线性关系，直线斜率为

$$\frac{2(p_0 S + F)}{2Cp_0 S + 2CF + 2Rp_0 S + FR}$$

综上，结果如图 3.16 所示。

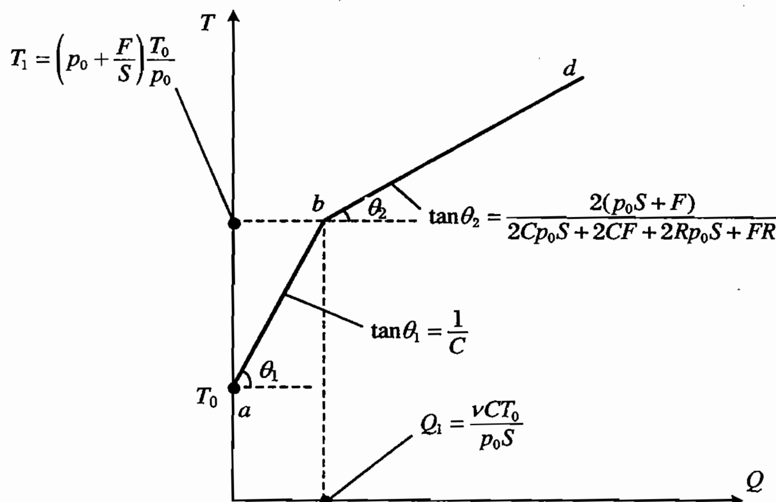


图 3.16　例 3.2 的结果

【例 3.3】(第 23 届全国中学生物理竞赛复赛试题)　设有一带活塞的气缸，如图 3.17 所示。缸内盛有一定质量的气体，其中还有一个可随轴转动的叶片，转轴伸到气缸外，外界可使轴和叶片一起转动，叶片和轴以及气缸壁和活塞都是绝热的，它们的热容量都不计。轴穿过气缸

处不漏气。

如果叶片和轴不转动，而令活塞缓慢移动，则在这种过程中，由实验测得气体的压强 p 和体积 V 遵从以下过程方程式：

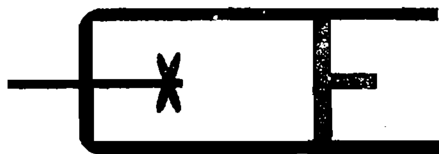


图 3.17 带活塞的气缸

$$pV^{\alpha} = k$$

其中，α，k 均为常量，$\alpha>1$（其值已知）。可以由上式导出在此过程中外界对气体做的功为

$$W = \frac{k}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{V_2^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_1^{\alpha-1}}\right)$$

式中，V_2 和 V_1 分别表示末态和初态的体积。

如果保持活塞固定不动，而使叶片以角速度 ω 做匀角速转动，则在这种过程中，气体的压强的改变量 Δp 和经过的时间 Δt 遵从以下关系式：

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\alpha - 1}{V}L \cdot \omega$$

式中，V 为气体的体积，L 表示气体对叶片阻力的力矩的大小。

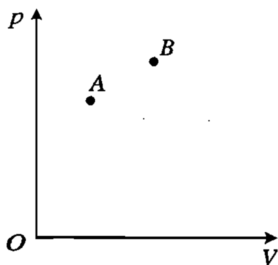


图 3.18 气体的状态图示

上面并没有说气体是理想气体，现要求你不用理想气体的状态方程和理想气体的内能只与温度有关的知识，求出图 3.18 中气体原来所处的状态 A 与另一已知状态 B 之间的内能之差。（结果要用状态 A，B 的压强 p_A，p_B 和体积 V_A，V_B 及常量 α 表示。）

解 内能是状态参量，与过程无关。

根据题中所给的条件，由于气缸是绝热的，除气体外，其他部分的热容都忽略不计，所以外界对系统所做的功全部用以增加气体内能。

可设系统从 A 开始，经历两个过程到达 B：

第一过程，叶片和轴不转动，体积膨胀，对外做功；

第二过程，保持活塞不动，气体体积不变，叶片转动，即外界对系统做功。

第一过程中，气体的体积从 V_A 变为 V_B，压强从 p_A 变为 p_1，外界对系统所做的功为

$$W_1 = \frac{k}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{V_B^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_A^{\alpha-1}}\right)$$

相应的压强变为

$$p_1 = p_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\alpha}$$

第二过程中，叶片转动要克服阻力矩，在时间 Δt 内外界对气体所做的功为

$$W_2 = L\Delta\theta = L\omega\Delta t$$

将题中所给的公式代入，得到

$$W_2 = \frac{\Delta p V_B}{\alpha - 1}$$

由于气体的压强从 p_1 变为 p_B，所以 $\Delta p = p_B - p_1$，即

$$W_2 = \frac{(p_B - p_1)V_B}{\alpha - 1} = \frac{p_B - p_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\alpha}}{\alpha - 1}V_B$$

按照热力学第一定律，内能的增量为

$$\Delta U = W_1 + W_2$$

$$= \frac{k}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{V_B^{\alpha-1}} - \frac{1}{V_A^{\alpha-1}}\right) + \frac{p_B - p_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\alpha}{\alpha - 1} V_B$$

$$= \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{k}{V_B^{\alpha-1}} - \frac{k}{V_A^{\alpha-1}} + p_B V_B - \frac{p_A V_A^\alpha}{V_B^{\alpha-1}}\right)$$

由于 $pV^\alpha = k$，所以在初态、末态时，有

$$\frac{k}{V_A^{\alpha-1}} = \frac{p_A V_A^\alpha}{V_A^{\alpha-1}} = p_A V_A,\quad \frac{k}{V_B^{\alpha-1}} = \frac{p_B V_B^\alpha}{V_B^{\alpha-1}} = p_B V_B \quad 和 \quad \frac{p_A V_A^\alpha}{V_B^{\alpha-1}} = \frac{p_B V_B^\alpha}{V_B^{\alpha-1}} = p_B V_B$$

从而得到

$$\Delta U = \frac{2(p_B V_B - p_A V_A)}{\alpha - 1}$$

【例 3.4】（第 24 届全国中学生物理竞赛复赛试题） 如图 3.19 所示，一容器左侧装有活门 K_1，右侧装有活塞 B，一厚度可以忽略的隔板 M 将容器隔成 a，b 两室，M 上装有活门 K_2。容器、隔板、活塞及活门都是绝热的，隔板和活塞可用销钉固定，拔掉销钉即可在容器内左右平移，移动时不受摩擦作用且不漏气。整个容器置于压强为 p_0、温度为 T_0 的大气中。初始时，将活塞 B 用销钉固定在图示的位置，隔板 M 固定在容器 PQ 处，使 a，b 两室的体积都等于 V_0，K_1，K_2 关闭；b 室为真空，a 室装有一定量的空气（容器内外气体种类相同，且均可视为理想气体），其压强为 $4p_0/5$，温度为 T_0。（已知 1 mol 空气温度升高 1 K 时内能的增量为 c_V，普适气体常量为 R。）

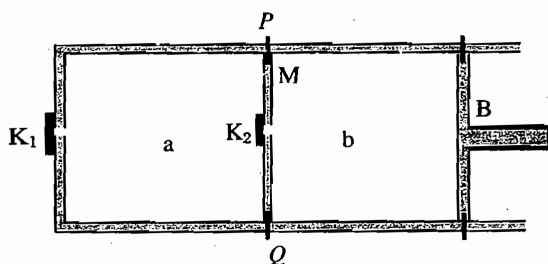


图 3.19　例 3.4 中的装置

（1）现在打开 K_1，待容器内外压强相等时迅速关闭 K_1（假定此过程中容器内的气体与容器外的气体之间无热量交换），求达到平衡时，a 室中气体的温度。

（2）接着打开 K_2，待 a，b 两室中的气体达到平衡后，关闭 K_2。拔掉所有销钉，缓慢推动活塞 B 直至到达 PQ 位置。求在推动活塞过程中，隔板 M 对 a 室中的气体所做的功。（已知在推动活塞过程中，气体的压强 p 与体积 V 之间的关系为 $PV^{\frac{c_V+R}{c_V}} =$ 恒量。）

解 （1）在此过程中，可以认为外部气体将 a 室中原有气体压缩，直至其压强达到 p_0 时为止，同时有一部分气体进入 a 室，最后达到热平衡。

设初始时 a 室中气体物质的量为 ν_0，已知体积为 V_0，从外部进入的气体物质的量为 $\Delta\nu$，体积为 ΔV。这一过程中，外界所做的功为 $W = p_0\Delta V$。由于初始时这两部分气体的温度相同，结束时温度亦相同，因而内能的增量为

$$\Delta U = (\nu_0 + \Delta\nu)c_V(T - T_0)$$

对外部而言，上述过程是绝热过程，按热力学第一定律，$\Delta U = W$，即

$$p_0\Delta V = (\nu_0 + \Delta\nu)c_V(T - T_0) \tag{3.27}$$

写出初始时两部分气体的状态方程，分别为

$$\frac{4}{5}p_0V_0 = \nu_0RT_0 \tag{3.28}$$

$$p_0\Delta V = \Delta\nu RT_0 \tag{3.29}$$

末态时的状态方程为

$$p_0V_0 = (\nu_0 + \Delta\nu)RT \tag{3.30}$$

由式(3.28),(3.30),得到

$$\frac{\nu_0}{\nu_0+\Delta\nu} = \frac{4}{5}\frac{T}{T_0}$$

由式(3.27),(3.29),得到

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0+\Delta\nu} = \frac{c_V(T-T_0)}{RT_0}$$

于是有

$$\frac{4}{5}\frac{T}{T_0} + \frac{c_V(T-T_0)}{RT_0} = 1,\quad T = \frac{5(c_V+R)}{5c_V+4R}T_0$$

(2) 打开 K_2后,a 室中的气体向 b 室中扩散,由于 b 室原来是真空,所以这一过程既不做功,也不吸热,因而气体的内能不变。对理想气体而言,其温度不变,仍为 T,由于其体积增大 1 倍,达到平衡时,压强变为 $p_0/2$。

在推动活塞的过程中,由于隔板可以无摩擦地自由运动,所以两室中的压强是相等的,体积也相等。对每一室中的气体,体积由 V_0变为 $V_0/2$。按照题中所给的条件,此过程中 $PV^{\frac{c_V+R}{c_V}}$保持不变。记$(c_V+R)/c_V=\gamma$,又根据状态方程,可得到 $pV^\gamma = pVV^{\gamma-1} = \nu RTV^{\gamma-1}$。因而 $TV^{\gamma-1}$也是不变量,即对于每一室中的气体,有

$$TV_0^{\gamma-1} = T'\left(\frac{V_0}{2}\right)^{\gamma-1},\quad 即\quad T' = 2^{\gamma-1}T$$

记 $\nu=\nu_0+\Delta\nu$ 为容器中气体总物质的量,则每一室中气体内能的增量为

$$\Delta U' = \frac{\nu}{2}c_V(T'-T)$$

由于是绝热过程,所以上述内能的改变是由于隔板对 a 室内的气体所做的功,即

$$W' = \Delta U' = \frac{\nu}{2}c_V(T'-T)$$

$$= \frac{\nu}{2}c_V(2^{\gamma-1}T - T) = (2^{\gamma-1}-1)c_V\frac{\nu}{2}T$$

由于 $p_0V_0=\nu RT$,所以

$$W' = (2^{\gamma-1}-1)\frac{c_V}{R}p_0V_0$$

【例 3.5】(第 17 届全国中学生物理竞赛预赛试题) 绝热容器 A 经一阀门与另一容积比 A 的容积大得很多的绝热容器 B 相连。开始时阀门关闭,两容器中盛有同种理想气体,温度均为 30 ℃,B 中气体的压强为 A 中的 2 倍。现将阀门缓慢打开,直至压强相等时关闭。问此时容器 A 中气体的温度为多少?(假设在打开到关闭阀门的过程中 A 中的气体与 B 中的气体之间无热交换。已知每摩尔该气体的内能为 $U=5RT/2$,式中 R 为普适气体恒量,T 是绝对温度。)

解 由于 $V_B \gg V_A$,$T_{B0}=T_{A0}$,所以 B 中的气体比 A 中的多得多,因而打开阀门后,可以认为 B 中的压强始终维持在 $2p_0$,过程结束,重新达到平衡时,两容器的压强也是 $2p_0$。设 B 中共

有体积为 ΔV 的气体被压缩入 A 中，则 B 中的其他气体对 A 做的功为

$$W = 2p_0\Delta V \tag{3.31}$$

这部分气体物质的量为

$$\Delta\nu = \frac{2p_0\Delta V}{RT_0} \tag{3.32}$$

A 中原有气体物质的量为

$$\nu_A = \frac{p_0 V_A}{RT_0} \tag{3.33}$$

这两部分气体初态、末态的温度都相同，因而由外界做功所引起的内能的改变为

$$\Delta U = (\nu_A + \Delta\nu)\frac{5R(T - T_0)}{2} = 2p_0\Delta V \tag{3.34}$$

而末态时 A 中气体的状态方程为

$$\nu_A + \Delta\nu = \frac{2p_0 V_A}{RT} \tag{3.35}$$

从式(3.32)，(3.34)中消去 ΔV，得到

$$(\nu_A + \Delta\nu)\frac{5(T - T_0)}{2} = \Delta\nu T_0$$

即

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_A + \Delta\nu} = \frac{5(T - T_0)}{2T_0} \tag{3.36}$$

从式(3.33)，(3.35)中消去 V_A，得到

$$\nu_A + \Delta\nu = \frac{2T_0}{T}\nu_A$$

即

$$\frac{\nu_A}{\nu_A + \Delta\nu} = \frac{T}{2T_0} \tag{3.37}$$

把式(3.36)，(3.37)相加，即得到

$$\frac{5(T - T_0)}{2T_0} + \frac{T}{2T_0} = 1$$

解得

$$T = \frac{7T_0}{6} = 353.5\ \text{K} = 80.5\ ℃$$

【例 3.6】(第 24 届全国中学生物理竞赛预赛试题)

如图 3.20 所示，绝热的活塞 S 把一定质量的稀薄气体(可视为理想气体)密封在水平放置的绝热气缸内，活塞可在气缸内无摩擦地滑动。气缸左端的电热丝可通弱电流对气缸内的气体十分缓慢地加热。气缸处在大气中，大气压强为 p_0。初始时，气体的体积为 V_0，压强为 p_0。已知 1 mol 该气体温度升高 1 K 时，其内能的增量为一已知的恒量。求以下两种过程中电热丝传给气体的热量 Q_1 与 Q_2之比：



图 3.20　例 3.5 中的装置

（1）从初始状态出发，保持活塞S的位置固定，在电热丝中通以弱电流，并持续一段时间，然后停止通电，待气体达到热平衡时，测得气体的压强为 p_1。

（2）仍从初始状态出发，让活塞处在自由状态，在电热丝中通以弱电流，也持续一段时间，然后停止通电，最后测得气体的体积为 V_2。

解 （1）此过程中，气体体积不变，是等容过程。外界所提供的热量全部转化为气体的内能。设平衡时气体的温度为 T_1，由状态方程，$p_0/T_0=p_1/T_1$，可得

$$T_1=\frac{p_1}{p_0}T_0$$

设 1 mol 该气体温度升高 1 K 时，其内能的增量为 c_V，则此过程中所吸收的热量为

$$Q_1=\Delta U_1=\nu c_V(T_1-T_0)=\nu c_V\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)T_0=c_V\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)\frac{p_0V_0}{R}$$

（2）此过程中，活塞可无摩擦地自由运动，外界压强 p_0 不变，气体压强 p_0 也不变，是等压过程。外界对气体做的功为

$$W=-p_0(V_2-V_0)$$

设平衡时气体的温度为 T_2，由状态方程，$V_0/T_0=V_2/T_2$，可得

$$T_2=\frac{V_2}{V_0}T_0$$

这一过程中气体内能的增量为

$$\Delta U_2=\nu c_V(T_2-T_0)=\nu c_V\left(\frac{V_2}{V_0}-1\right)T_0=c_V\left(\frac{V_2}{V_0}-1\right)\frac{p_0V_0}{R}$$

吸收的热量为

$$Q_2=\Delta U_2-W=c_V\left(\frac{V_2}{V_0}-1\right)\frac{p_0V_0}{R}+p_0(V_2-V_0)$$

综上，所得的结果为

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{c_V\left(\frac{p_1}{p_0}-1\right)\frac{p_0V_0}{R}}{c_V\left(\frac{V_2}{V_0}-1\right)\frac{p_0V_0}{R}+p_0(V_2-V_0)}$$

$$=\frac{c_V(p_1-p_0)V_0}{c_Vp_0(V_2-V_0)+p_0(V_2-V_0)R}$$

$$=\frac{c_V}{c_V+R}\frac{(p_1-p_0)V_0}{p_0(V_2-V_0)}$$

【例 3.7】（第 25 届全国中学生物理竞赛复赛试题） 图 3.21 为低温工程中常用的一种气体、蒸气压联合温度计的原理示意图，M 为指针压力表，以 V_M 表示其中可以容纳气体的容积；B 为测温泡，处在待测温度的环境中，以 V_B 表示其体积；E 为贮气容器，以 V_E 表示其体积；F 为阀门。M，E，B 由体积可忽略的毛细管连接。在 M，E，B 均处在室温 $T_0=300\text{ K}$ 时充以压强为 $p_0=5.2\times10^5\text{ Pa}$ 的氢气。假设氢的饱和蒸气仍遵从理想气体状态方程。现考察以下各问题：

（1）关闭阀门 F，使 E 与温度计的其他部分隔断，于是 M，B 构成一简易的气体温度计，用它可测量 25 K 以上的温度，这时 B 中的氢气始终处在气态，M 处在室温中。试导出 B 处的温度 T 和压力表显示的压强 p 的关系。除题中给出的室温 T_0 时 B 中氢气的压强 p_0 外，理论上至少还需要测量几个已知温度下的压强才能定量确定 T 与 p 之间的关系？

(2) 开启阀门 F,使 M,E,B 连通,构成一用于测量 20～25 K 温度区间的低温的蒸气压温度计,此时压力表 M 测出的是液态氢的饱和蒸气压。由于饱和蒸气压与温度有灵敏的依赖关系,知道了氢的饱和蒸气压与温度的关系,通过测量氢的饱和蒸气压,就可相当准确地确定这一温区的温度。在设计温度计时,要保证当 B 处于温度低于 $T_V=25$ K 时,B 中一定要有液态氢存在,而当温度高于 $T_V=25$ K 时,B 中无液态氢。为达到这一目的,V_M+V_E 与 V_B间应满足怎样的关系?(已知 $T_V=25$ K 时,液态氢的饱和蒸气压为 $p_V=3.3\times10^5$ Pa。)

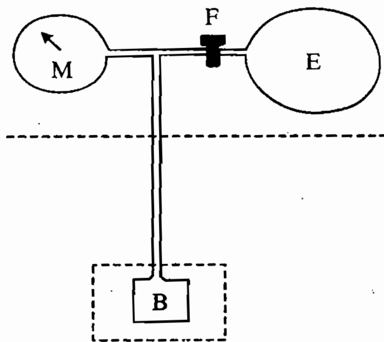


图 3.21　例 3.7 中的装置

(3) 已知室温下压强为 $p_1=1.04\times10^5$ Pa 的氢气体积是同质量的液态氢气体积的 800 倍,试论证蒸气压温度计中的液态气不会溢出测温泡 B。

解　(1) 当其中的氢气始终处于气态时,对于 M,B 构成的气体温度计,与例 1.13 相似,利用 V_M和 V_B,可得

$$T=\frac{p}{p_0}\frac{T_0}{1+\frac{V_B}{V_M}\left(1-\frac{p}{p_0}\right)}$$

但题中 V_M和 V_B未知,因而至少还需要另测相同温度下的两个压强,才能确定 V_M和 V_B的值,然后测量未知温度。

(2) 当 B 中的氢被液化时,温度计中气体的压强即等于氢的饱和蒸气压,该压强仅与温度有关。所以,只要测定压强即可知道温度。

设温度计中氢气的总物质的量为 ν,温度低于 25 K 时,E,M 中氢气物质的量为 ν_1,B 中仍处于气态的氢气物质的量为 ν_2,则气体的状态方程分别为

$$p_0(V_E+V_M+V_B)=\nu RT_0,\quad 即\quad \nu=\frac{p_0(V_E+V_M+V_B)}{RT_0}$$

$$p_V(V_E+V_M)=\nu_1 RT_0,\quad 即\quad \nu_1=\frac{p_V(V_E+V_M)}{RT_0}$$

$$p_VV_B=\nu_2 RT_V,\quad 即\quad \nu_2=\frac{p_VV_B}{RT_V}$$

由于部分氢气被液化,所以 $\nu\geqslant\nu_1+\nu_2$,即

$$\frac{p_0(V_E+V_M+V_B)}{T_0}\geqslant\frac{p_V(V_E+V_M)}{T_0}+\frac{p_VV_B}{T_V}$$

代入数据,得到

$$\frac{5.2\times10^5(V_E+V_M+V_B)}{300}\geqslant\frac{3.3\times10^5(V_E+V_M)}{300}+\frac{3.3\times10^5V_B}{25}$$

$$\frac{1.9(V_E+V_M)}{300}\geqslant\frac{3.3V_B}{25}-\frac{5.2V_B}{300}=\frac{(12\times3.3-5.2)V_B}{300}=\frac{34.4V_B}{300}$$

$$V_M+V_E\geqslant18.1V_B$$

(3) 由于液态氢的密度随温度改变很小,所以室温下压强为 $p_0=5.2\times10^5$ Pa 的氢气被液化,体积变为原来的 1/160。本题中,温度计中的氢气被全部液化,液体的体积为

$$V = \frac{V_M + V_E + V_B}{160} \geqslant \frac{19V_B}{160}$$

若 $V_M + V_E > 159V_B$，则有 $V > V_B$，可见这一问是有问题的。

【例 3.8】（第 26 届全国中学生物理竞赛预赛试题） 图 3.22 中，M_1 和 M_2 是绝热气缸中的两个活塞，用轻质刚性细杆连接，活塞与气缸壁的接触是光滑的、不漏气的，M_1 是导热的，M_2 是绝热的，且 M_2 的横截面面积是 M_1 的 2 倍。M_1 把一定质量的气体封闭在气缸的 L_1 部分，M_1 和 M_2 把一定质量的气体封闭在气缸的 L_2 部分，M_2 的右侧为大气，大气压强 p_0 是恒定的。K 是加热 L_2 中气体用的电热丝。初始时，两个活塞和气体都处在平衡状态，分别以 V_{10} 和 V_{20} 表示 L_1 和 L_2 中气体的体积。现通过 K 对气体缓慢加热一段时间后停止加热，让气体重新达到平衡态，这时，活塞未被气缸壁挡住。加热后与加热前比，L_1 和 L_2 中气体的压强是增大了、减小了还是未变？要求进行定量论证。

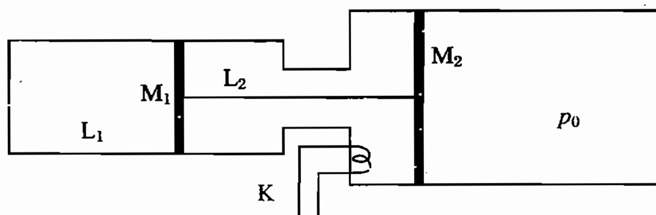


图 3.22 例 3.8 中的装置示意图

解 在准静态过程中，L_1，L_2 中的各处气体压强相等，但由于两侧的活塞截面面积不同，所以 L_2 内的气体对刚性相连的两活塞的压力不同，指向右侧的压力为

$$p_2S_2 - p_2S_1 = 2p_2S_1 - p_2S_1 = p_2S_1$$

若使系统处于平衡态，L_2 外部必须有指向左侧的压力恰与其抵消，也就是

$$p_0S_2 - p_1S_1 = 2p_0S_1 - p_1S_1 = p_2S_1$$

解得

$$p_1 + p_2 = 2p_0 \tag{3.38}$$

不妨分析一下从加热开始直至重新达到平衡的物理过程：开始时，L_2 中的气体由于吸热，所以温度和压强都增加，同时，L_1 中的气体亦由于温度增加而压强增加。两活塞受到向右侧的压力为 p_2S_1，将增加；向左侧的压力为 $2(p_0 - p_1)S_1$，将减小，这必然导致活塞向右运动。在这一过程中，两部分气体体积的增量都相同，L_1 中的气体对 L_2 中的气体做功，同时 L_2 中的气体对外界做功，经过一段时间后，压强和温度开始降低，直至达到新的平衡。

由于 M_1 是导热的，故加热过程中 L_1 与 L_2 内的气体的温度始终相同。加热前后，两部分气体的状态方程为

$$\begin{cases} p_1V_1 = \nu_1RT \\ p_2V_2 = \nu_2RT \end{cases} \tag{3.39}$$

和

$$\begin{cases} p_{10}V_{10} = \nu_1RT_0 \\ p_{20}V_{20} = \nu_2RT_0 \end{cases} \tag{3.40}$$

由式(3.39)，(3.40)，可得

$$\frac{p_1 V_1}{\nu_1} = \frac{p_2 V_2}{\nu_2} = \frac{(2p_0 - p_1)V_2}{\nu_2}$$

从而可解出

$$p_1 = \frac{2\nu_1 p_0 V_2}{2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1}$$

同理，有

$$p_{10} = \frac{2\nu_1 p_0 V_{20}}{2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10}}$$

则

$$\begin{aligned}
p_1 - p_{10} &= \frac{2\nu_1 p_0 V_2}{2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1} - \frac{2\nu_1 p_0 V_{20}}{2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10}} \\
&= \frac{2\nu_1 p_0[V_2(2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10}) - V_{20}(2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1)]}{(2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1)(2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10})} \\
&= \frac{2\nu_1 p_0(\nu_2 V_{10} V_2 - \nu_2 V_{20} V_1)}{(2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1)(2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10})} \\
&= \frac{2\nu_1 p_0[\nu_2 V_{10}(V_{20} + \Delta V) - \nu_2 V_{20}(V_{10} + \Delta V)]}{(2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1)(2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10})} \\
&= \frac{2\nu_1 p_0(\nu_2 V_{10}\Delta V - \nu_2 V_{20}\Delta V)}{(2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1)(2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10})} \\
&= \frac{2\nu_1 \nu_2 p_0(V_{10} - V_{20})\Delta V}{(2\nu_1 V_2 + \nu_2 V_1)(2\nu_1 V_{20} + \nu_2 V_{10})}
\end{aligned}$$

由于上式中的分母一定是正值，ΔV 一定大于零，所以 $p_1 - p_{10}$的正负号与 $V_{10} - V_{20}$一致，结果无非有三种：

(a) $V_{10} = V_{20}$，这时必然有 $p_1 = p_{10}$，$p_2 = p_{20}$；

(b) $V_{10} > V_{20}$，这时必然有 $p_1 > p_{10}$，$p_2 < p_{20}$；

(c) $V_{10} < V_{20}$，这时必然有 $p_1 < p_{10}$，$p_2 > p_{20}$。

【例 3.9】（第 26 届全国中学生物理竞赛复赛试题） 火箭通过高速喷射燃气产生推力。设温度为 T_1、压强为 p_1的炽热高压气体在燃烧室内源源不断生成，并通过管道由狭窄的喷气口排入压强为 p_n的环境。假设燃气可视为理想气体，其摩尔质量为 μ，每摩尔燃气的内能为 $u = c_V T$（c_V是常量，T 为燃气的绝对温度）。在快速流动过程中，对管道内任意处的两个非常靠近的横截面间的气体，可以认为它与周围没有热交换，但其内部达到平衡状态，且有均匀的压强 p、温度 T 和密度 ρ，它们的数值随着流动而不断变化，并满足绝热方程 $pV^{(c_V+R)/c_V} = C$（恒量），式中 R 为普适气体常量，求喷气口处气体的温度及气体相对于火箭的喷射速度。

解 对于本题，可以这样理解：燃烧室内生成的气体温度为 T_1，压强为 p_1，向喷口运动的过程中，由于速度很高，气体之间来不及发生热交换，气体与外界也没有热交换，即任何一部分气体所经历的都是绝热过程；同时，对体积足够小的一团气体来说，尽管其状态迅速变化，但各部分的状态是一样的，可视为均匀气体。由于气体不断地绝热膨胀，内能变化，同时其他气体对这一团气体做功，使其产生运动，具有动能。

这样一来，问题就变得十分简单了。不妨取非常少的质量为 m 的一部分气体，其物质的量为 $\nu = m/\mu$，设$(c_V + R)/c_V = \gamma$。由于经历准静态的绝热过程，$pV^\gamma = C$（恒量），按气体状态方程，$pV = \nu RT$，所以 $p(\nu RT/p)^\gamma = C$，即

$$\frac{T^{\gamma}}{p^{\gamma-1}} = C(\nu R)^{-\gamma}$$

亦为恒量。因而在喷口处气体的温度为

$$T_n = \left(\frac{p_n}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_1$$

下面讨论做功的情况。在喷管中取极薄的一层气体，如图 3.23 所示，该层气体被靠近燃烧室一侧的其他气体推动，同时它也推动靠近喷口一侧的气体。即左侧气体对这一层气体做功，这层气体又对其右侧气体做功。

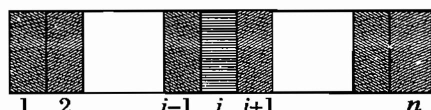


图 3.23　喷管中气体的移动过程

在管道中，该层气体在移向喷孔的过程中，状态在不断地变化着。若将管道分为许多薄层，上述气体在经历第 i 层时，状态为(p_i, V_i, T_i)，薄层的厚度为 l_i。

该气体从第 i 层移动到第$i+1$ 层的过程中，左侧气体对其做的功为

$$p_{i-1} S_{i-1} l_{i-1} = p_{i-1} V_{i-1}$$

该层气体对右侧的气体做的功为

$$p_i S_i l_i = p_i V_i$$

则其他部分气体对该层气体做的总功为

$$W_i = p_{i-1} V_{i-1} - p_i V_i$$

同理，该层气体从第 $i+1$ 层移动到第 $i+2$ 层的过程中，其他气体对其做的总功为

$$W_{i+1} = p_i V_i - p_{i+1} V_{i+1}$$

因而上述两过程中，其他气体对这部分气体做的总功为

$$\begin{aligned} W_i + W_{i+1} &= p_{i-1} V_{i-1} - p_i V_i + p_i V_i - p_{i+1} V_{i+1} \\ &= p_{i-1} V_{i-1} - p_{i+1} V_{i+1} \end{aligned}$$

以此类推，这一层气体从燃烧室移动到喷口，压强从 p_1变为 p_n，体积从 V_1变为 V_n，其他气体对其做的总功为

$$W = p_1 V_1 - p_n V_n$$

由于可将其视作理想气体，所以

$$W = p_1 V_1 - p_n V_n = \nu R(T_1 - T_n) = \nu R\left[1 - \left(\frac{p_n}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] T_1$$

按照热力学第一定律，外界所做的功等于这层气体动能和内能的增量，即

$$W = \Delta U + \Delta E_{\mathrm{k}}$$

由于这团气体在燃烧室中的速度可认为等于 0，所以

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m v^2$$

内能的增量为

$$\begin{aligned} \Delta U = \nu c_V(T_n - T_1) &= \nu c_V\left[\left(\frac{p_n}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] T_1 \\ &= \nu c_V\left[\left(\frac{p_n}{p_1}\right)^{\frac{R}{c_V+R}} - 1\right] T_1 \end{aligned}$$

于是

$$\nu R\left[1-\left(\frac{p_n}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]T_1=\frac{1}{2}mv^2+\nu c_V\left[\left(\frac{p_n}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]T_1$$

解得气体在喷口处的速度为

$$v=\sqrt{\frac{2}{\mu}(c_V+R)\left[1-\left(\frac{p_n}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]T_1}$$

而

$$\gamma-1=\frac{c_V+R}{c_V}-1=\frac{R}{c_V}$$

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}=\frac{R/c_V}{(c_V+R)/c_V}=\frac{R}{c_V+R}$$

从而解得

$$v=\sqrt{\frac{2}{\mu}(c_V+R)\left[1-\left(\frac{p_n}{p_1}\right)^{\frac{R}{c_V+R}}\right]T_1}$$

点评 本题的要点和难点在于如何得到外界对这一部分气体做功的公式 $W=p_1V_1-p_nV_n$。在大学中，这一公式是在分析焦耳-汤姆孙实验中得到的。这一结论对多数大学生而言都是较难把握的，因而以此要求高中生似乎有点过分。这样的题目即使对优秀的高中生而言也属于偏题、怪题。同样，本届预赛中的热学试题和后面要提到的复赛中的光学试题，数学处理上过于复杂和困难，影响了学生对物理问题的分析。据作者统计，本届预赛、复赛的成绩大幅下降。这正是选题不当造成的。在全国性的考试中，不恰当地设置对于绝大多数学生都难以逾越的障碍，是非常不可取的。

【例 3.10】 图 3.24 所示的为一放在支架上的直立汽缸，其上部圆筒的体积为 V_m，内有一质量为 $2m$、截面面积为 $2S$ 的很薄的活塞 A。下部圆筒足够长，内有一质量为 m、截面面积为 S 的活塞 B。两圆筒由一细而短的管道连通。活塞均可在各自的圆筒内无摩擦地上下滑动。活塞 A 的上方盛有 1 mol 的理想气体，活塞 A，B 之间盛有 2 mol 的同种理想气体。达到平衡时，A 上方气体的温度为 T_0，A，B 之间气体的体积大于 V_m。该理想气体每摩尔的内能 U 可用 $U=cT$ 来表示，其中 c 为恒量，T 为热力学温度。设活塞、汽缸壁、管道都是不导热的，活塞 B 处的大气压强为 p_0。现通过上圆筒顶部的电热丝 L 对 A 上方的气体缓慢加热，若在整个过程中传递给 A 上方气体的热量为 Q_0，问：

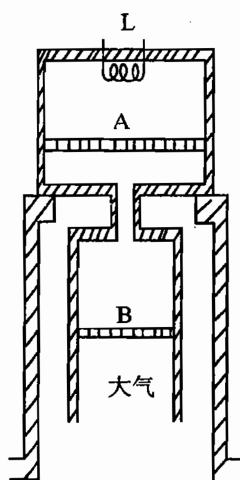


图 3.24 例 3.10 中的装置

(1) 在达到平衡时，A 上方气体的温度 T_f 等于多少？

(2) 在加热过程中，活塞 B 对大气所做的功 W 等于多少？

解 如图 3.25 所示，由于活塞 A，B 都可以无摩擦地滑动，而活塞 B 之外是大气，压强不变。因而上部筒中的气体吸热膨胀，对中间筒中的气体做功，中间筒中的气体推动活塞 B 对大气做功。中间筒中气体的压强始终等于大气压强 p_0，因而上部圆筒中气体的压强也维持不变。

(1) 设上部圆筒中的气体压强为 p_1，下部圆筒中的气体压强为 p_2。根据力学平衡条件，可得

$$p_2 = p_0 - \frac{mg}{S}$$

$$p_1 = p_2 - \frac{2mg}{2S} = p_0 - \frac{2mg}{S}$$

设上部圆筒中的气体体积变为 V_1，加热过程中活塞 A 对中间筒做的功为

$$W_1 = p_1(V_1 - V_m)$$

加热前后上部气体的状态方程为 $p_1 V_m = \nu_1 RT_0$ 和 $p_1 V_1 = \nu_1 RT_f$，$\nu_1 = 1$ mol，则

$$W_1 = p_1(V_1 - V_m) = R(T_f - T_0)$$

上部气体内能的增加为 $\Delta U_1 = c(T_f - T_0)$，按照热力学第一定律，有

$$Q_0 = W_1 + \Delta U_1 = p_1(V_1 - V_m) + c(T_f - T_0)$$
$$= R(T_f - T_0) + c(T_f - T_0)$$

解得

$$T_f = \frac{Q_0}{R + c} + T_0$$

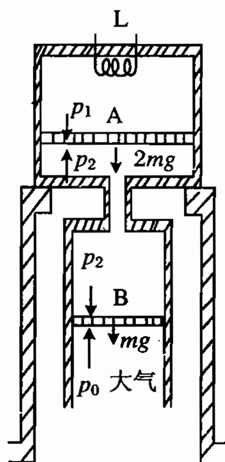


图 3.25　系统中的各个参数

(2) 加热过程中 A 内的气体体积膨胀为

$$V_1 - V_m = \frac{R}{p_1}(T_f - T_0) = \frac{R}{p_0 - \frac{2mg}{S}} \frac{Q_0}{R + c}$$

然而由于中间筒内的气体压强不变，而活塞 A,B 又是绝热的，因此推动中间筒中的气体整体运动，而中间筒中的气体性质不变，活塞 B 推开大气的体积为 $V_1 - V_m$，且由于 p_2保持不变，所以活塞 B 对外做的功为

$$W_2 = p_2(V_1 - V_m) = \left(p_0 - \frac{mg}{S}\right)\frac{R}{p_0 - \frac{2mg}{S}} \frac{Q_0}{R + c}$$

【例 3.11】 如图 3.26 所示，在一个质量为 M、内部横截面面积为 A 的竖直放置的绝热气缸中，用活塞封闭了一定量的温度为 T_0的理想气体。活塞是绝热的，活塞质量以及活塞和气缸之间的摩擦力可忽略不计。已知大气压强为 p_0，重力加速度为 g。现将活塞缓慢上提，当活塞到达气缸开口处时，气缸刚好离开地面。又知理想气体在缓慢变化的绝热过程中 pV^γ保持不变，其中 p 是气体的压强，V 是气体的体积，γ 是一常数。根据以上所述，求出活塞到达气缸开口处时气体的温度。

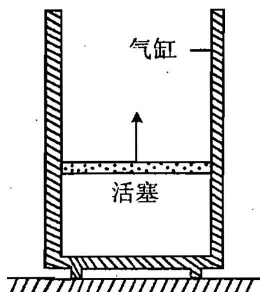


图 3.26　例 3.11 中的装置

解　在提升活塞的过程中，气缸中的气体经历一个准静态的绝热过程。

气缸能够刚好离开地面，说明上提的力恰等于气缸的重力(此处忽略了气体的重力)。此时，活塞的力学平衡条件为

$$Mg + pA = p_0$$

则据此可求得气缸内气体的压强为

$$p = p_0 - \frac{Mg}{A}$$

气缸中气体初态、末态的状态方程分别为 $p_0V_0 = \nu RT_0$ 和 $pV = \nu RT$。绝热过程中，$p_0V_0^\gamma = pV^\gamma$，由此可得到

$$V = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_0$$

因此有

$$pV = p^{1-\frac{1}{\gamma}}p_0^{\frac{1}{\gamma}}V_0 = nRT$$

从而可得到末态时缸中气体的温度为

$$T = \frac{p^{1-\frac{1}{\gamma}}p_0^{\frac{1}{\gamma}}}{p_0}T_0 = \frac{p^{1-\frac{1}{\gamma}}}{p_0^{1-\frac{1}{\gamma}}}T_0 = \left(1 - \frac{Mg}{p_0A}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}T_0$$

【例 3.12】 图 3.27 所示的为一种测量气体定压比热与定容比热关系 c_p/c_V 的装置，其中 G 是一个容积适宜的瓶子，装有与环境相通的阀门 K 并与压力计相连，瓶内充满待测气体，压强略高于环境，压强差为 h_i（用水银柱的高度表示）。短暂开启阀门 K，使瓶内压力与环境相同，然后关闭阀门，等瓶内气体重新与环境达到平衡，这时压强差为 h_f。试据此求出 c_p/c_V。

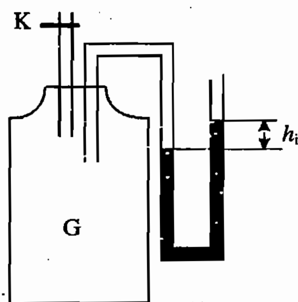


图 3.27　例 3.12 中的装置

解　初态瓶中气体物质的量为 ν_i，其状态方程为

$$p_iV = \nu_iRT \tag{3.41}$$

开启阀门，其中的气体绝热膨胀，总体积为 V'，温度为 T'，状态方程为

$$p_0V' = \nu_iRT' \tag{3.42}$$

其中有一部分气体进入大气中。

刚刚关闭阀门时，瓶中气体的状态方程为

$$p_0V = \nu_fRT' \tag{3.43}$$

其中 ν_f 为瓶中剩余气体物质的量。由式(3.42)，(3.43)，可得

$$\frac{\nu_i}{\nu_f} = \frac{V'}{V} \tag{3.44}$$

之后瓶中气体的温度逐渐升高，直至与外界的相同，重新达到平衡后，状态方程为

$$p_fV = \nu_fRT \tag{3.45}$$

气体绝热膨胀过程中遵循以下关系：

$$p_iV^\gamma = p_0V'^\gamma \tag{3.46}$$

其中，$\gamma = c_p/c_V$。于是由方程(3.41)，(3.44)～(3.46)，可得

$$\frac{p_i}{p_f} = \frac{\nu_i}{\nu_f} = \frac{V'}{V} = \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{3.47}$$

对式(3.47)的两端求对数，得到

$$\gamma = \frac{\ln\frac{p_i}{p_0}}{\ln\frac{p_i}{p_f}} = \frac{\ln\frac{p_i}{p_0}}{\ln\left(\frac{p_i}{p_0}\frac{p_0}{p_f}\right)} = \frac{\ln\frac{p_i}{p_0}}{\ln\frac{p_i}{p_0} - \ln\frac{p_f}{p_0}}$$

其中的压强分别为 $p_0=\rho g h_0$，$p_i=\rho g(h_0+h_i)$，$p_f=\rho g(h_0+h_f)$，则

$$\gamma=\frac{\ln\left(1+\frac{h_i}{h_0}\right)}{\ln\left(1+\frac{h_i}{h_0}\right)-\ln\left(1+\frac{h_f}{h_0}\right)}$$

由于 $h_i/h_0\ll 1$，$h_f/h_0\ll 1$，作近似计算，有

$$\ln\left(1+\frac{h_i}{h_0}\right)\approx\left(1+\frac{h_i}{h_0}\right)^{-1}\frac{h_i}{h_0}\approx\left(1-\frac{h_i}{h_0}\right)\frac{h_i}{h_0}\approx\frac{h_i}{h_0}$$

最后得到

$$\gamma=\frac{h_i}{h_i-h_f}$$

【例 3.13】 如图 3.28 所示，瓶中盛有气体，一横截面积为 A 的玻璃管插入瓶内，玻璃管内放一质量为 m 的金属球（等同于活塞）。设小球在平衡位置时，气体的体积为 V，压强为 $p=p_0+mg/A$。将小球稍向下移动然后放手，小球以周期 T 在平衡位置附近做简谐振动。根据这一现象测量 γ。

解 如图 3.29 所示，设小球在平衡位置时，坐标 $y=0$，当小球处于 y 时，气体的体积为

$$V_y=V+Ay$$

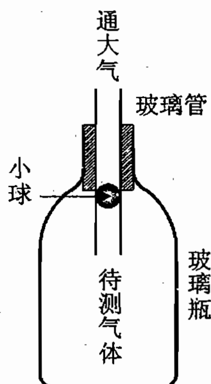


图 3.28 例 3.13 中的装置

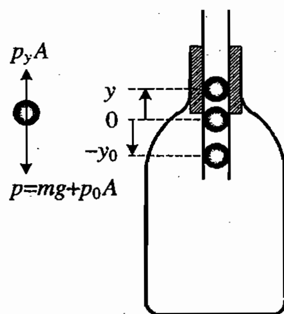


图 3.29 小球的受力分析

在小球的振动过程中，瓶中的气体经历准静态的绝热过程，满足关系式

$$p_y(V+Ay)^\gamma=pV^\gamma$$

算得压强为

$$p_y=\frac{pV^\gamma}{(V+Ay)^\gamma}=\frac{p}{\left(1+\frac{Ay}{V}\right)^\gamma}$$

由于管的截面较小，所以可作近似：

$$p_y\approx\frac{p}{1+\frac{\gamma Ay}{V}}\approx p\left(1-\frac{\gamma Ay}{V}\right)$$

(a) 小球受到的准弹性力为

$$p_yA - pA \approx p\left(1 - \frac{\gamma Ay}{V}\right)A - pA = -\frac{\gamma pA^2}{V}y$$

回复力系数为

$$k = \frac{\gamma pA^2}{V}$$

（b）小球的振动频率为

$$f = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma pA^2}{mV}}$$

或振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mV}{\gamma pA^2}}$$

（c）测量得

$$\gamma = \frac{4\pi^2 mV}{p(AT)^2} = \frac{4\pi^2 mV}{(mg + p_0A)(AT)^2}$$

【例 3.14】 如图 3.30 所示，在一个封闭的高为 H、截面面积为 S 的绝热气缸中，有一个质量为 m 的活塞 A 把气缸分成上下两部分，活塞可在缸内贴着缸壁无摩擦地上下滑动。气缸顶部与 A 之间串联着劲度系数分别为 k_1 和 k_2 的轻质弹簧。A 的上方为真空，下方充有一定质量的理想气体。已知体系处于平衡状态，A 所在处的高度（其下表面距气缸底面的距离）与两弹簧总共的压缩量相等，皆为 $h_1 = H/4$。现给电炉丝 R 通以电流对气体加热，使 A 从高度 h_1 处开始上升，停止加热后系统达到平衡时，活塞的高度为 $h_2 = 3H/4$。求此过程中气体吸收的热量 ΔQ。（已知当体积不变时，每摩尔该气体温度每升高 1 K 吸收的热量为 $3R/2$，其中 R 为普适气体常量。在整个过程中假设弹簧始终服从胡克定律。）

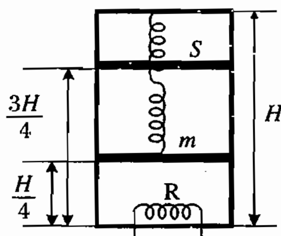


图 3.30　例 3.14 中的装置

解　轻质弹簧串联，各处受力相等，即 $f = k_1\Delta x_1 = k_2\Delta x_2$，总的形变为

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{f}{k_1} + \frac{f}{k_2}$$

于是弹性系数（即劲度系数）为

$$k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$$

弹簧的原长为 H，初始时形变为 $H/4$，过程结束时形变为 $3H/4$，活塞上升 $H/2$，则过程中机械能的改变为

$$\Delta E = mg\frac{H}{2} + \frac{1}{2}k\left(\frac{3H}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{H}{4}\right)^2$$

研究对象为气缸中的气体，初态时，

$$p_1 = \frac{f_1 + mg}{S}, \quad V_1 = \frac{HS}{4}, \quad p_1V_1 = \mu RT_1$$

末态时，

$$p_2 = \frac{f_2 + mg}{S}, \quad V_2 = \frac{3HS}{4}, \quad p_2V_2 = \mu RT_2$$

由热力学第一定律，得

$$Q = \Delta U + W = \mu R \Delta T + \Delta E$$

其中

$$\mu R \Delta T = \mu R(T_2 - T_1) = p_2 V_2 - p_1 V_1 = \frac{f_2 + mg}{S}\frac{3HS}{4} - \frac{f_1 + mg}{S}\frac{HS}{4}$$

$$f_1 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\frac{H}{4}, \quad f_2 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\frac{3H}{4}$$

将上述各量代入即可得到总热量 Q。

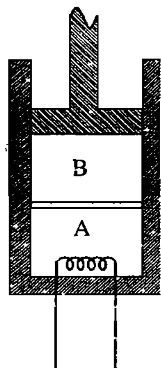


图 3.31 例 3.15 中的装置

【例 3.15】 如图 3.31 所示，带有活塞的气筒中间有一轻薄的隔板，活塞可以无摩擦地自由滑动，气筒和活塞都是绝热的，外部压强始终为 1 atm。初始时，隔板将气筒分为相等的两部分，其中各有 1 mol 氮气，温度为 300 K，压强为1.00 atm。通过底部的电热丝缓缓提供 80 cal 的热量，在下列两种情况下分别求两部分温度的改变及所吸收的热量（已知氮气的定容比热为$5R/2$）：

（1）隔板位置固定，导热良好；

（2）隔板是绝热的，但可以无摩擦地自由滑动。

解 气体所经历的是准静态过程，由于活塞可以无摩擦地自由滑动，所以 B 中气体的压强始终为 1 atm。理想气体的内能为 $\Delta U = c_V \Delta T$，普适气体常数中单位以卡代替焦耳，可表示为 $R = 1.987$ cal/(mol・K)。

（1）由于隔板固定、导热，两部分气体的温度相等。A 中的气体内能增加，但不做功；B 中的气体受热，内能增加，等压膨胀，做的功为 $W_B = p_0(V_B - V_0)$。

按照热力学第一定律，有

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U_A + \Delta U_B + W_B \\ &= c_V(T - T_0) + c_V(T - T_0) + p_0(V_B - V_0) \end{aligned}$$

由气体的状态方程 $p_0 V_0 = RT_0$，$p_0 V_B = RT$，可得 $p_0(V_B - V_0) = R(T - T_0)$，则

$$\begin{aligned} Q &= 2c_V(T - T_0) + R(T - T_0) \\ &= 2 \times \frac{5R}{2}(T - T_0) + R(T - T_0) = 6R(T - T_0) \end{aligned}$$

从而得到温度为

$$T = T_0 + \frac{Q}{6R} = 300 + \frac{80}{1 \times 6 \times 1.987} = 306.7 \quad (\text{K})$$

吸收的热量为

$$Q_A = c_V(T - T_0) = 33.3 \quad (\text{cal})$$

$$Q_B = c_p(T - T_0) = (c_V + R)(T - T_0) = 46.7 \quad (\text{cal})$$

（2）隔板绝热、无摩擦滑动，两部分气体的压强相等。B 中的气体状态不变；A 中的气体受热，内能增加，等压膨胀，做功。因此，有

$$Q = \Delta U_A + W_A = c_V(T - T_0) + p_0(V_A - V_0)$$

这时气体的状态方程分别为 $p_0 V_0 = RT_0$ 和 $p_0 V_A = RT$，则 $p_0(V_A - V_0) = R(T - T_0)$，所以

$$Q = c_V(T - T_0) + R(T - T_0)$$

$$= \frac{5R}{2}(T - T_0) + R(T - T_0) = \frac{7}{2}R(T - T_0)$$

两部分气体的温度分别为

$$T_A = T_0 + \frac{2Q}{7R} = 300 + \frac{2 \times 80}{1 \times 7 \times 1.987} \approx 311.5 \quad (\text{K})$$

$$T_B = T_0$$

吸收的热量分别为

$$Q_A = c_p(T - T_0) = Q = 80\ \text{cal}, \quad Q_B = 0$$

【例 3.16】 如图 3.32 所示，两气筒中间通过一个带阀门的细管相连，整个系统是绝热的。两气筒的容积分别为 V_1, V_2，初始时，各储有温度分别为 T_1, T_2，压强分别为 p_1, p_2 的两种气体。打开阀门使其缓缓混合。若这两种气体的 $\gamma = c_p/c_V$ 等值，求达到平衡时的温度和压强。

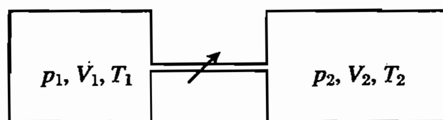


图 3.32 例 3.16 中的装置

解 打开阀门后，气体均经历一个膨胀过程，然后达到平衡。由于系统绝热，且不对外做功，故总内能不变，即

$$U_1 + U_2 = U_1' + U_2'$$

也可以表示为

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$$

而根据热力学第一定律，每一部分气体所吸收的热量都用于做功和增加内能，即

$$Q_1 = \Delta U_1 + W_1, \quad Q_2 = \Delta U_2 + W_2$$

于是有

$$Q_1 + Q_2 = \Delta U_1 + \Delta U_2 + W_1 + W_2$$

由 $Q_1 + Q_2 = 0$，可得

$$W_1 + W_2 = 0$$

可以假设两部分气体之间没有热交换，即每一部分气体都绝热膨胀，则另一部分气体对其做的功分别为

$$W_1 = \frac{1}{\gamma - 1}[p_1'(V_1 + V_2) - p_1 V_1]$$

$$W_2 = \frac{1}{\gamma - 1}[p_2'(V_1 + V_2) - p_2 V_2]$$

其中，p_1', p_2' 分别是膨胀后每一部分气体的分压。从而可得到

$$p_1'(V_1 + V_2) - p_1 V_1 + p_2'(V_1 + V_2) - p_2 V_2 = 0$$

解得

$$p = p_1' + p_2' = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} \tag{3.48}$$

将上述用压强表示的功用温度表示。根据状态方程 $p_1 V_1 = \nu_1 R T_1$，$p_1'(V_1 + V_2) = \nu_1 R T$，可得到

$$p_1'(V_1 + V_2) - p_1 V_1 = \nu_1 R(T - T_1)$$

同理，有

$$p_2'(V_1 + V_2) - p_2 V_2 = \nu_2 R(T - T_2)$$

则

$$W_1 = \frac{\nu_1 R}{\gamma - 1}(T - T_1), \quad W_2 = \frac{\nu_2 R}{\gamma - 1}(T - T_2)$$

即

$$\frac{\nu_1 R}{\gamma - 1}(T - T_1) + \frac{\nu_2 R}{\gamma - 1}(T - T_2) = 0$$

将 $\nu_1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1}$，$\nu_2 = \frac{p_2 V_2}{RT_2}$代入，可得到

$$T = \frac{T_1 T_2 (p_1 V_1 + p_2 V_2)}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1} \tag{3.49}$$

当然，也可以直接利用状态方程对式(3.48)进行变换，即得到

$$\frac{(\nu_1 + \nu_2)RT}{V_1 + V_2} = \frac{\nu_1 RT_1 + \nu_2 RT_2}{V_1 + V_2}$$

解得

$$T = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\frac{p_1 V_1}{RT_1} T_1 + \frac{p_2 V_2}{RT_2} T_2}{\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2}} = \frac{T_1 T_2 (p_1 V_1 + p_2 V_2)}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1}$$

【例 3.17】 设一竖直放置的容器中装有空气，上端有一重活塞。初始时，容器内的空气与环境的温度相同。将活塞缓缓提升 Δx，将容器隔热，并释放活塞。求活塞停止振动后下降的距离。

解 活塞提升为准静态过程，气体等温，外界做功。释放后，活塞下降，并振动，气体经历绝热过程。活塞很重，其产生的压强较大，不可忽略，所以活塞下降和振动的过程不能认为是准静态的，因而不能用方程 pV^γ = 常数来计算。

如图 3.33 所示，设活塞的横截面面积为 S，可得初态时气体的压强为

$$p_1 = \frac{mg}{S} + p_0$$

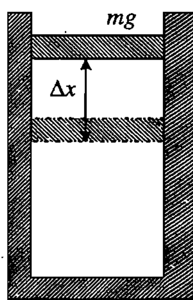


图 3.33 活塞提升

初态的状态方程为$\left(\frac{mg}{S} + p_0\right)x_0 S = \nu RT_0$，即有以下关系式：

$$(mg + p_0 S)x_0 = \nu RT_0 \tag{3.50}$$

提升过程中气体的温度与环境的相同，是等温过程，设压强为 p_2，则根据状态方程

$$p_1 x_0 = p_2 (x_0 + \Delta x)$$

得到

$$p_1 = \frac{(mg + p_0 S)x_0}{(x_0 + \Delta x)S} \tag{3.51}$$

释放后活塞振动，设静止后，末态时活塞的高度为 x，如图 3.34 所示。由于振动过程是绝热的，故外界(其实就是重力和大气压)所做的功等于气体内能的增量，即

$$(mg + p_0 S)(x_0 + \Delta x - x) = \nu c_V (T - T_0) \tag{3.52}$$

静止时，气体的状态方程为$\left(\frac{mg}{S} + p_0\right)xS = \nu RT$，由此可得

$$(mg + p_0 S)x = \nu RT \tag{3.53}$$

于是由式(3.50)，(3.53)，得到

$$\nu R(T - T_0) = (mg + p_0 S)(x - x_0) \quad (3.54)$$

将式(3.54)代入式(3.52),有

$$x_0 + \Delta x - x = \frac{c_V}{R}(x - x_0)$$

将空气视作理想气体,$c_V = 5R/2$,所以上式即为

$$x_0 + \Delta x - x = \frac{5}{2}(x - x_0)$$

解得

$$x = x_0 + \frac{2}{7}\Delta x$$

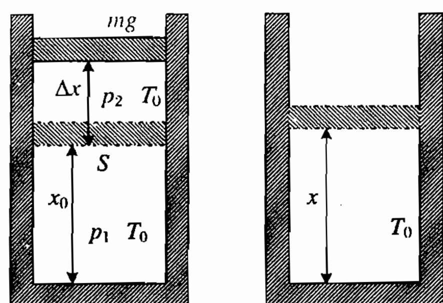


图 3.34　过程中的各个物理参数

活塞下降的高度为

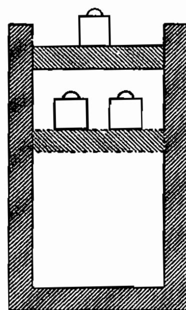
$$x_0 + \Delta x - x = \frac{5}{7}\Delta x$$

点评　本题中并没有用到式(3.52),即下降的距离与将活塞提升后的压强无关,这是由于提升过程是等温的,气体的内能没有改变。后面的绝热过程只是将活塞由重力和大气压力而获得的动能转化为气体内能的过程,当然内能的增量只与提升的高度有关。另外,由于大气压和活塞的质量都是恒量,对气体所产生的压强也是一个恒量,因而在本题中也可以用一个常量代替它们,没有必要单独写出。这可以使解题过程简明一些。

【例 3.18】　如图 3.35 所示,绝热圆筒的活塞上有两个相同的重砝码,活塞下有 1 mol 单原子气体,初始温度为 T_0。先拿掉一个砝码,过一段时间再将其放回,求圆筒内气体温度的变化。

解　很显然,活塞上升过程和下降过程中,气体各部分不处在平衡态,所以气体经历的都不是准静态过程,因而不能采用过程中的参量,只能待气体系统平衡后再分析。由于气体的初态(两砝码)、中间态(一砝码)、末态(两砝码)都是平衡态,可以应用状态方程;而变化过程中外界所做的功导致气体内能的变化可以用热力学第一定律表述。

设每个砝码的质量为 m。若认为砝码很重,可以不计大气压和活塞的质量,则分析过程如下(图 3.36):


图 3.35　例 3.18 中的装置

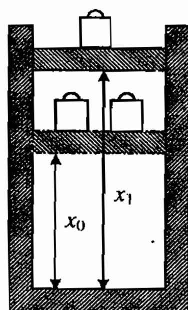


图 3.36　活塞的移动

初态时,

$$\frac{2mg}{S}x_0 S = RT_0 \quad (3.55)$$

中间态时,

$$\frac{mg}{S}x_1 S = RT_1 \tag{3.56}$$

按照热力学第一定律，有

$$mg(x_1 - x_0) = c_V(T_0 - T_1) \tag{3.57}$$

由式(3.55)，(3.56)，可得

$$mg(x_1 - x_0) = R\left(T_1 - \frac{T_0}{2}\right) \tag{3.58}$$

将式(3.58)代入式(3.57)，得到 $R(T_1 - T_0/2) = c_V(T_0 - T_1)$，而 $c_V = 3R/2$，从而可得

$$x_1 = \frac{8x_0}{5}, \quad T_1 = \frac{4}{5}T_0 \tag{3.59}$$

末态时，

$$2mgx = RT \tag{3.60}$$

按照热力学第一定律，有

$$2mg(x_1 - x) = c_V(T - T_1) \tag{3.61}$$

由式(3.56)，(3.59)，可得

$$2mg(x_1 - x) = R(2T_1 - T) \tag{3.62}$$

将式(3.61)代入式(3.60)，有

$$T = \frac{7}{5}T_1 = \frac{28}{25}T_0, \quad x = \frac{28x_0}{25} \tag{3.63}$$

于是得到

$$T - T_0 = \frac{3}{25}T_0 \tag{3.64}$$

若设活塞的质量为 m_0，大气压强为 p_0，分析过程如下：

初态时，状态方程为

$$\left(\frac{m_0 g}{S} + p_0 + \frac{2mg}{S}\right)x_0 S = RT_0 \tag{3.65}$$

去掉一个砝码后，气体绝热膨胀，对外做功导致内能改变，即

$$\left[\left(\frac{m_0 g}{S} + p_0\right)S + mg\right](x_1 - x_0) = c_V(T_0 - T_1) \tag{3.66}$$

重新达到平衡后，状态方程为

$$\left(\frac{m_0 g}{S} + p_0 + \frac{mg}{S}\right)x_1 S = RT_1 \tag{3.67}$$

由式(3.65)～(3.67)，可得

$$x_1 = \frac{5(m_0 g + p_0 S) + 7mg}{5(m_0 g + p_0 S) + 5mg}x_0 \tag{3.68}$$

$$T_1 = \frac{T_0}{4}\left[3 + \frac{2(m_0 g + p_0 S) + 2mg}{(m_0 g + p_0 S) + 2mg}\right] \tag{3.69}$$

将砝码再放回，气体经历一个绝热压缩过程，外界对其做功，内能的改变为

$$\left[\left(\frac{m_0 g}{S} + p_0\right)S + 2mg\right](x_1 - x) = c_V(T - T_1) \tag{3.70}$$

末态时，状态方程为

$$\left(\frac{m_0 g}{S}+p_0+\frac{2mg}{S}\right)xS = RT \tag{3.71}$$

由式(3.67),(3.70),(3.71),可得

$$x = \frac{5(m_0 g + p_0 S) + 7mg}{5(m_0 g + p_0 S) + 10mg}x_1 \tag{3.72}$$

$$T = \frac{T_1}{4}\left[3 + \frac{2(m_0 g + p_0 S) + 4mg}{(m_0 g + p_0 S) + mg}\right] \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} T - T_0 &= \frac{T_1}{4}\left[3 + \frac{2(m_0 g + p_0 S) + 4mg}{(m_0 g + p_0 S) + mg}\right] - T_0 \\ &= \frac{T_0}{16}\left[3 + \frac{2(m_0 g + p_0 S) + 2mg}{(m_0 g + p_0 S) + 2mg}\right]\left[3 + \frac{2(m_0 g + p_0 S) + 4mg}{(m_0 g + p_0 S) + mg}\right] - T_0 \\ &= \left[\frac{3(m_0 g + p_0 S) + 6mg}{8(m_0 g + p_0 S) + 8mg} + \frac{3(m_0 g + p_0 S) + 3mg}{8(m_0 g + p_0 S) + 16mg} - \frac{5}{16}\right]T_0 \end{aligned} \tag{3.74}$$

与忽略大气压强和活塞重力的结果相比,除了计算较为复杂之外,并无新的物理意义。

【例 3.19】 设绝热圆筒中导热轻活塞 A 和不导热重活塞 B 将圆筒分为长度 l 均为 0.4 m 的两室,每室中有 1 mol 单原子气体。活塞 B 可无摩擦运动。对其缓慢加热,使其吸收 200 J 热量。当 A 和器壁间摩擦力为多大时,该活塞将保持不动?

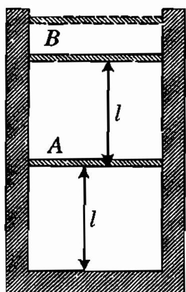


图 3.37 活塞的移动

解 初始时刻,两室中气体的质量、体积、温度相等,因而压强也相等。根据图 3.37,每一部分气体的状态方程均为

$$plS = RT_0 \tag{3.75}$$

其中,$p = p_0 + mg/S$。

吸热后,上室中的气体等压膨胀,推动活塞 B 对外做的功为

$$W = p\Delta lS = R(T - T_0) \tag{3.76}$$

内能的增量为

$$\Delta U_1 = c_V(T - T_0) \tag{3.77}$$

下室中的气体等容升温,与上室中的气体温度相等。由于活塞 A 尚未运动,不做功,所以内能的增量为

$$\Delta U_2 = Q_2 = c_V(T - T_0) \tag{3.78}$$

应用热力学第一定律,得

$$Q = \Delta U_1 + W + \Delta U_2 = 2c_V(T - T_0) + R(T - T_0)$$

而 $c_V = 3R/2$,从而可得

$$Q = 4R(T - T_0) \tag{3.79}$$

下室中气体的状态方程为

$$p_2 lS = RT \tag{3.80}$$

在摩擦力作用下活塞 A 的力学平衡条件为

$$f = (p_2 - p)S \tag{3.81}$$

将式(3.75),(3.79),(3.80)代入式(3.81),得到

$$f = (p_2 - p)S = \frac{RT}{l} - \frac{RT_0}{l} = \frac{Q}{4l}$$

【例 3.20】 设两相同的容器以细管相连,整个系统与外界绝热。初始时,左容器中质量为

m 的活塞下有温度为 T_0、质量为 $m/10$ 的单原子气体，右容器中为真空，质量为 $m/2$ 的活塞在底部，活塞可无摩擦滑动。打开连接管上的阀门，求使两容器连通达到平衡时气体的温度。

解 如图 3.38 所示，连通后，左活塞将滑落至容器底，气体全部进入右侧容器中。若容器的截面面积为 S，则初态、末态气体的状态方程分别为

$$\frac{mg}{S}V_0 = \nu RT_0, \quad \frac{mg}{2S}V = \nu RT$$

图 3.38　例 3.20 中的装置

在题中所述的过程中，重力做功，引起气体的内能改变。利用上述两状态方程，可得到

$$\Delta U = \nu c_V(T - T_0) = \frac{3}{2}\nu R(T - T_0)$$
$$= \frac{3}{2}\frac{mg}{S}\left(\frac{1}{2}V - V_0\right) \tag{3.82}$$

对于气体，以其重心高度的变化计算重力势能的变化，则得到外界对气体做的功为

$$W = mg\frac{V_0}{S} + \frac{mg}{10}\frac{V_0}{2S} - \left(\frac{mg}{2}\frac{V}{S} + \frac{mg}{10}\frac{V}{2S}\right) = \frac{1}{20}\frac{mg}{S}(21V_0 - 11V) \tag{3.83}$$

按照热力学第一定律，$W = \Delta U$，由式(3.82)，(3.83)，可得

$$T = \frac{V}{2V_0}T_0 = \frac{51}{52}T_0, \quad V = \frac{51}{26}V_0$$

【例 3.21】 如图 3.39 所示，绝热圆筒两端用绝热活塞 A，B 封闭，中间有一固定的多孔塞 K。初始时，活塞 B 紧靠 K，B 外的压强为 1 atm。K 与 A 之间有质量为 $m = 1$ kg、温度为 90 ℃ 的水。外部作用在 A 上压强为 $p_1 = 10^3$ atm。由于活塞 A 的挤压，水开始缓慢地渗过多孔塞。当挤压过程结束后，多大比例的水蒸发了？（已知水的比热容为 $c = 4.2$ kJ/(kg·K)，汽化热为 $\lambda = 2\,260$ kJ/(kg·K)，认为水的密度与压强无关，活塞可做无摩擦移动。）

解 最终活塞 A 将水全部挤过 K，此过程中，外界做的功为

$$W_1 = p_1\Delta V$$

其中，ΔV 为 1 kg 水的体积，$\Delta V = 10^{-3}$ m³。

如图 3.40 所示，在 K 的右侧，其中气体的压强始终维持在 $p_0 = 1$ atm。由于外界做功，水渗过多孔塞而且温度升高，导致其中部分水成为饱和水蒸气。由于压强为 1 atm，水与水蒸气的最高温度为 100 ℃。

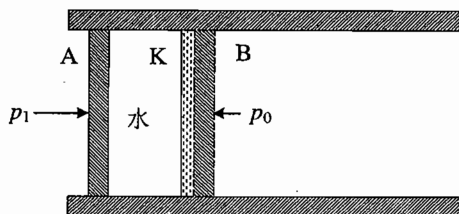


图 3.39　例 3.21 中的装置

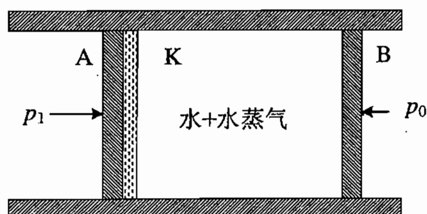


图 3.40　多孔塞的移动

设水汽的质量为 Δm、体积为 V，则水汽的状态方程为为

$$p_0 V = \frac{\Delta m}{\mu} RT$$

在渗透过程中，系统对外界做的功为

$$W_2 = p_0 V$$

水温升高所吸收的热量为

$$Q_1 = mc\Delta T$$

式中，$\Delta T = 5\ \mathrm{K}$。部分水汽化所吸收的热量为

$$Q_2 = \Delta m\lambda$$

则可得能量守恒方程

$$W_1 - W_2 = Q_1 + Q_2$$

即

$$p_1 \Delta V - \frac{\Delta m}{\mu} RT = mc\Delta T + \Delta m\lambda$$

解得

$$\Delta m = \frac{p_1 \Delta V - mc\Delta T}{\frac{RT}{\mu} + \lambda} = 0.032\,5\ \mathrm{kg}, \quad \frac{\Delta m}{m} = 3.25\%$$

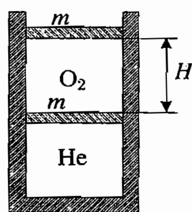


图 3.41　例 3.22 中的装置

【例 3.22】 如图 3.41 所示，直立圆筒形绝热容器被两个质量同为 m 的活塞（从上至下分别记为 A，B）隔开，上部是氧气，下部是氦气。开始时，上、下两部分气体的温度、体积相同，两活塞的间距为 H。缓缓加热下部气体，为使其体积增大 1 倍，需要提供多少热量？经过足够长的时间后，上、下温度又变得相同，此时两活塞的间距又是多少？（设环境为真空，不计筒壁和活塞的热容，活塞 A 是绝热的，活塞 B 几乎不导热，可以认为对下部气体加热过程中没有热量进入上半部分。）

解　设上半部分气体的压强为 p_1，则活塞 A 的平衡条件为 $mg = p_1 S$。初始时，$p_1 = mg/S$。下半部分气体的压强为

$$p_2 = p_1 + \frac{mg}{S} = \frac{2mg}{S}$$

加热时，上部分气体的状态无变化，下部分气体等压膨胀，体积变为 $V_2 = 2V_0 = 2HS$，对外做的功为

$$W = p_2(V_2 - V_0) = p_2 HS$$

内能的增加为

$$\Delta U_2 = \nu_2 c_V (T_2 - T_0) = \frac{c_V}{R} p_2 (V_2 - V_0) = \frac{c_V}{R} p_2 HS$$

吸收的热量为

$$Q_2 = W + \Delta U = \left(1 + \frac{c_V}{R}\right) p_2 HS = \left(1 + \frac{3}{2}\right) \frac{2mg}{S} HS = 5mgH$$

下部分气体的温度为

$$T_2 = \frac{V_2}{V_0} T_0 = 2T_0$$

在两部分气体热交换过程中，上部分气体的温度上升，体积增大，对外做功；下部分气体的温度降低，体积减小，外界对其做功。两部分气体的压强都不变。设平衡后系统的温度为 T。

上部分气体做的功为

$$W_1 = p_1(V_1 - V_0) = \nu_1 R(T - T_0)$$

内能的增量为

$$\Delta U_1 = \nu_1 c_V(T - T_0)$$

设有 ΔQ 的热量从下部分气体传给上部分气体，则

$$\Delta Q = W_1 + \Delta U_1 = \nu_1 R(T - T_0) + \nu_1 c_V(T - T_0)$$
$$= \nu_1(R + c_V)(T - T_0)$$

下部分气体做的功为

$$W_2 = p_2(V_2' - V_2) = \nu_2 R(T - T_2)$$

内能的增量为 $\Delta U_2' = \nu_2 c_V(T - T_2)$，从而有

$$-\Delta Q = W_2 + \Delta U'_2 = \nu_2(R + c_V)(T - T_1)$$

$$\nu_1(R + c_V)(T - T_0) + \nu_2(R + c_V)(T - T_1) = 0$$

$$T = \frac{\nu_1 T_0 + \nu_2 T_1}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\nu_1 + 2\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} T_0$$

上部分气体的体积变为

$$V_1 = \frac{T}{T_0} V_0 = \frac{1 + 2\nu_2/\nu_1}{1 + \nu_2/\nu_1} V_0$$

由于初始时，$p_1 V_0 = \nu_1 R T_0$，$p_2 V_0 = \nu_2 R T_0$，所以 $\nu_2/\nu_1 = p_2/p_1 = 2$，从而有

$$V_1 = \frac{1 + 2 \times 2}{1 + 2} V_0 = \frac{5}{3} V_0$$

即两活塞的间距为 $5H/3$。

第 4 章　热力学循环与热力学第二定律

4.1　循环过程

循环过程是指一个系统从某一状态开始，经历一系列状态变化之后，又回到初始状态的过程。

热力学循环特指某一热力学系统经历了一系列热力学状态变化，最后又回到初始的热力学状态的过程。例如，蒸汽机中的循环过程就是水在锅炉内受热成为高温高压的蒸汽，进入气缸中膨胀、降温，成为液态水，又回到锅炉内的过程；制冷机的循环过程是，制冷剂在压缩机内被压缩成液态，进入交换器，压强减小，体积增大，并吸收热量成为气态，气态的制冷剂进入压缩机，又被压缩为液态。

在热力学循环过程中，参与循环并且状态不断变化的物质称作工作物质，如蒸汽机中的水、制冷剂中的制冷剂等等。所谓循环，就是指工作物质经历了一系列状态变化之后，又回到初始状态的过程。

实际的循环过程中，工作物质的变化是非常复杂的，而且在多数情况下，循环过程中的每一时刻，工作物质各个部分的热力学状态（温度、压强等）也是不尽相同的，即任一时刻工作物质并不处于平衡态，所以实际的过程并不是准静态过程。但是，为了描述循环过程，都是尽可能将实际的过程简化，并假设每一步过程都是准静态的。

在作了上述简化和假设之后，就可以用状态参量（如压强、温度、体积等）描述循环过程中工作物质状态的变化情况。例如，可以用图 4.1 的 $p-V$ 曲线描述工作物质的热力学循环过程，$p-V$ 曲线是一段封闭的曲线。如果将工作物质依次经历 $ABCDA$ 的过程称为**正循环**，则经历 $ADCBA$ 的过程就是**逆循环**。

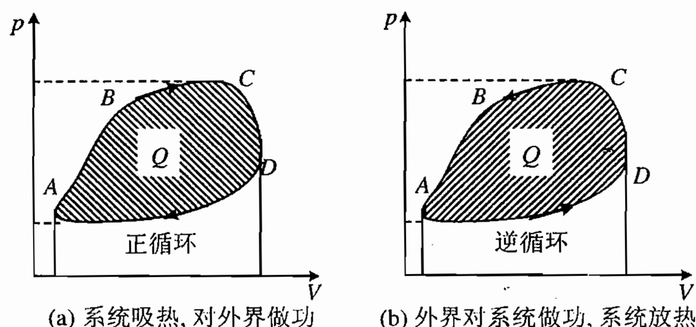


图 4.1　热力学循环

由于 $p-V$ 图中曲线下的面积等于系统所做的功，所以在正循环的 ABC 过程中，系统对外做功，在 DA 过程中，外界对系统做功，而闭合曲线的面积就是系统所吸收的热量。由此可见，该正循环中系统吸热并对外做功。相应地，逆循环 AD 过程中系统对外界做功，CBA 过程中外界对系统做功，闭合曲线的面积是系统所放出的热量。

上述的正循环就是热机循环，系统对外做功；逆循环是制冷机循环，外界从系统吸收热量。无论是对于热机还是对于制冷机，效率都是最关键的，以下将分别予以讨论。

4.2 热机循环

热机是以正循环方式工作的，是将吸收的热量转化为机械功，或者说，热机通过从外界吸收热量使工作物质的内能增加，并将一部分增加的内能通过做功的方式转化为机械能，另一部分增加的内能以热量释放，完成循环，工作物质回到初始状态。

若循环过程中工作物质从外界吸收的总热量为 Q_1，向外界释放的热量为 Q_2，则根据热力学第一定律，系统对外界所做的功就是 $W = Q_1 - Q_2$，做功的效率，或循环热机的效率就是

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \tag{4.1}$$

实际中热机的循环有各种各样的，而且是非常复杂的。以下通过简单的例子研究以理想方式循环的热机的效率。

【例 4.1】 **卡诺循环**及其效率：如图 4.2 和图 4.3 所示，工作物质（气体）在温度恒定的两个热源之间，气体经历循环的过程是：等温膨胀(1→2)、绝热膨胀(2→3)、等温压缩(3→4)、绝热压缩(4→1)，回到初态。若高温热源温度为 T_1，低温热源温度为 T_2，求热机循环的效率。

解 卡诺循环可以用图 4.3 中的 $p-V$ 曲线表示。

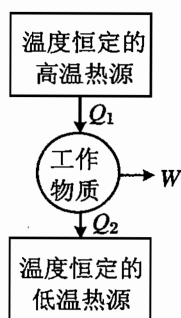


图 4.2 卡诺循环

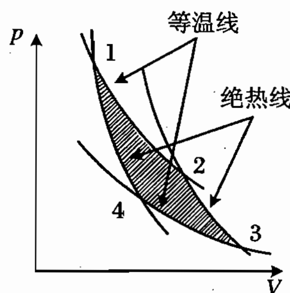


图 4.3 卡诺循环的 $p-V$ 曲线

可以看出，气体在高温热源吸收热量，同时体积膨胀对外做功，并维持温度不变。接着开始绝热过程，体积继续膨胀并对外做功；然后接触低温热源，气体被压缩，温度保持恒定，之后被绝热压缩，回到初态。

吸热只在等温膨胀过程中发生，放热只在等温压缩过程中发生。根据第 3 章中的知识，可知在等温膨胀过程中，气体从外界（高温热源）吸收的热量为

$$Q_1 = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

在等温压缩过程中，气体向低温热源放出的热量为

$$Q_2 = \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

在绝热膨胀过程(2→3)中，$(V_3/V_2)^{\gamma-1} = T_1/T_2$；在绝热压缩(4→1)过程中，$(V_4/V_1)^{\gamma-1} = T_1/T_2$。于是卡诺热机的效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \left(T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}\right) \Big/ \left(T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}\right)$$

由于 $V_3/V_2 = V_4/V_1$，即 $V_3/V_4 = V_2/V_1$，所以有

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \tag{4.2}$$

可见，卡诺热机的效率取决于两热源的温差，高温热源温度越高，低温热源温度越低，则热机的效率越高。

例如，若蒸汽机的锅炉温度为 230 ℃，冷却器的温度为 30 ℃，则效率为

$$\eta = 1 - \frac{303}{503} = 40\%$$

当然，实际的蒸汽机由于各种损耗，其效率最高只有 12%～15%。

【例 4.2】 一定量的理想气体经历以下准静态的循环过程：

(1) 绝热压缩，由(V_1, T_1)到(V_2, T_2)；

(2) 等容吸热，由(V_2, T_2)到(V_2, T_3)；

(3) 绝热膨胀，由(V_2, T_3)到(V_1, T_4)；

(4) 等容放热，由(V_1, T_4)到(V_1, T_1)。

求该循环的效率。

解 循环过程可用图 4.4 表示。

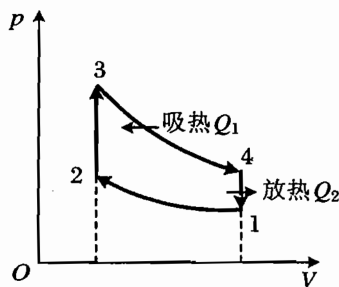


图 4.4 例 4.2 中的循环过程

只有等容过程中吸热放热，于是吸热量为

$$Q_1 = \nu c_V (T_3 - T_2)$$

放热量为

$$Q_2 = \nu c_V (T_4 - T_1)$$

效率为

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

在绝热过程中，$T_2/T_1 = (V_1/V_2)^{\gamma-1}$，$T_3/T_4 = (V_1/V_2)^{\gamma-1}$，因而 $T_2/T_1 = T_3/T_4 = (T_3 - T_2)/(T_4 - T_1)$。于是

$$\eta = 1 - \frac{1}{T_2/T_1} = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}$$

将 V_1/V_2 定义为**压缩比**，记 $r = V_1/V_2$，则该热机的效率为

$$\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$$

这样的循环称作**奥托循环**，或**定容加热循环**。

【例 4.3】 一定量的理想气体经历以下准静态的循环过程：

(1) 绝热压缩,由(V_1, T_1)到(V_2, T_2);

(2) 等压吸热,由(V_2, T_2)到(V_3, T_3);

(3) 绝热膨胀,由(V_3, T_3)到(V_1, T_4);

(4) 等容放热,由(V_1, T_4)到(V_1, T_1)。

求循环的效率。

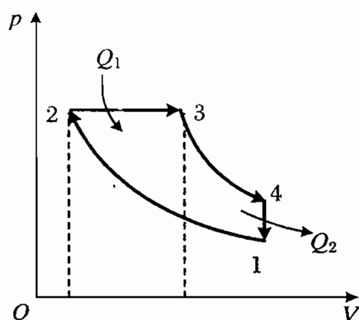


图 4.5 狄塞尔循环

解 上述循环过程称作**狄塞尔循环**,也称作**定压加热循环**.如图 4.5 所示,这是四冲程柴油机的工作循环过程。

在等压过程中吸热,等容过程中放热。

等压吸热量为 $Q_1=\nu c_p(T_3-T_2)$;等容放热量为 $Q_2=\nu c_V(T_4-T_1)$;效率为

$$\eta=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{c_V}{c_p}\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}=1-\frac{1}{\gamma}\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}$$

在等压过程中,$T_3/T_2=V_3/V_2=\rho$,其中 $\rho=V_3/V_2$ 定义为**定压膨胀比**。

在绝热压缩过程中,$T_3/T_4=(V_1/V_3)^{\gamma-1}=\delta^{\gamma-1}$,其中 $\delta=V_1/V_3$ 定义为**绝热膨胀比**。

在绝热压缩过程中,$T_2/T_1=(V_1/V_2)^{\gamma-1}=r^{\gamma-1}$,其中 r 就是**绝热压缩比**。

因此

$$\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}=\frac{\dfrac{T_3}{\delta^{\gamma-1}}-\dfrac{T_3}{\rho r^{\gamma-1}}}{T_3-\dfrac{T_3}{\rho}}=\frac{\dfrac{1}{\delta^{\gamma-1}}-\dfrac{1}{\rho r^{\gamma-1}}}{1-\dfrac{1}{\rho}}$$

又由于 $\delta=r/\rho$,所以

$$\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}=\frac{\dfrac{\rho^{\gamma-1}}{r^{\gamma-1}}-\dfrac{1}{\rho r^{\gamma-1}}}{\dfrac{\rho-1}{\rho}}=\frac{1}{r^{\gamma-1}}\frac{\rho^{\gamma-1}-1}{\rho-1}$$

效率为

$$\eta=1-\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}=1-\frac{1}{\gamma}\frac{1}{r^{\gamma-1}}\frac{\rho^{\gamma-1}-1}{\rho-1}$$

4.3 制冷机循环

制冷机循环是一种逆循环过程,在循环过程中,压缩机对系统做功,将工作物质(气体)压缩,被压缩的气体在热交换器中进一步冷凝为液体,然后通过节流阀降压降温,在冷库中膨胀吸热,蒸发为气体,重新进入压缩机。

这样一来,制冷机的效能就是在低温热源(冷库)吸收的热量 Q_2 与外界对其做功 W 的比值,定义为**制冷系数**,即

$$\varepsilon=\frac{Q_2}{W}\tag{4.3}$$

如果在制冷循环中,工作物质放出的总热量为 Q_1',吸收的总热量为 Q_2',按热力学第一定

律，有 $Q_1' = W + Q_2'$。但需要注意的是，计算制冷系数 ε 时，仅仅计入在低温热源处吸收的热量 Q_2，而 Q_2 与吸收的总热量 Q_2' 是不同的。

【例 4.4】 求逆向卡诺循环的制冷系数。

解 卡诺制冷机的循环可以用图 4.6 表示。工作物质在两个温度恒定的热源之间循环，分别经历两次等温过程和绝热过程。由图 4.7 看出，吸热在等温膨胀过程中发生。

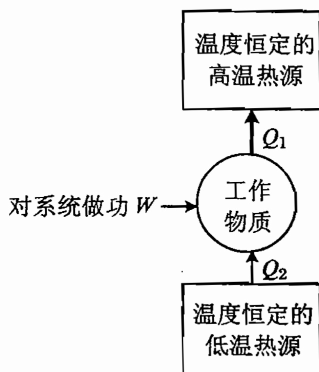


图 4.6 逆向卡诺制冷机循环

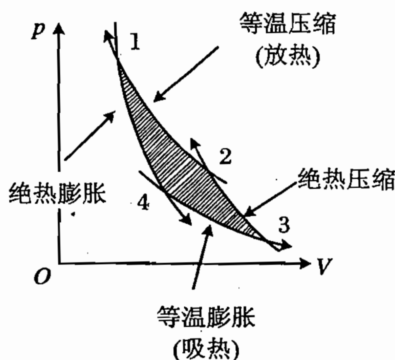


图 4.7 逆向卡诺循环的吸热

根据例 4.1 的结果，从低温热源处所吸收的热量为 Q_2，在高温热源处的放热量为 Q_1，则制冷系数为

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

显然制冷系数取决于高、低温热源的温差，温差越大，制冷系数越小。通常的制冷机都是在大气中放热的，所以 T_1 就是大气的温度。因此，冷库（房间）的温度越低，制冷效能越差。

例如，设大气温度为 20 ℃（293.15 K），则低温热源的温度依次比大气低 20 ℃，30 ℃，70 ℃时，制冷系数依次为 13.6，8.8，3.2；若低温处的温度降至 100 K，50 K，5 K，1 K，相应的制冷系数变为 0.52，0.21，0.017，0.003 4。

【例 4.5】 一定量的理想气体经历以下准静态过程：

(1) 等温压缩，由 (V_1, T_1) 到 (V_2, T_1)；

(2) 等容降温，由 (V_2, T_1) 到 (V_2, T_2)；

(3) 等温膨胀，由 (V_2, T_2) 到 (V_1, T_2)；

(4) 等容升温，由 (V_1, T_2) 到 (V_1, T_1)。

求该制冷循环的制冷系数。

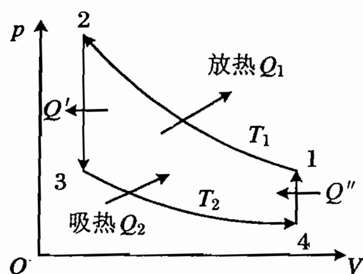


图 4.8 逆向斯特林循环

解 这样的循环称作**逆向斯特林循环**，属于回热式制冷机中的循环，过程如图 4.8 所示。

由于假设工作物质是理想气体，而过程 2→3 和 4→1 都不做功，且 2 与 1 等温，3 与 4 等温，所以过程 2→3 放出的热量与过程 4→1 吸收的热量相等。因此，只需计入两个等温过程的热量变化即可。

在高温处的放热量为

$$Q_1 = \nu R T_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

在低温热源处的吸热量为

$$Q_2 = \nu RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

因而

$$Q_1 - Q_2 = \nu RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} - \nu RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

制冷系数为

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

所以

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

可见制冷系数与逆向卡诺循环一致。

4.4 热过程的不可逆性

虽然经过循环之后，热力学系统又可以回到初始的状态，但这一过程引起了外界的变化。例如，热机循环中，热量从高温热源到了低温热源，并且对外界做了功 W。若反过来，使外界对系统做功 W，能否将等量的热从低温热源转移到高温热源呢？卡诺循环是可以的，但卡诺循环只是一种理想的过程，不是能够真实发生的过程，所以，这样的过程是不可逆的。

真实的热力学过程都是不可逆的，例如气体的自由膨胀过程。

如图 4.9 所示，气体本来被隔板挡在容器的一边，另一边是真空。抽去隔板，则气体将充满整个容器。由于过程进行得很快，可以认为是绝热过程。那么，如果要使气体回复到原来的状态，则只能用活塞从右向左压缩气体，但这一过程中，外界要对气体做功，外界发生了变化，因而这一过程是不可逆的。

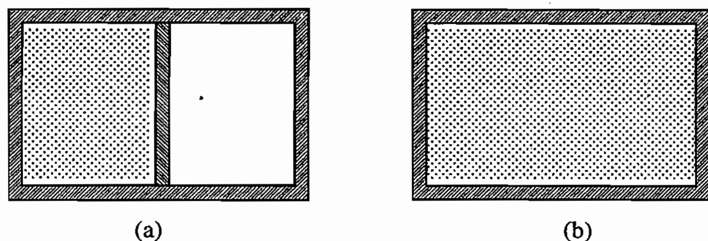


图 4.9　自由膨胀过程的不可逆性

同样，气体的扩散也是一种不可逆过程。例如两种不同的气体，其温度相等，被隔板分开，储在一个容器的两边，抽去隔板，则两种气体经历扩散而混合。若要将气体重新分开并恢复到原状，要么外界对其做功，要么气体从外界吸收热量，这样就会引起外界的变化，所以，这一过程也是不可逆的。

4.5 热力学第二定律

热力学第一定律是热现象与热力学过程中的能量守恒定律，根据该定律，可以计算出热机的效率。如热机在一个循环中，从高温热源处吸收热量 Q_1，在低温热源处放出热量 Q_2，若该热机是理想热机，没有其他能量损失，则在此循环过程中，热机对外界所做的功 $W = Q_1 - Q_2$，所以热机的效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

可见，循环中热机在低温热源处放热越少，热机的效率就越高。若在低温热源处不放热，即 $Q_2 = 0$，则热机的效率 $\eta = 100\%$。这样的热机仅仅在高温热源处吸热，在循环过程中，将所吸收的热量全部转化为有用的机械功，做功后，整个系统又回到初始的状态。这样的热机当然符合热力学第一定律，自然是一种非常好的热机，这样高效的热机能不能实现呢?

然而，无论人们如何努力，即使在所有的热量损失和无用功都减小到零的情况下，也无法设计出这样的热机。大量的实验和事实说明，只从高温热源处吸热，并且能够将所吸收的热量全部转化为功的热机是不存在的。这就不是技术或工艺的问题，而是自然界物质运动规律的体现，或者是热力学过程中的一个基本规律，这就是热力学第二定律。

因此，开尔文在 1851 年将上述事实表述为一个普遍原理：

不可能从单一热源吸收热量，使之完全变为有用功而不产生其他影响。

这就是**热力学第二定律的开尔文表述**。

开尔文表述中所谓的"单一热源"是指温度均匀且温度不变的热源。若热源温度不均匀，热工作物质(例如气体)就可以从热源的高温部分吸热而在低温部分放热，这样实际上就不止一个热源了。而表述中的"其他影响"是指除从高温热源吸热和将热量转化为功以外的任何其他变化。实际上，把从单一高温热源吸收的热量全部用来做功是可以的。例如，使理想气体与恒温热源接触，理想气体将做等温膨胀并对外做功，而且这样的过程可以一直持续下去，但是，气体再回复到初始的状态，体积将一直膨胀，不能再缩小，这就产生了其他影响。而热机都是循环工作的，经历一个循环之后还要回到初始状态，所以，只与一个热源接触而能够工作的热机是不可能实现的。

大气和海洋都可作为单一热源，而且其中所包含的能量几乎是取之不尽的，因而有人就希望利用大气和海洋做单一热源而制成可以一直做功的热机，这类热机就是第二类永动机。第二类永动机不违反热力学第一定律，却违反热力学第二定律。

开尔文的表述还可以这样表达：

第二类永动机是不可能造成的。

制冷机是另一类热机，在一个制冷循环中，外界对其做功，使工作物质从低温热源处吸热，然后在高温热源处放热。如果外界做的功为 W，在低温热源吸收的热量为 Q_2，在高温热源处放出的热量为 Q_1，根据热力学第一定律，$Q_1 = W + Q_2$。制冷机经历一个循环之后的制冷系数为

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

外界对系统所做的功越少，制冷机经历一个循环的制冷效能就越高，即制冷系数就越大。若 $W = 0$，制冷系数就趋向于无穷大，这种情况就相当于不需要做功，制冷机就可以将热量从低温热源输送到高温热源，即热量自发地从低温热源流向高温热源。显然，这不仅与人们的日常经验相悖，也是不可能发生的，这一现象是热力学第二定律的另一种体现。

基于上述事实，克劳修斯在 1850 年提出了热力学第二定律的另一种表述：

不可能把热量从低温物体传到高温物体而不引起其他变化。

这就是**热力学第二定律的克劳修斯表述**。

一个系统，由某一状态出发，经过某一过程达到另一状态，如果存在另一过程，它能使系统和外界完全复原（即系统回到原来的状态，同时消除了原来的过程对外界引起的一切影响），则原来的过程称作可逆过程；反之，如果用任何方法都不可能使系统和外界完全复原，则称之为不可逆过程。

热力学第二定律的开尔文表述就是说功变热的过程是不可逆的；而克劳修斯表述就是说热传导过程是不可逆的。

从普遍意义上看，热力学第二定律就是热力学过程不可逆的表述。

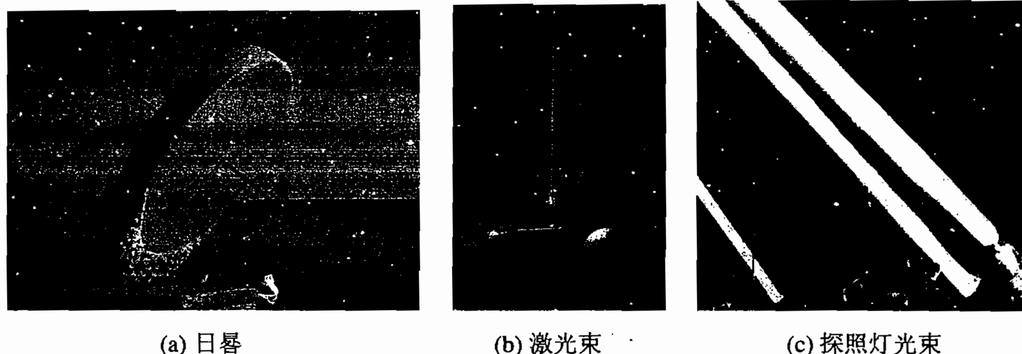
第 5 章　几何光学的物理基础

5.1　光线与几何光学的实验定律

几何光学是最早发展起来的光学分支，它主要研究光在透明介质中的传播，在介质分界面处的反射、折射，以及光学成像问题。

5.1.1　光线模型

日常生活的经验告诉我们，有光就有影，例如室外阳光下山体、树木和楼房的阴影，还有室内灯光、烛光下家具、人体，甚至灯罩的影子……类似的例子不胜枚举。对于这种司空见惯的现象，最直接的解释当然就是“光是沿直线传播的”。“如影随形”这句成语，说的就是“形”遮蔽了直线行进的光从而产生“影”，“形”到哪里，“影”就跟随到哪里。日晷（图 5.1(a)）就是古人发明的利用这一现象计时的工具。除此之外，经过人工处理的光源，例如激光、探照灯等，其光束更直接展示了沿直线传播的特性（图 5.1(b)和(c)）。



(a) 日晷　　(b) 激光束　　(c) 探照灯光束

图 5.1　光沿直线传播的实例

其实，沿直线传播仅仅是光在均匀介质中的特性，如果介质不均匀，则光的传播路径将会弯曲（在渐变的介质中）或偏折（在介质突变处）。

既然光的传播路径总是沿着直线、曲线或折线，所以就可以用一条数学上的“线”来描述光的传播，这样的几何线作“**光线**”。于是，光线就可以作为光的物理模型。依据光线模型和实验定律，并利用几何学的知识框架所建立的光学理论体系就是“**几何光学**”。

几何光学是关于光的唯象理论体系。这一理论体系撇开了光的物理本质，仅仅讨论光的宏观现象。几何光学以光线传播、反射、折射的实验定律为基础，主要处理光的成像问题。在几何

光学的体系内，无法定义诸如光速、波长等物理量。

5.1.2 几何光学的实验定律

几何光学的实验定律主要描述光线在介质中的传播、反射和折射的规律，是经过长期的观察和严格的实验总结出来的。

1. 光的直线传播定律

沿直线传播是光线的最基本性质。

除了图 5.1 中所列出的实例，读者也可以根据观察实际物体的经验得到上述结论。

设想在均匀介质的空间，例如空气中，有 P，Q 两点。如果 P 点有一光源（几何光学中的光源是指本身发光，或者由于被其他光源照射而反光的物体），则在 Q 点处的观察者可以看到其发出的光。由于从 P 点到 Q 点有无数条路径，那么，P 点的光是沿什么样的路径到达 Q 点的呢？可以用一个简单的实验来验证，如图 5.2 所示，用一个不透光的挡板放在 P、Q 点间的任一处，将会发现只有挡板处在连接上述两点的直线上时，才能遮住 P 点发出的光，这时，Q 点的观察者看不见 P 点。所以可以得到结论：P 点的光是沿直线传到 Q 点的，即光的直线传播定律可表述如下：

图 5.2 验证光的直线传播

在均匀介质中，光沿直线传播。

如果介质是非均匀的，则光的传播将会发生偏折，即不再沿着一条直线传播，但是，总可以设法发现光传播的路径，这条路径是折线或曲线。

2. 光的反射定律

可以用带有测角装置的仪器研究激光束在镜面上的反射，如图 5.3 所示。实验表明，一条入射光线只有唯一的一条反射光线，且两条光线相对于镜面的法线是对称的。

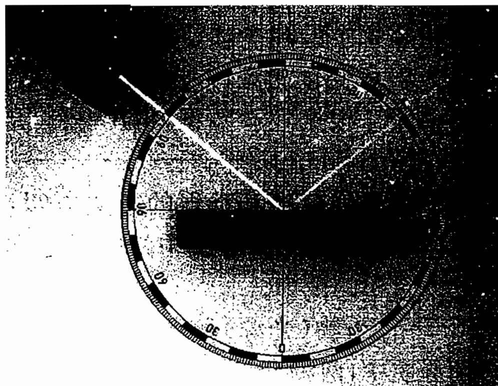


图 5.3 实验测量光的反射

也可以设想在 P，Q 点之间放一个不透光的挡板，如图 5.4 所示。那么，Q 点处的观察者将无法直接看到 P。但是，如果在旁边放置一块平面反光镜 M，Q 点处的观察者又可以看见 P 点，只是这时的 P 点处在与原来对称的位置上，观察者看到的是 P 经过平面镜 M 所成的像 P'。也就是说，P 点发出光，经平面镜 M 反射后到达 Q 点。那么，光是沿哪一条路径到达 Q 点的？

在 Q 点处的观察者看来，光是从 P' 点发出的，而 P' 点正好处在与 P 点关于反射镜平面对称的位置。由于已经证明了光在均匀介质中的直线传播定律，所以光只能是沿着直线 $P'Q$ 传播的。用一条直线连接 P' 点和 Q 点，该直线与反射镜平面的交点为 O，即到达 Q 点的光一定经过 O 点。但真实的光线是从 P 点发出的，则从 P 点发出的光是在反射镜面上的 O 点被反射然后到达 Q 点的。过 O 点作平面镜 M 的法线，PO 与法线的夹角 θ 称为**入射角**，QO 与法线的夹

角 θ' 称为反射角。从几何关系上可以立刻得到：P,P',O,Q 诸点在同一平面内，而且光线的反射角 θ' 与入射角 θ 是相等的。

如图 5.5 所示，光线在反射面上的入射点为 O，O 点处的法线为 $\boldsymbol{n}$，由入射光线和 $\boldsymbol{n}$ 构成的平面 Π 为**入射面**。入射光线、反射光线与法线 $\boldsymbol{n}$ 的夹角分别为入射角 i 和反射角 i'，则光的**反射定律**可以表述如下：

反射光线在入射面内，且反射角等于入射角，即

$$i' = i \tag{5.1}$$

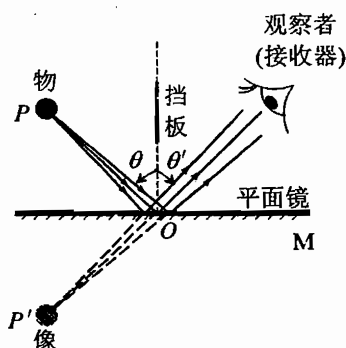


图 5.4 验证光的反射

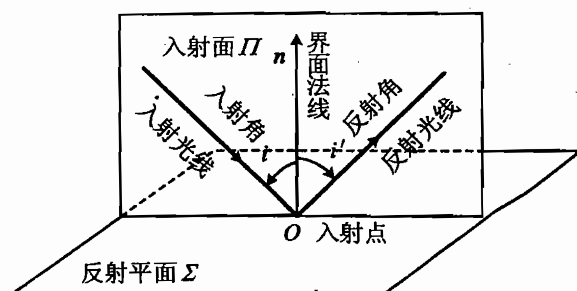


图 5.5 入射面、入射角与反射角

3. 光的折射定律

如图 5.6 所示，当一束光线从一种介质(例如空气)进入另一种介质(例如玻璃)时，光线的传播方向将发生偏折，这就是**折射**。实验表明，如果介质不是具有各向异性结构的晶体，且入射光不是很强，则每一条入射光线只有唯一的一条折射光线。



图 5.6 折射的实验研究

利用实验装置中的测角器，可以测得折射光线的方向随入射角变化的规律，也可以换用不同的介质进行测量。根据实验数据，得出光线折射的规律。

同前面分析光线传播和反射的方法类似，读者也可以从观察处在另一种介质中的物所得到的现象得出光线折射的规律。

如图 5.7 所示，物(光源)和观察者分别处在不同的透明介质中，两种介质有分界面。例如，在一个空的容器中有一物 P，然后向容器中加入水。此时，从水面上看，物的位置发生了改变，从原来的 P 点移到了 P' 点，即在介质 2 中的观察者 Q 看来，光源好像是处在另一点 P'(像点)，而不是其实际位置 P 点。这说明 P 点发出的光在传播过程中发生了偏折。由于光在均匀介质 1 和 2 中都是沿直线传播的，所以发生偏折的位置只能在两种介质的分界面上。光线 $P'Q$ 与界面的交点为 O，光线在 O 点发生折射。即实际上光的传播路径是 PO 和 OQ。

实际上，在透明介质的界面处，往往既有反射光，也有入射光，如图 5.8 所示。

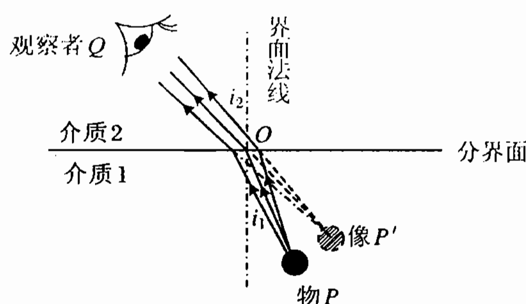


图 5.7 验证光的折射

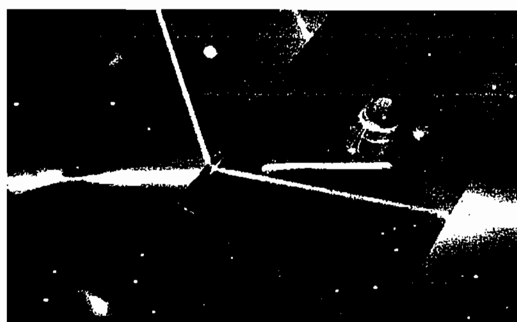


图 5.8 透明介质分界面处的反射与折射

折射定律的表述与反射定律类似，如图 5.9 所示，过入射点 O 作分界面的法线 $\boldsymbol{n}$，入射角为 i_1，定义折射光线 OQ 与法线的夹角为**折射角** i_2。实验表明，在两种介质不变时，$\sin i_1/\sin i_2$ 的数值与角度无关，是一个常数。如果用折射率表征介质的这种特性，并记为 n，则有 $\sin i_1/\sin i_2 = n_{2\text{-}1}$，$n_{2\text{-}1}$ 为两种介质的**相对折射率**，即介质 2 相对于介质 1 的折射率。或者说，$\sin i_1/\sin i_2$ 只与两种介质有关，也可以表示为 $\sin i_1/\sin i_2 = n_2/n_1$。可以知道，仅仅从这一比例式是无法确定折射率的数值的，所以规定真空的折射率的数值为 1，则其他介质的折射率可以参照真空的通过实验测量来确定，这样的折射率就是**绝对折射率**，简称**折射率**。表 5.1 中列出了钠黄光在部分介质中的折射率。

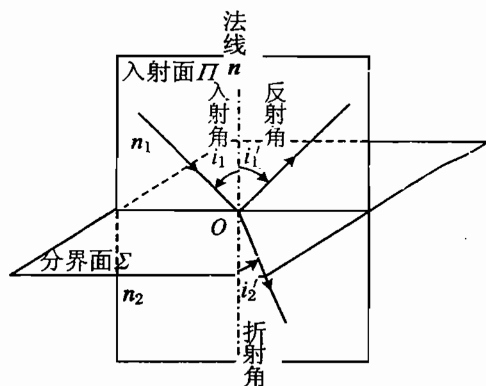


图 5.9 入射面、入射角、反射角与折射角

表 5.1 钠黄光(589.3 nm)在介质中的折射率*

介质	n	介质	n	介质	n	介质	n
标准空气	1.000 277	水	1.333 0	熔融石英	1.358	冰	1.31
氦**	1.000 036	乙醇	1.361	氯化钠	1.50	硅	4.01
氢**	1.000 132	苯	1.501 2	金刚石	2.419	角膜	1.337 5
二氧化碳**	1.000 45	甘油	1.472 9	各种玻璃	1.5～2.0	晶状体	1.386～1.406

* 表中晶体材料的折射率是对其中的寻常光而言的。

** 均指 0 ℃，1 mol 气体。

如图 5.9 所示，Σ 为两种介质的分界面。光线由介质 1 入射到介质 2 中，发生折射，入射角和折射角分别为 i_1 和 i_2。光的**折射定律**可以表述为：

折射光在入射面内，且有

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \tag{5.2}$$

其中，n_1 和 n_2 分别为两种介质的折射率。折射定律通常称作斯内尔定律(1621 年)，也称作笛卡儿定律。

由于光在不同的介质中会发生折射，所以，如果在光传播的路径上介质的情况比较复杂，或者说，介质是连续变化的，则光的路径或光线就不是一条直线或折线，而会成为曲线。所以，光线实际上就是光传播的路径，用几何上的线表示，可以是直线、折线或任意形状的曲线。

4．光的可逆性原理

在均匀介质中，光可以从 P 点沿直线传播到 Q 点，则必定可以沿相反的路径从 Q 点传播到 P 点。如果介质是不均匀的，则从 P 点传播到 Q 点的光线是曲线，并且光可以沿同样的路径从 Q 点传播到 P 点。在光的反射和折射中，光线如果沿反射和折射方向入射，则相应的反射光和折射光将沿原来的入射光的方向，如图 5.10 所示，即光路是可逆的。这就是**光路可逆性原理**。

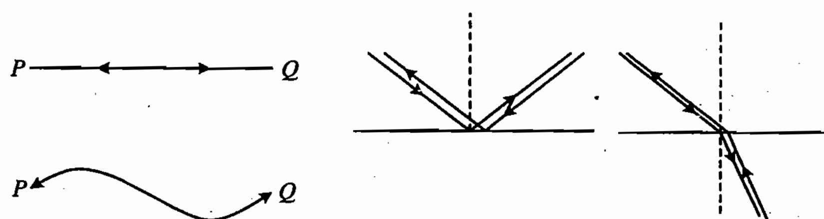


图 5.10　光路可逆原理

从光路可逆性原理出发，在图 5.11 中，如果从物点 P 发出的光线经光学系统后在 Q 点成像，则 Q 点发出的光线经同一系统后必然会在 P 点成像，即物像之间是共轭的。

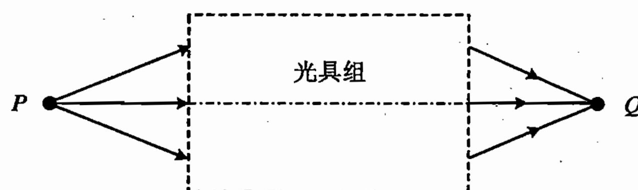


图 5.11　物像之间是共轭的

如果考虑到反射、折射后光强的改变，例如在图 5.12 中，设入射光强为 I，经界面反射和折射后分别成为强度为 I_1，I_2的两部分，如图 5.12(a)。如果反过来使这两部分光各自沿原来反射、折射的路径入射，如图 5.12(b)，则最后总的效果是只在原来入射方向出现强度为 I 的光，这是从界面折射和反射的两部分光叠加的结果。而在界面的另一侧，虽然也各有一束反射光和折射光，但这两部分叠加之后相互抵消了，总的效果与图 5.12(a)的情形相同。这种情况说明不仅仅光路是可逆的，或者说，这是更具普遍意义的**光的可逆性原理**。

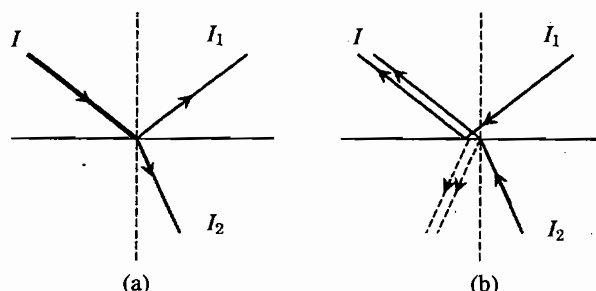


图 5.12　一般意义上光的可逆性

光的直线传播、反射和折射定律是几何光学的三大实验定律，它们构成了几何光学的基础。从上面的讨论可以看出，只要引入了光线的物理模型，上述定律便能够得到严格的检验和描述。

5. 几何光学定律成立的条件

上述实验定律并不是在任何条件下都适用。首先，这些定律仅仅是光的宏观表现，无论是光的传播，还是反射、折射，介质的空间尺度以及反射面、折射面的尺度都是较大的，通常都在数十或数百微米以上。同时，由于光在介质中传播，介质的均匀性对光的折射有较大的影响，光强很大时(例如强激光)将会引起介质的光学性质的改变。因而几何光学定律只有在满足下述条件时才能较好地成立：

(1) 光学系统的尺度远大于光波的波长；

(2) 介质是各向同性的；

(3) 光强不是很大。

5.2 费马原理

上述关于几何光学的定律是实验研究的结果，人们试图找出它们的内在联系，并用一个更基本的规律来概括和描述它们。正如前面所指出的那样，由于几何光学不涉及光的物理本质，所以无法从最基本的物理模型推导出上述定律。但是，用一个更加广义的数学原理对它们进行概括还是可行的。这就是费马原理。

费马是在 1657 年提出这一原理的，他指出：*光沿着所需时间为极小值的路径传播。*

需要说明的是，在费马所处的时代，尽管有人已经意识到光在不同的介质中传播的速度应该是不同的，但却无法从实验上测定光速。为了表述费马的思想，首先要引入**光程**这一概念。

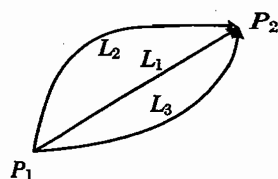


图 5.13 不同路径的光程

*光程等于折射率与光所经过的路程的乘积。*记 n 为折射率，S 为光的路径的长度，则光程即为 $L = nS$。图 5.13 表示了光沿不同路径传播时的光程。

费马原理：两点间光的实际路径是光程平稳的路径。

平稳的含义是光程可以取极值(极大、极小)或恒定值，在数学上，用变分表示为

$$\delta(\widehat{P_1P_2}) = \delta\left(\int_{P_1}^{P_2} n\mathrm{d}s\right) = 0 \tag{5.3}$$

请注意，式(5.3)是路径积分。

有一些物理结论不是建立在实验基础上的定律，也不是从数学上导出的定理，而是一个最基本的假设，是一切理论的出发点。一切定理和定律都建立在它的基础之上，这就是原理。原理是一切理论体系的出发点。费马原理不是定理，也不是定律，它是几何光学的一个最基本的假设。

从费马原理可以导出几何光学的实验定律，请读者自行完成证明。

由费马原理，可以得到一个光学中的重要规律。

在图 5.14 的成像系统中，像平面上的 A'，B' 等各点分别是物平面上 A，B 等各点的像，即从每一个物点(例如 A 点)发出的沿不同方向的所有光线经过光具组后都会聚到像上的一个对应点(即 A' 点)。由费马原理知，所有这些光线的光程都是平稳的，只能都取极大值、极小值或恒定值。由于物像间的光程实际总是有限的，所以只能取恒定值。也就是说，不管光线经何条路径，凡是从 A 点发出的通过同样的光学系统到达 A' 点的光线，都是等光程的。这就是**物像之间的等光程性**。

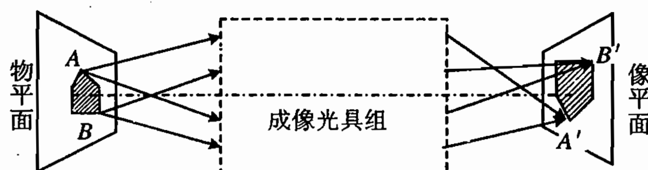


图 5.14　物像之间的等光程性

【例 5.1】　设计一种平凸聚光透镜，使其可以将沿透镜光轴入射的平行光全部会聚到一点。

解　如图 5.15 所示，设该透镜材料的折射率为 n，会聚点为 F，F 即是透镜的一个焦点，则凸面的形状只要使从透镜平面上的所有点到 F 的光程相等即可。

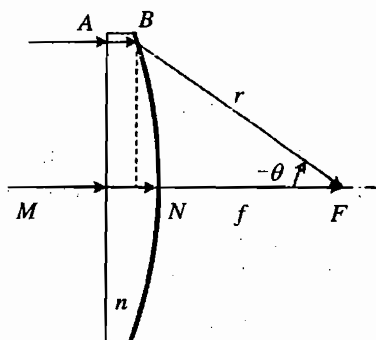


图 5.15　例 5.1 中的光路

在透镜平面处，光轴上 M 点到 F 点的光程为 $n\overline{MN}+f$，轴外任一点 A 到 F 点的光程为 $n\overline{AB}+r$。

过 B 向光轴作垂线，这样就在透镜中切出了一个等厚度的薄层，光线在该层中的光程都相等。于是由费马原理，可得到

$$r = f + n(r\cos\theta - f)$$

即

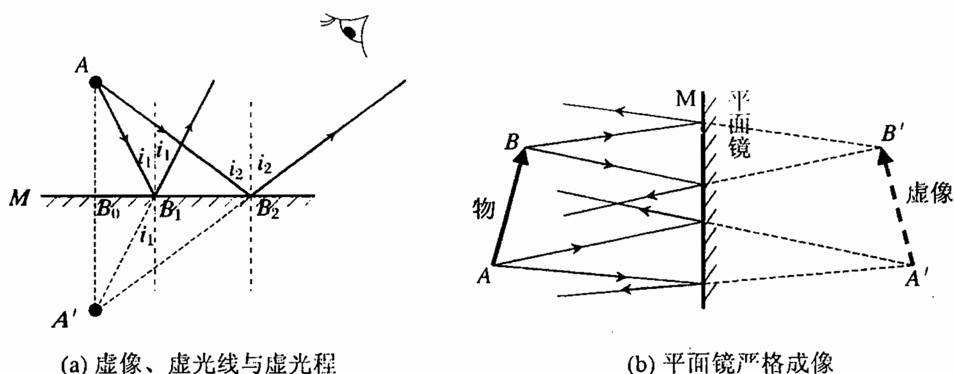
$$r = \frac{(n-1)f}{n\cos\theta - 1}$$

这是一条抛物线。因此，透镜的凸面是满足上式的旋转抛物面。

5.3　光在平面上的反射

如图 5.16(a)所示，设反射平面 M 上方有一发光物点 A，所发出的光线为 AB_1，AB_2，…，这些光线经 M 反射后是发散的，在平面的上方无法会聚。但是，对上方的观察者来说，看起来所有这些光线好像都是从平面的下方 A' 点发出的。由反射定律，可知 A' 是 A 关于平面 M 的对称点。或者说，经平面反射后，A 点在 A' 点成像。

由于光线并没有进入平面的下方，所以 A' 并不是真实光线会聚而成的，而是视觉上将反射光线反向延长后会聚形成的，因此，反射光线在 M 下方的反向延长线是“**虚光线**”，则 A' 就是“**虚像**”。



(a) 虚像、虚光线与虚光程　　(b) 平面镜严格成像

图 5.16　平面反射镜所成的虚像

按照费马原理，物像之间应该是等光程的，在虚像的情况下，就要求

$$n\overline{AB_1} + n'\overline{B_1A'} = n\overline{AB_2} + n'\overline{B_2A'}$$

式中，n，n'分别为平面上、下两方的折射率。显然，上式对任意方向光线成立的条件为等式的值为 0，即

$$n\overline{AB_1} = -n'\overline{B_1A'},\quad n\overline{AB_2} = -n'\overline{B_2A'}$$

实光线 AB_1，AB_2 的光程 $n\overline{AB_1}$，$n\overline{AB_2}$无疑都是正值，则为使费马原理成立，虚光线 B_1A'，B_2A'的光程 $n'\overline{B_1A'}$，$n'\overline{B_2A'}$应当为负值。而$\overline{AB_1}=\overline{B_1A'}$，$\overline{AB_2}=\overline{B_2A'}$，如果平面上方的折射率为 n，则平面下方的折射率为

$$n' = -n \tag{5.4}$$

虚光线的光程称作**虚光程**。

人为地引入虚光程，是为了更方便地应用费马原理解决问题。

由反射定律容易得到，一个任意形状的物体，其上任一点都可经平面镜在对称位置成一个虚像，整个物体则可以成一个等大小、对称的虚像，如图 5.16(b)所示。值得一提的是，在所有的成像元件中，只有平面镜是能够严格精确成像的。

【例 5.2】(第 11 届全国中学生物理竞赛预赛试题)　要在一张照片上同时拍摄物体的正面和几个不同侧面的像，可以在物体的后面放两个直立的大平面镜 AO 和 BO，使物体和它对两个平面镜所成的像都摄入照相机，如图 5.17 所示。图中带箭头的圆圈 P 代表一个人的头部，白色半圆代表人的脸部，此人正面对着照相机的镜头；有斜线的半圆代表脑后的头发；箭头表示头顶上的帽子。图 5.18 为俯视图。若两平面镜的夹角$\angle AOB=72^\circ$，设人头的中心恰好位于角平分线 OC 上，且照相机到人的距离远大于人到平面镜的距离。试在图 5.18 右边的方框中画出 P 的所有的像的位置。(用空白和斜线分别表示人脸和头发，以表明各个像的方位。)

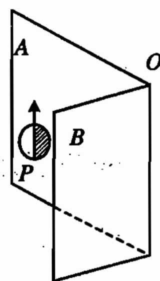


图 5.17　例 5.2 中的装置

解　如图 5.19 所示，P 经过镜 M_1反射成像 1，经过镜 M_2反射成像 2。但是，镜 M_1的反射光线射到 M_2上，又可反射成像 3，镜 M_2的反射光线射到 M_1上，又可反射成像 4。这样，光线可以在两镜之间来回反射无穷多次，并成无穷多个像。但是，由于两镜间的夹角为 72°，像的位置

出现重合，则包括物在内，共在圆周的五个等分点上有像。

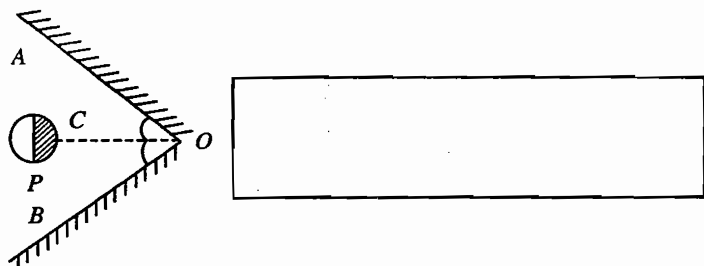


图 5.18　俯视图

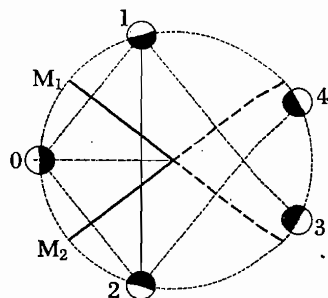


图 5.19　镜面反射的像

图 5.20 是用照相机拍摄所得到的，为上述五个物像在一个平面上的投影。

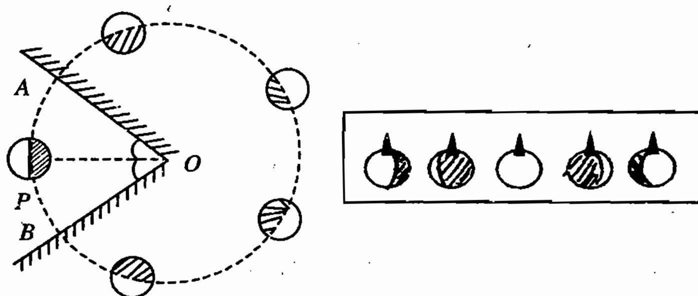


图 5.20　物像在平面上的投影

【例 5.3】(第 22 届全国中学生物理竞赛预赛试题)　内表面只反射而不吸收光的圆筒内有一半径为 R 的黑球，距球心 $2R$ 处有一点光源 S，球心 O 和光源 S 皆在圆筒轴线上，如图 5.21 所示。若使点光源向右半边发出的光最后全被黑球吸收，问筒的内半径 r 最大为多少？

解　如图 5.22 所示，只有与球面相切的光线在圆筒上的入射点恰位于球心正上下方时，才能使向右的光线全部被黑球吸收，即

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{r^2 + (2R)^2}}{2R}$$

解得 $r = 2R/\sqrt{3}$。

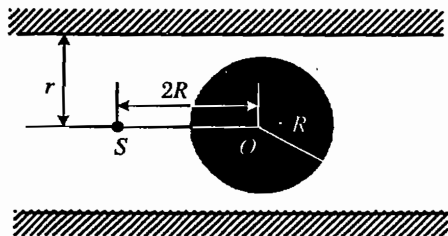


图 5.21　例 5.3 中的装置

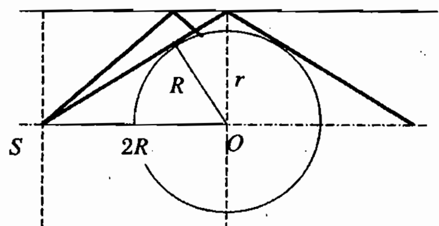


图 5.22　向右的光线被吸收

5.4 光在平面上的折射

5.4.1 折射光成像

如图 5.23 所示，来自同一点光源 Q 的入射光，经平面 M 折射后，可以按照折射定律计算出每一折射光线的方向。由公式 $\sin i_2=(n_1/n_2)\sin i_1$ 可以看出，不同方向的入射光线经折射后将成为发散的光束，折射光线的反向延长线不再会聚于同一点。因而严格说来，平面折射是不能成像的。

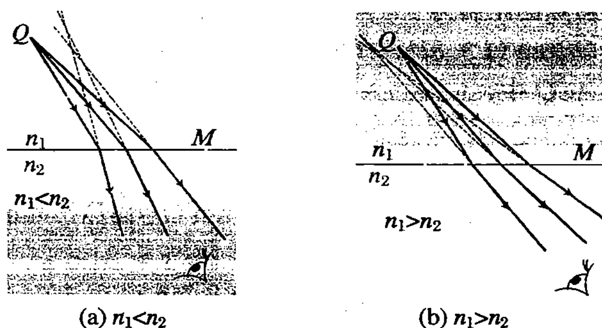


图 5.23 折射不能严格成像

然而，日常生活中我们可以看清水面下的游鱼或包裹在玻璃立方体中的物体，说明物点发出的光线经平面折射后依然可以成像。下面通过例子分析成像的条件。

【例 5.4】 设平静水面下深度 s 处有一个物点，在水面上的观察者能否清晰地看到该物点？如果能，物点看起来在何处？

解 水下物点发出的光线束经过平面折射后如果仍能会聚于同一点，则可以清晰成像。

如图 5.24 所示，从物点发出两条光线，一条正入射到水面，另一条的入射角为 i。这两条光线反向延长后交于水面下的 Q 点。由折射定律和几何关系，可得 $s'=l\cot i'$，$s=l\cot i$，于是

$$s'=s\frac{\cot i'}{\cot i}=s\frac{\sin i}{\sin i'}\frac{\cos i'}{\cos i}$$

可见不同方向的光线的会聚点并不相同，这样一来，就无法成像。

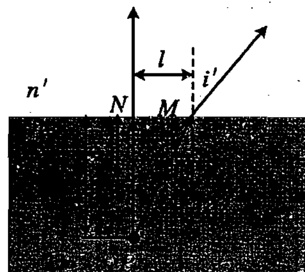


图 5.24 傍轴光线经平面折射成像

但是，如果上述两条光线的发散角不是很大，即 i 很小，则 $\cos i'/\cos i\approx1$，可得

$$s'\approx s\frac{\sin i}{\sin i'}=s\frac{n'}{n}$$

发散角不大的光线可近似会聚于同一点而成像。

光线发散角较小，称这些光线满足**傍轴条件**或**近轴条件**。在傍轴条件下，通过平面折射的

光线可以成像。

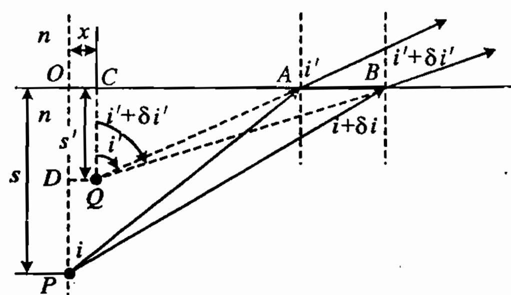


图 5.25　入射角较大时，平面折射成像

【例 5.5】 在例 5.4 中，如果不在物的正上方观察，而在水面上斜向下观察，所看到的物在何处？

解 不妨设从位于 O 点正下方的物点 P 发出的光线在界面 A 处的入射角为 i，折射角为 i'；另一条近邻的光线在界面 B 处的入射角为 $i+\delta i$，相应的折射角为 $i'+\delta i'$，如图 5.25 所示。两条近邻折射光线反向延长后交于 Q 点，Q 点就是在这样的方位所看到的像点，位于 C 点的正下方。

两近邻入射光线入射点的距离为

$$\overline{AB} = \overline{OP}\tan(i+\delta i) - \overline{OP}\tan i = s[\tan(i+\delta i) - \tan i]$$

而在 Rt△BCQ 和 Rt△ACQ 中，

$$\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA} = \overline{CQ}\tan(i'+\delta i') - \overline{CQ}\tan i' = s'[\tan(i'+\delta i') - \tan i']$$

于是有

$$s'[\tan(i'+\delta i') - \tan i'] = s[\tan(i+\delta i) - \tan i]$$

解得

$$s' = s\frac{\tan(i+\delta i) - \tan i}{\tan(i'+\delta i') - \tan i'}$$

又因为

$$\tan(i+\delta i) \approx \tan i + \frac{\delta i}{\cos^2 i}, \quad \tan(i'+\delta i') \approx \tan i' + \frac{\delta i'}{\cos^2 i'}$$

所以

$$s' = s\frac{\delta i\cos^2 i'}{\delta i'\cos^2 i}$$

根据折射定律

$$n\sin i = n'\sin i'$$

入射解改变 δi 时，有

$$n\delta i\cos i = n'\delta i'\cos i', \quad 即 \quad \frac{\delta i}{\delta i'} = \frac{n'\cos i'}{n\cos i}$$

又因为

$$n'\cos i' = \sqrt{n'^2 - n'^2\sin^2 i'} = \sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i}$$

故有

$$s' = s\frac{n}{n'}\frac{\cos^3 i'}{\cos^3 i} = \frac{s}{nn'^2}\frac{\sqrt{(n'^2 - n^2\sin^2 i)^3}}{\cos^3 i}$$

这就是像点到折射平面竖直的距离。

从图 5.25 中可以看出，$x = \overline{OC} = \overline{OA} - \overline{CA} = \overline{OP}\tan i - \overline{CQ}\tan i' = s\tan i - s'\tan i'$，而

$$s'\tan i' = s'\frac{n'\sin i'}{n'\cos i'} = \frac{s}{nn'^2}\frac{\sqrt{(n'^2 - n^2\sin^2 i)^3}}{\cos^3 i}\frac{n\sin i}{\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2 i}}$$

$$= \frac{s}{n'^2} \frac{(n'^2 - n^2 \sin^2 i)\sin i}{\cos^3 i} = s\tan i \frac{n'^2 - n^2 \sin^2 i}{n'^2 \cos^2 i}$$

所以

$$x = s\tan i - s\tan i \frac{n'^2 - n^2 \sin^2 i}{n'^2 \cos^2 i}$$

$$= s\tan i \frac{n'^2 \cos^2 i - n'^2 + n^2 \sin^2 i}{n'^2 \cos^2 i}$$

$$= s\tan i \frac{n^2 \sin^2 i - n'^2 \sin^2 i}{n'^2 \cos^2 i} = s \tan^3 i \frac{n^2 - n'^2}{n'^2}$$

这就是像点到物点的水平距离。

5.4.2 棱镜

三棱镜是一种常用的折射器件，其横截面是三角形，光从一个侧面入射，再从另一侧面出射，共经过了两次折射。出射光线相对于入射光线转过的角度称作**偏转角**。

如图 5.26 所示，光线在三棱镜左侧面的入射角和折射角分别为 i_1, i_2，在右侧面的入射角、折射角分别为 i_2', i_1'，则光线的偏转角为 $\delta = (i_1 - i_2) + (i_1' - i_2') = (i_1 + i_1') - (i_2 + i_2')$。由于法线与两侧面垂直，因而棱镜的顶角

$$\alpha = i_2 + i_2' \tag{5.5}$$

所以

$$\delta = i_1 + i_1' - \alpha \tag{5.6}$$

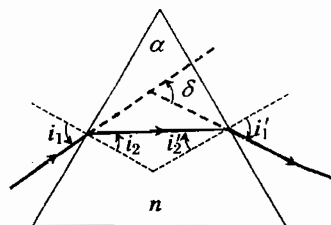


图 5.26　光在三棱镜中的折射

可以证明，当 $i_1 = i_1'$，$i_2 = i_2'$，即入射光和出射光对称时，有最小偏转角 $\delta_{\min}$。此时，$\alpha = 2i_2$，$\delta_{\min} = 2i_1 - \alpha$。由折射定律，$\sin i_1 = n\sin i_2$，即可得到

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\sin \dfrac{\alpha + \delta_{\min}}{2}}{\sin \dfrac{\alpha}{2}} \tag{5.7}$$

通过测量 α 和 $\delta_{\min}$，即可得到棱镜材料的折射率。这是一种早期在实验室中被广泛应用的采用纯粹几何光学手段测量透明介质折射率的方法。

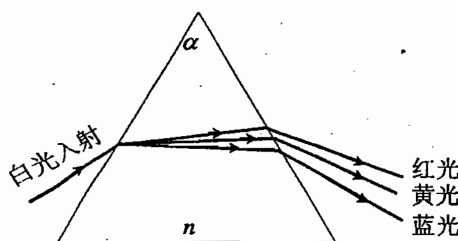


图 5.27　三棱镜的色散

实验表明，不同颜色的光在同一种介质中的折射率是不同的，因而，一束平行白光经空气-玻璃界面折射后，因不同颜色的光的折射角不同将沿着不同的方向出射，即不同颜色的光将在空间散开，这就是**光的色散**。表 5.2 列出了部分典型光学玻璃在可见光区域的色散情况，可以看出，在可见光区域，折射率随波长的改变比较平缓。所以仅仅经过一次折射，色散的效果往往不是很明显。利用三棱镜，可以连续进行两次折射，这样，从另一侧出射的光，色散比较明显，便于观察和测量。因而用三棱镜可以容易观察到不同波长的光经过它之后的色散现象，如图 5.27 所示，牛顿就是采用这种方法观察到了光的色散。

表 5.2　典型光学玻璃的色散

光谱线（nm）	冕牌玻璃（K9）	钡冕牌玻璃（BaK7）	重冕牌玻璃（ZK6）	轻火石玻璃（QF3）	钡火石玻璃（BaF1）	重火石玻璃（ZF1）
365.0	1.535 82	1.594 17	1.638 62	1.611 97	1.573 71	1.700 22
404.7	1.529 82	1.586 20	1.630 49	1.599 68	1.565 53	1.682 29
435.8	1.526 26	1.581 54	1.625 73	1.592 80	1.560 80	1.672 45
486.1	1.521 95	1.575 97	1.619 99	1.584 81	1.555 18	1.661 19
546.1	1.518 26	1.571 30	1.515 19	1.578 32	1.550 50	1.652 18
589.3	1.516 30	1.568 80	1.612 60	1.574 90	1.548 00	1.647 50
656.3	1.513 89	1.565 82	1.609 49	1.570 89	1.545 02	1.642 07
766.5	1.511 04	1.562 38	1.605 92	1.566 38	1.541 60	1.626 09
853.0	1.509 18	1.560 23	1.602 68	1.563 66	1.339 46	1.632 54
950.8	1.507 78	1.558 66	1.602 06	1.561 72	1.537 91	1.630 07

图 5.28 是由三个密接的三棱镜所构成的阿米西组合棱镜，平行白光从另一侧出射时，光束在入射方向两侧对称地散开。

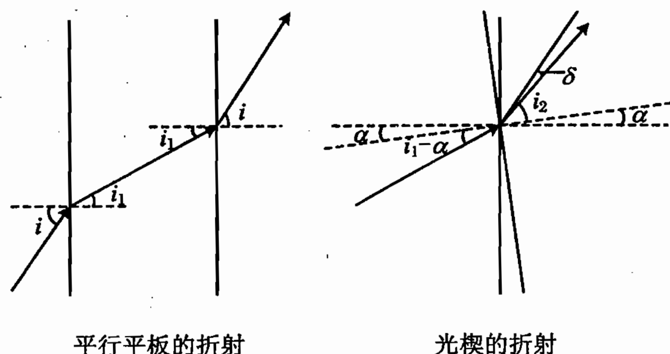


图 5.28　阿米西组合棱镜

【例 5.6】　顶角 α 很小的三棱镜称作光楔。计算以入射角 i 从一侧入射的光线经过光楔之后的偏转角 δ。如果一个物点到光楔的距离为 s，从光楔的另一侧观察，看到该物点位于何处？（设光楔的折射率为 n。）

解　如图 5.29 所示，若光线通过一平行平板，出射光的方向与入射光的相同，设在平板出射一侧的入射角为 i_1，则 i_1 与入射角 i 之间满足折射定律，即

$$n\sin i_1 = \sin i \tag{5.8}$$



平行平板的折射　　　　光楔的折射

图 5.29　平行板与光楔对光线的折射

现在若将上述平板的一个侧面转过角度 α，就成为一个顶角是 α 的光楔。相对于原来的出射平面，入射角变为 $i_1-\alpha$，折射角也按照式(5.8)相应改变。即

$$n\sin(i_1-\alpha)=\sin(i+\mathrm{d}i) \tag{5.9}$$

$\mathrm{d}i$ 是入射角改变一个小角 $\mathrm{d}i_1=-\alpha$ 而引起的折射角的改变，这一改变可以通过对式(5.8)两端求微分得到，即 $n\cos i_1\mathrm{d}i_1=\cos i\mathrm{d}i$，所以 $\mathrm{d}i=\dfrac{n\cos i_1}{\cos i}\mathrm{d}i_1$，即

$$\mathrm{d}i=-\frac{n\cos i_1}{\cos i}\alpha \tag{5.10}$$

出射界面转过 α 角，使折射角变为 $i_2=i+\mathrm{d}i=i-\dfrac{n\cos i_1}{\cos i}\alpha$。由于折射光线相对于原来法线的夹角为 $i_2+\alpha$，则折射光线相对于原来出射光线的夹角为 $i-(i_2+\alpha)$，这就是光线通过光楔后的偏转角，即

$$\delta=i-\left(i-\frac{n\cos i_1}{\cos i}\alpha+\alpha\right)=\left(\frac{n\cos i_1}{\cos i}-1\right)\alpha \tag{5.11}$$

也可以进一步将 i_1用光线射入光楔的入射角 i 表示。由于

$$n\cos i_1=n\sqrt{1-\sin^2 i_1}=\sqrt{n^2-n^2\sin^2 i_1}=\sqrt{n^2-\sin^2 i}$$

式(5.11)可表示为

$$\delta=\left(\frac{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{\cos i}-1\right)\alpha \tag{5.12}$$

如图 5.30 所示，物点发出的两条近邻光线射到光楔的一个侧面上的 A，B 两点。由于光楔很薄，而 A，B 两点又靠得很近，所以可忽略上述两点间光楔的厚度差，用很薄的平行平板代替。

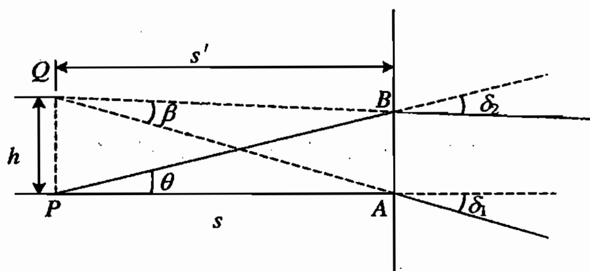


图 5.30　小发散角光束的折射

为计算简洁，可令上述一条光线是正入射的，另一条光线的入射角为 θ。上述两条光线经过光楔后，偏转角分别为

$$\delta_1=(n-1)\alpha,\quad \delta_2=\left(\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}{\cos\theta}-1\right)\alpha$$

由于 θ 很小，故 $\cos\theta\approx1$，$\sin\theta\approx\theta$，从而有

$$\delta_2=(\sqrt{n^2-\theta^2}-1)\alpha=\left(n\sqrt{1-\frac{\theta^2}{n^2}}-1\right)\alpha\approx\left(n-1-\frac{\theta^2}{2n}\right)\alpha$$

$$\overline{AB}=s\tan\theta\approx\theta s$$

设两条折射光线的反向延长线交于 Q 点。在$\triangle ABQ$ 中，

$$\angle QAB=\frac{\pi}{2}-\delta_1=\frac{\pi}{2}-(n-1)\alpha$$

$$\angle QBA = \frac{\pi}{2} - \theta + \delta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta - \left(n - 1 - \frac{\theta^2}{2n}\right)\alpha$$

$$\angle AQB = \pi - \angle QAB - \angle QBA = \theta + 2(n-1)\alpha + \frac{\theta^2}{2n}\alpha$$

$$\overline{AP} = \overline{AB}\frac{\sin\angle QBA}{\sin\angle AQB} = \theta s \frac{\cos\left[\theta - \left(n - 1 - \frac{\theta^2}{2n}\right)\alpha\right]}{\sin\left[\theta + 2(n-1)\alpha + \frac{\theta^2}{2n}\alpha\right]}$$

$$\approx \theta s \frac{\cos[\theta - (n-1)\alpha]}{\sin[\theta + 2(n-1)\alpha]}$$

$$s' = \overline{AP}\cos\delta_1 = \theta s \frac{\cos[\theta - (n-1)\alpha]}{\sin[\theta + 2(n-1)\alpha]}\cos(n-1)\alpha$$

$$\approx \frac{\theta}{\theta + 2(n-1)\alpha}s \approx s$$

$$h = \overline{AP}\sin\delta_1 = \theta s \frac{\cos[\theta - (n-1)\alpha]}{\sin[\theta + 2(n-1)\alpha]}\sin(n-1)\alpha$$

$$\approx \frac{\theta}{\theta + 2(n-1)\alpha}(n-1)\alpha s \approx (n-1)\alpha s$$

即从光楔的另一侧观察，看见物点到光楔的距离不变，但在物点的正上方，高度为 $h=(n-1)\alpha s$。

【例 5.7】 若玻璃毛细管的内径看起来为 2.66 mm，求管的实际内径。(设管的外径远大于内径。)

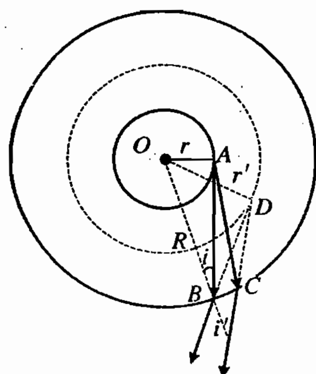


图 5.31　毛细管的横截面

解　图 5.31 为毛细管的横截面，从内管表面上的一点 A 发出两条近邻光线，在外表面上的入射点分别为 B,C，这两条光线经外表面折射后的反向延长线交于 D 点，则 D 点就是从管外所看到的内管表面上的一点，D 所在的圆就是看到的内表面。

从图 5.31 可以看出，Rt$\triangle OBA$ 和 Rt$\triangle OBD$ 的共顶点的角的大小分别为入射角 i 和折射角 i'，而且

$$\sin\angle OBA = \sin i = \frac{r}{R}$$

$$\sin\angle OBD = \sin i' = \frac{r'}{R}$$

由折射定律，$n\sin i = \sin i'$，可得

$$nr = r'$$

于是有

$$r' = \frac{r}{n} = 1.77\ \text{mm}$$

5.4.3　全反射

由折射定律，$n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2$，可得 $\sin i_2 = (n_1/n_2)\sin i_1$。如果 $n_1 > n_2$，那么可能有 $(n_1/n_2)\sin i_1 \geqslant 1$，但 $\sin i_2 \leqslant 1$，所以，当 $\sin i_1 \geqslant n_2/n_1$ 时，折射光实际上不存在，只有反射光，这种情况就是**全反射**，如图 5.32 所示。

当 $n_1 > n_2$，且入射角满足 $i_1 \geqslant \arcsin(n_2/n_1)$ 时，会出现全反射。出现全反射的最小入射角为

$$i_c = \arcsin\frac{n_2}{n_1} \tag{5.13}$$

i_c 称作**全反射临界角**，如图 5.33 所示。

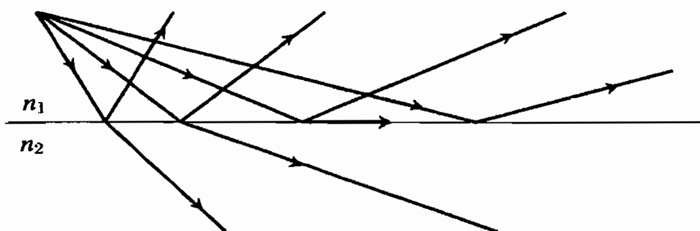


图 5.32　从光密介质射向光疏介质(折射角比入射角大)

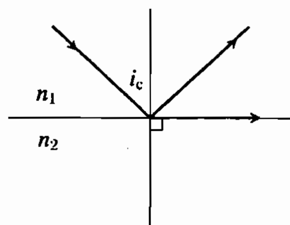


图 5.33　全反射临界角

对于两种介质，折射率较大的一方称为**光密介质**，折射率较小的一方称为**光疏介质**。当光从光密介质射向光疏介质，入射角大于 i_c 时，会出现全反射，这种全反射也称作**全内反射**。

【例 5.8】(第 26 届全国中学生物理竞赛预赛试题)　图 5.34 为某一圆形水池的示意图(竖直截面)，AB 为池中水面的直径，MN 为水池底面的直径，O 为圆形池底的圆心。已知 ON 的长为 11.4 m，AM，BN 为斜坡，池中水深 5.00 m，水的折射率为 4/3。水的透明度极好，不考虑水的吸收。图中 a，b，c，d 为四个发光点，天空是蓝色的，水面是平的。在池底中心处有一凹槽，一潜水员仰卧其中，他的眼睛位于 O 处，仰视水面的最大范围的直径为 AB。

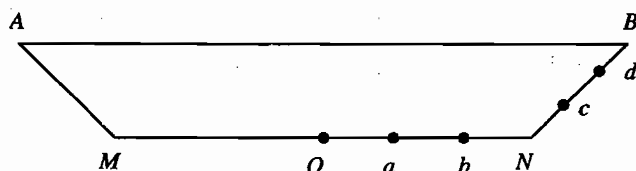


图 5.34　例 5.8 中的水池示意图

(1) 潜水员仰视时所看到的蓝天图像对他的眼睛所张的视角为多少?

(2) 四个发光点 a，b，c，d 中，发出的光能通过全反射到达潜水员眼睛的是哪些?

解　(1) 水-空气界面的全反射临界角为

$$i_c = \arcsin\frac{3}{4} \in (48.59^\circ, 50^\circ)$$

显然，从水面的外缘 B 点沿水平方向入射的光线不能到达 O 点，即潜水员向水池外缘望去，所看到的并不是最大范围的蓝天。

如图 5.35 所示，沿水平方向射向水面，并能到达 O 点的光线，实际上是射在水面上的 C 点，光线 OC 与竖直线的夹角为全反射临界角。这时潜水员能看到整个天空，但视角仅为

$$\theta = 2i_c = \arcsin\frac{3}{4}$$

(2) 从池底外边缘 N 点发出的光线，经水面反射到达 O 点，入射角应当是

$$i_0 = \arctan\frac{5.4}{5} \in (45^\circ, 48.74^\circ)$$

显然，从 a，b 点发出的光线不能通过全反射到达 O 点，而从 c，d 点发出的光线可以通过全反射到达 O 点。

图 5.35 进入水中的光线

【例 5.9】(第 13 届全国中学生物理竞赛预赛试题) 图 5.36 为一个盛有折射率为 n 的液体的槽,槽的中部扣着一个对称屋脊形的薄壁透明罩 ADB,顶角为 2φ,罩内为空气,整个罩子浸没在液体中。槽底 AB 的中点处有一亮点 C,试求出位于液面上方图示平面内的眼睛从侧面观察可看到亮点的条件。(设液槽有足够的宽度,罩壁极薄,可不计它对光线产生折射的影响。)

图 5.36 例 5.9 中的装置

解 在水-空气界面处,只有小于全反射临界角的光线才能射出水面,这就是本题的限制条件。将此处的入射角记为 δ。

如图 5.37 所示,由于水面相对于透明罩的侧面转过角度 $\theta=\pi/2-\varphi$,所以可以看出在透明罩上折射角为

$$i' = \theta - \delta = \frac{\pi}{2} - (\varphi + \delta)$$

图 5.37 在透明罩上的折射

记从 C 点发出的光线在透明罩侧面的入射角为 i,由折射定律,知

$$\sin i = n\sin i'$$

由于要求 $\delta \leqslant i_c = \arcsin(1/n)$,故必须有 $i' \geqslant \pi/2-(\varphi+i_c)$,则

$$\sin i = n\sin i' \geqslant n\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\varphi + i_c)\right] = n\cos(\varphi + i_c)$$

入射点越靠近 D,入射角越大。入射角最大时,入射光线沿 CD 方向,此时入射角为

$$i = \frac{\pi}{2} - 2\varphi + \varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

因此要求

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi \geqslant n\cos(\varphi+i_c) \geqslant n(\cos\varphi\cos i_c-\sin\varphi\sin i_c)$$

又因为

$$n\cos i_c - n\tan\varphi\sin i_c = n\cos i_c - \tan\varphi \leqslant 1$$

$$n\cos i_c = \sqrt{n^2-n^2\sin^2 i_c} = \sqrt{n^2-1}$$

所以

$$\tan\varphi \geqslant \sqrt{n^2-1}-1$$

【例 5.10】(第 20 届全国中学生物理竞赛复赛试题) 如图 5.38 所示,一半径为 R、折射率为 n 的玻璃半球放在空气中,球表面中央半径为 h_0 的区域被涂黑。一平行光束垂直入射到此平面上,正好覆盖整个表面。Ox 为以球心 O 为原点、与平面垂直的坐标轴。试通过计算,求出坐标轴 Ox 上玻璃半球右边有光线通过的各点(有光线段)和无光线通过的各点(无光线段)的分界点的坐标。

解 如图 5.39 所示,越靠近轴线的入射光线在球面上的入射角越小,其折射光线与轴线的交点越远。而入射光线在距轴一定距离处,其入射角大于全反射临界角,其折射光线与轴的交点最近。

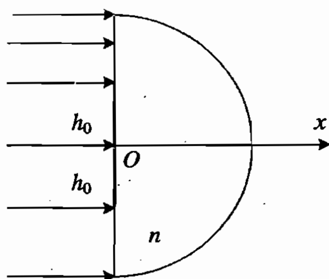


图 5.38 例 5.10 中的玻璃半球

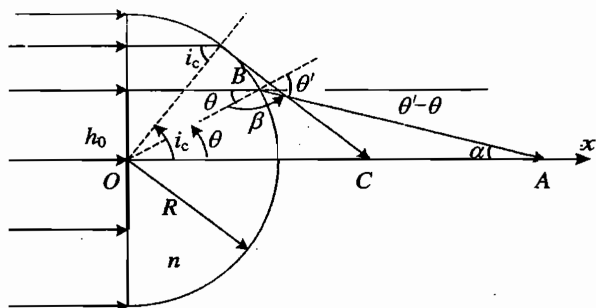


图 5.39 光线的折射

记发生全反射时,折射光线与 x 轴的交点为 C,则

$$\overline{OC} = \frac{R}{\cos i_c} = \frac{nR}{\sqrt{n^2-n^2\sin^2 i_c}} = \frac{nR}{\sqrt{n^2-1}}$$

距轴线距离 h_0 的入射光线的入射角记为 θ,折射角记为 θ',则

$$\sin\theta = \frac{h_0}{R},\quad \sin\theta' = n\sin\theta = \frac{nh_0}{R}$$

如图 5.39 所示,有

$$\beta = \pi - \theta',\quad \alpha = \theta' - \theta$$

于是有

$$\overline{OA} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}R = \frac{\sin(\pi-\theta')}{\sin(\theta'-\theta)}R = \frac{\cos\theta'}{\sin(\theta'-\theta)}R$$

$$\frac{\cos\theta'}{\sin(\theta'-\theta)} = \frac{\cos\theta'}{\sin\theta'\cos\theta+\cos\theta'\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta'\cos\theta+\sin\theta}$$

$$\cos\theta' = \sqrt{1-\sin^2\theta'} = \sqrt{1-\left(\frac{nh_0}{R}\right)^2} = \frac{1}{R}\sqrt{R^2-(nh_0)^2}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{h_0}{R}\right)^2} = \frac{1}{R}\sqrt{R^2-h_0^2}$$

$$\tan\theta' = \frac{\frac{nh_0}{R}}{\frac{1}{R}\sqrt{R^2-(nh_0)^2}} = \frac{nh_0}{\sqrt{R^2-(nh_0)^2}}$$

$$\frac{1}{\tan\theta'\cos\theta+\sin\theta} = \frac{1}{\frac{1}{R}\sqrt{R^2-h_0^2}\frac{nh_0}{\sqrt{R^2-(nh_0)^2}}+\frac{h_0}{R}}$$

$$= \frac{R}{\frac{nh_0\sqrt{R^2-h_0^2}}{\sqrt{R^2-(nh_0)^2}}+h_0}$$

$$= \frac{R\sqrt{R^2-(nh_0)^2}}{nh_0\sqrt{R^2-h_0^2}+h_0\sqrt{R^2-(nh_0)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{R^2-(nh_0)^2}\left[n\sqrt{R^2-h_0^2}-\sqrt{R^2-(nh_0)^2}\right]}{Rh_0(n^2-1)}$$

因此

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{R^2-(nh_0)^2}\left[n\sqrt{R^2-h_0^2}-\sqrt{R^2-(nh_0)^2}\right]}{h_0(n^2-1)}$$

【例 5.11】(第 17 届全国中学生物理竞赛复赛试题) 如图 5.40 所示,在真空中有一个折射率为 n ($n>n_0$,n_0为真空的折射率)、半径为 r 的质地均匀的小球,频率为 ν 的细激光束在真空中沿直线BC 传播,直线 CD 与小球球心O 的距离为l ($l<r$),光束在小球体表面的 C 点经折射进入小球(小球成为光传播的介质),并在小球表面的 D 点又经折射进入真空。设激光束的频率在上述两次折射后保持不变。求在两次折射过程中激光束中的一个光子对小球作用的平均力的大小。

解 光子具有动量,光线传播的方向改变,表明光子的动量改变,这是由于介质施与光子冲量的结果。

先计算光子方向的改变。如图 5.41 所示,光线在球表面的折射关系为

$$\sin i = n\sin i'$$

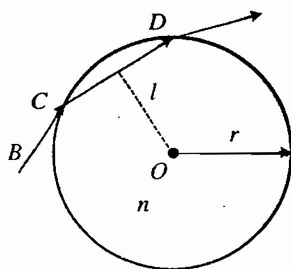


图 5.40 例 5.11 中的装置

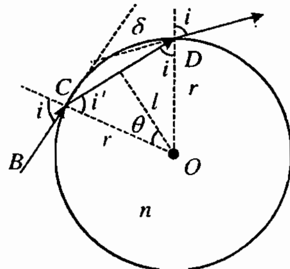


图 5.41 光线方向的变化

从球表面出射后,光线的偏转角为

$$\delta = 2(i-i')$$

从而可得到光子动量的改变量为

$$\Delta p = 2p\sin\frac{\delta}{2}$$

其中

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \sin(i - i') = \sin i\cos i' - \cos i\sin i'$$

$$= n\sin i'\cos i' - \sqrt{1 - \sin^2 i}\sin i'$$

$$= n\sin i'\cos i' - \sqrt{1 - n^2\sin^2 i'}\sin i'$$

又因为

$$\sin i' = \frac{l}{r}, \quad \cos i' = \frac{\sqrt{r^2 - l^2}}{r}$$

所以

$$\sin\frac{\delta}{2} = n\frac{l}{r}\frac{\sqrt{r^2 - l^2}}{r} - \sqrt{1 - n^2\left(\frac{l}{r}\right)^2}\frac{l}{r}$$

$$= \frac{nl\sqrt{r^2 - l^2} - l\sqrt{r^2 - n^2 l^2}}{r^2}$$

由冲量定理，得

$$F\Delta t = \Delta p$$

其中，光子与球相互作用的时间 $\Delta t = \frac{2r\cos i'}{c} = \frac{2\sqrt{r^2 - l^2}}{c}$，由此得到

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2p\sin\frac{\delta}{2}}{\Delta t} = \frac{\frac{2h\nu}{c}\frac{nl\sqrt{r^2 - l^2} - l\sqrt{r^2 - n^2 l^2}}{r^2}}{\frac{2\sqrt{r^2 - l^2}}{c}}$$

$$= \frac{h\nu l}{r^2}\frac{(n\sqrt{r^2 - l^2} - \sqrt{r^2 - n^2 l^2})}{\sqrt{r^2 - l^2}}$$

$$= \frac{lh\nu}{r^2}\left[n - \sqrt{1 - \frac{(n^2 - 1)l^2}{r^2 - l^2}}\right]$$

【例 5.12】（第 7 届全国中学生物理竞赛预赛试题） 如图 5.42 所示，一半径为 R_1 的不透明的黑球外面包着一半径为 R_2 的同心透明的介质球层，$R_1/R_2 = 2/3$，球层介质材料的折射率为 $n = 1.35$。球层外表面的右半部分（图中 ABC 球面）为磨砂面。现用平行光从左向右沿图中所示的方向照到球层上。（已知在所给的条件下，在球面内能到达 ABC 面上的各光线随着入射角的增大，其折射线与 ABC 面的交点是朝一个方向变动的，即没有往返的变动。）

（1）试求 ABC 面上被照到的范围是什么图形（准确的结果用反三角函数表示即可）。

（2）若其他条件不变，但介质球层的折射率依次取从 $n = 1.35$ 逐渐增到 $n \geqslant 3/2$ 的各值。试定性地说出 ABC 球面上被照到的范围如何变化。（已知：$\sin 40^\circ = 0.64$，$\sin 45^\circ = 0.71$，$\sin 50^\circ = 0.77$，$\sin 55^\circ = 0.82$，$\sin 60^\circ = 0.87$，$\sin 65^\circ = 0.91$，$\sin 70^\circ = 0.94$，$\sin 75^\circ = 0.97$，$\sin 80^\circ = 0.98$。）

解 如图 5.43 所示，射到 A 点的光线以折射角 $\arcsin(1/1.35) = \arcsin 0.74$ 进入球体，而

$R_1 \times (1/1.35) \approx 0.74R_1 > 2R_1/3$，所以这条光线不经过内球，被其照明的部分是最低点。由于 $\arcsin 0.74 > 45°$，故照不到 B 点。

$$\angle AOF = \frac{\pi}{2} - (\pi - 2\angle AOF) = 2\arcsin 0.74 - \frac{\pi}{2}$$

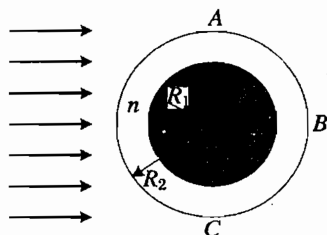


图 5.42　例 5.12 中的装置

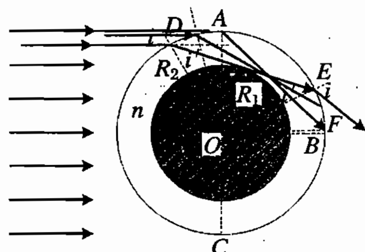


图 5.43　例 5.12 中光线的折射

在球内与小球相切的光线为最上侧的照明光线，其对应的折射角为

$$i' = \arcsin \frac{R_1}{R_2} = \arcsin \frac{2}{3}$$

入射角满足

$$\sin i = n \sin i' = 1.35 \times \frac{2}{3} = 0.9$$

又因为

$$\angle DOA = \frac{\pi}{2} - i = \arccos 0.9$$

$$\angle DOE = 2\arccos \frac{R_2}{R_1} = 2\arccos \frac{2}{3}$$

所以

$$\angle AOE = \angle DOE - \angle DOA = 2\arccos \frac{2}{3} - \arccos 0.9$$

因此，被照明区域的张角为

$$\begin{aligned}\angle FOE &= \angle AOF - \angle AOE \\ &= 2\arcsin 0.74 - \frac{\pi}{2} - 2\arccos \frac{2}{3} + \arccos 0.9\end{aligned}$$

可见被照明的区域是一个环形区域。

(2) 在折射角确定的条件下，入射角随折射率增大，即 $\angle DOA$ 逐渐减小，E 点下移，而当 $n = 3/2$ 时，从 A 点折射进来的光线被内球挡住，即球面上中间区域不能被照明，同时光线在外球面上的入射角也等于 90°，只能从 A 点入射，从而被照明的区域消失。

5.4.4　全反射棱镜

全反射棱镜有极其广泛的应用。图 5.44 所示的是直角三棱镜，从直角面入射的光线，在斜面处发生全反射；从另一直角面射出，可以改变光线的方向。图 5.45 是单反照相机中的**屋脊形五棱镜**，经过两次全反射，将光线方向改变，使得成在毛玻璃上的水平方向的像变为直立的，与景物一致。图 5.46 所示的**阿米西棱镜**是一种倒转棱镜，可以使像倒转。图 5.47 是由一对斜面

相对、顶边正交的三棱镜构成的**珀罗组合棱镜**，这种组合棱镜广泛应用于现代双筒望远镜中，不仅可以将像倒转，还能将光路折叠，使得在有限的空间中获得较大的光程。图5.48中还列出了一些其他组合棱镜，作用和效果与珀罗组合棱镜相同。

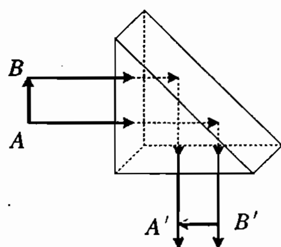


图5.44 直角三棱镜

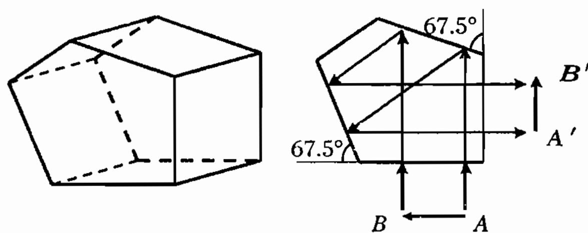


图5.45 屋脊形五棱镜



图5.46 阿米西棱镜

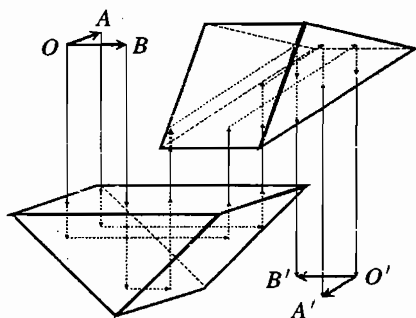
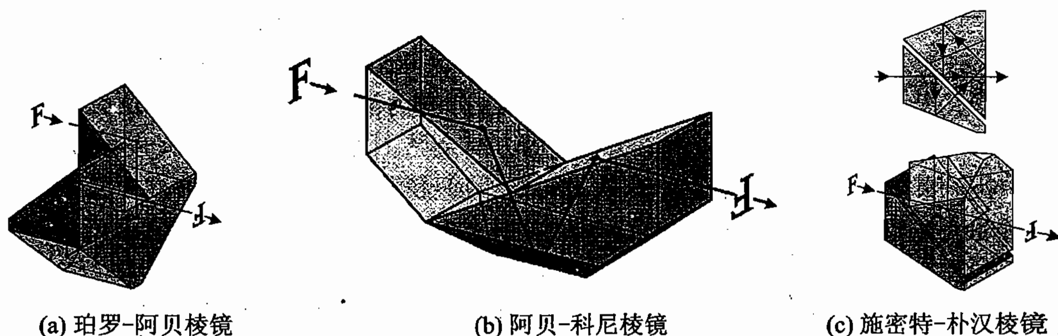


图5.47 珀罗组合棱镜

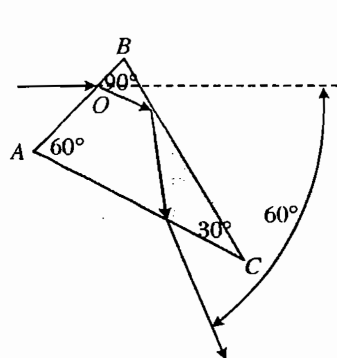


(a) 珀罗-阿贝棱镜 (b) 阿贝-科尼棱镜 (c) 施密特-朴汉棱镜

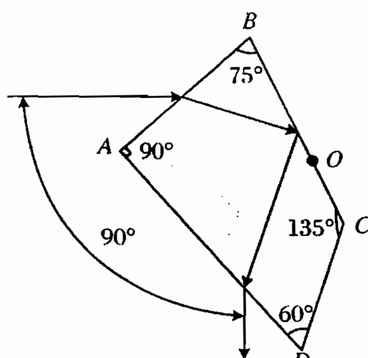
图5.48 其他组合棱镜

除了三棱镜之外，还有其他一些专用于测量光的色散的棱镜。如图5.49中的**阿贝棱镜**、**佩林-布罗卡棱镜**，光线在这样的棱镜中两次折射之间还有一次全反射，由于反射可以使不同波长光线间的角度差进一步增大，所以色散效果比三棱镜要好。

图5.50所示的是一种由三块棱镜组成的**分色棱镜**。在棱镜的接触面上镀有特殊的光学薄膜，可以仅仅使高频或低频的光波透过，而其他光波被反射。例如，F_1是低通膜，使得红光、绿光通过，而蓝光被反射；F_2是高通膜，使得绿光通过，红光被反射。这样，不同波段的光线沿三个相差很大的方向射出。



(a) 阿贝棱镜



(b) 佩林-布罗卡棱镜

图 5.49　用于色散的棱镜

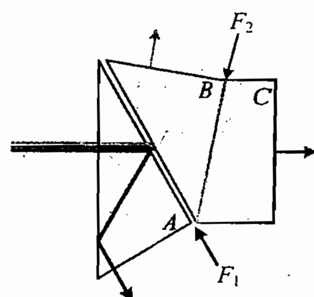


图 5.50　分色棱镜

【例 5.13】 直角锥棱镜是由三个相互垂直的平面构成的玻璃四面体，相当于从立方体中切下一角，如图 5.51 所示。证明：从斜面射入的光线，经过三个面依次反射后，将沿着入射的方向返回。

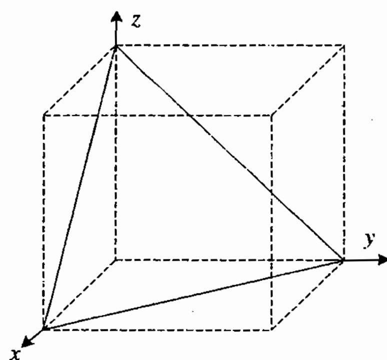


图 5.51　直角棱锥

解　进入棱锥的光线在每一个直角面上都发生全反射。这种棱镜也称作阿波罗棱镜，1969 年阿波罗 11 号首次将由 100 块直角锥棱镜组成的阵列反射器送上月球，用它反射来自地球上的激光，用这种方式准确地测定了月球与地球之间的距离。

以该棱锥直角的三个棱作为直角坐标轴，从斜面进入棱锥的光线的方向可以用单位矢量表示为

$$\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{e}_x + k_y \boldsymbol{e}_y + k_z \boldsymbol{e}_z$$

其中，$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ 分别为沿坐标轴方向的单位矢量，k_x，k_y，k_z 为相应的方向余弦。由于$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ 代表光线矢量的分量，每一个分量分别与一个反射面垂直，故被每一个面反射后，相应的分量的方向反转。因此，经过三个面反射后，光线的矢量变为

$$\boldsymbol{k}' = -(k_x \boldsymbol{e}_x + k_y \boldsymbol{e}_y + k_z \boldsymbol{e}_z) = -\boldsymbol{k}$$

该矢量与从斜面进入棱锥的光线矢量平行，因而在经过斜面折射后，出射的方向与射向斜面的光线平行，而方向恰好相反。

自行车的尾灯就是按照这一原理设计的。尾灯中有许多由红色塑料制成的直角棱锥，这些棱锥整齐地排成阵列，就组成了一个向后反射器。夜间，当汽车灯光照在它上面时，无论光的入射方向如何，反射光都能返回汽车，而且光强远大于一般的漫反射光，就像发光的红灯，使汽车驾驶员能够识别，以保证安全。

5.4.5　全反射光纤

光纤是利用全内反射原理制成的光线传输元件，结构如图 5.32 所示，通常有三层结构，中心是折射率较高的玻璃纤维，外面是一层低折射率的材料，其外还有一层包膜。由于玻璃纤维的直径很小，通常只有 0.1 mm 左右，而外面的两层通常都是有机材料，因而光线很容易弯曲。

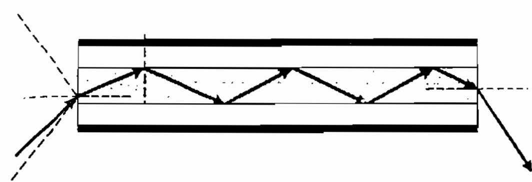


图 5.52　光纤中的全反射

由于只有大于临界角时才能产生全反射，所以从端面射入光纤的光线，对于光纤轴线的张角必须限制在一个范围之内。如图 5.52 左端的上下虚线间的夹角。

光纤可以弯曲，其中的全反射过程不会改变(图 5.53)。但是由于光纤很细，所以单根光纤无法传输图像，因此必须利用集束光纤传输光学图像，如图 5.54 所示。

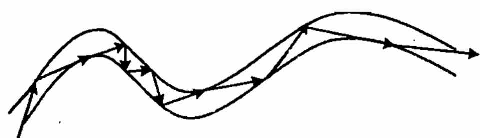


图 5.53　可以弯曲的光纤

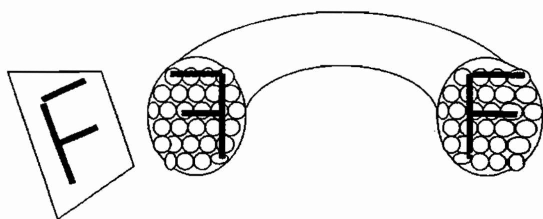


图 5.54　依靠集束光纤传输光学图像

【例 5.14】(第 17 届全国中学生物理竞赛复赛试题)　普通光纤是一种可传输光的圆柱形细丝，由具有圆形截面的纤芯 A 和包层 B 组成，B 的折射率小于 A 的折射率，光纤的端面与圆柱体的轴垂直，由一端面射入的光在很长的光纤中传播时，在纤芯 A 和包层 B 的分界面上发生多次全反射。现在利用普通光纤测量流体 F 的折射率，实验方法如下：让光纤的一端(出射端)浸在流体 F 中，令与光纤轴平行的单色平行光束经凸透镜折射后会聚在光纤入射端面的中心 O，经端面折射进入光纤，在光纤中传播。由 O 点出发的光束为圆锥形，已知其边缘光线和轴的夹角为 α_0，如图 5.55 所示。最后光从另一端面出射进入流体 F。在距出射端面 h_1 处放置一垂直于光纤轴的毛玻璃屏 D，在 D 上出现一圆形光斑，测出其直径为 d_1，然后移动光屏 D 至距光纤出射端面 h_2 处，再测出圆形光斑的直径 d_2，如图 5.56 所示。

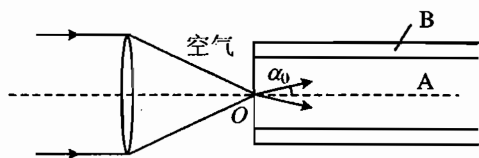


图 5.55　例 5.14 中光的入射

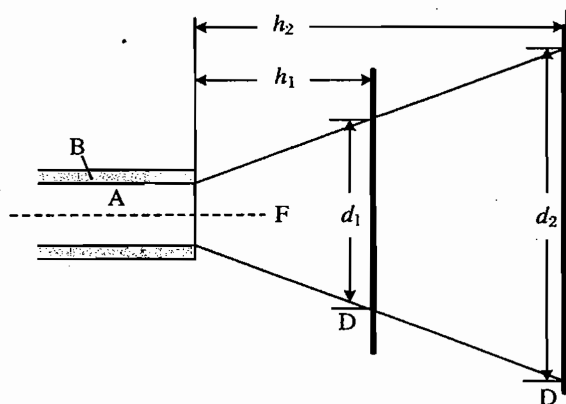


图 5.56　例 5.14 中光的出射

(1) 若已知 A 和 B 的折射率分别为 n_A 与 n_B，求被测流体 F 的折射率 n_F 的表达式。

(2) 若 n_A，n_B 和 α_0 均为未知量，如何通过进一步的实验测出 n_F 的值？

解 (1) 能够在光纤中长距离传播的光线要在纤芯壁上满足全反射条件，即其入射角应大于

$$i_c = \arcsin\frac{n_B}{n_A}$$

这样的光线与光轴的夹角为

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - i_c = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n_B}{n_A}$$

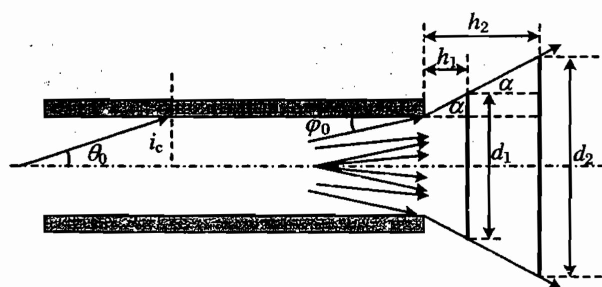


图 5.57 光线在光纤中的路径

已知在入射端面，光纤中边缘光线和轴的夹角为 α_0，若 $\alpha_0<\theta_0$，则光线在光纤中与光轴的最大夹角为 α_0；若 $\alpha_0>\theta_0$，则光线在光纤中与光轴的最大夹角为 θ_0。取两者中较小的，记为 φ_0。从图 5.57 中可以看出，从光纤的另一端面的边缘出射的光线的入射角为 φ_0，折射角记为 α，则

$$\tan\alpha = \frac{d_2 - d_1}{h_2 - h_1}$$

由折射定律，得

$$n_A\sin\varphi_0 = n_F\sin\alpha$$

解得

$$n_F = \frac{n_A\sin\varphi_0}{\sin\alpha}$$

又因为

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\dfrac{d_2-d_1}{h_2-h_1}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{d_2-d_1}{h_2-h_1}\right)^2}}$$

$$= \frac{d_2-d_1}{\sqrt{(h_2-h_1)^2-(d_2-d_1)^2}}$$

所以

$$n_F = \frac{n_A\sin\varphi_0\sqrt{(h_2-h_1)^2-(d_2-d_1)^2}}{d_2-d_1}$$

(2) 这时关于光纤的参数都不可用，只好用外部介质的参数进行推算。例如，可以将光纤的出射端面置于空气中，用题中的方法测量不同距离处的两个光斑，就可得出光纤在空气中的折射角。设该折射角为 α_1，则有

$$n_A\sin\varphi_0 = n_0\sin\alpha_1$$

于是有

$$n_F = \frac{n_0\sin\alpha_1}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha_1\sqrt{(h_2-h_1)^2-(d_2-d_1)^2}}{d_2-d_1}$$

【例 5.15】 折射率为 $n=1.50$、半径为 R 的透明半圆柱体放在空气中，其垂直于柱体轴线的横截面如图 5.58 所示，O 点为横截面与轴线的交点，光仅允许从半圆柱体的平面 AB 进入，一束足够宽的平行单色光沿垂直于圆柱轴的方向以入射角 i 射至 AB 整个平面上，其中有一部分入射光束能通过半圆柱体从圆柱面射出，这部分光束在入射到 AB 面上时沿 y 轴方向的长度用 d 表示。本题不考虑光线在透明圆柱体内经一次或多次反射后再射出柱体的复杂情形。

(1) 当平行入射光的入射角 i 从 0°到 90°变化时，试求 d 的最大值和最小值.

(2) 在图 5.58 所示的平面内，求出射光束与柱面相交的圆弧对 O 点的张角 θ 与入射角 i 的关系，并求在全入射时上述圆弧的位置。

解 若在圆柱面上发生全反射，则光线不能出射。

(1) 全反射临界角为 $i_c=\arcsin(2/3)$，光线进入圆柱后的折射角满足折射定律 $\sin i'=(2/3)\sin i$。根据图 5.59，能够出射的平面上半部分的入射光范围为 $y_1=R\dfrac{\sin i_c}{\sin(\pi/2+i')}$，能够出射的平面下半部分的入射光范围为 $y_2=R\dfrac{\sin i_c}{\sin(\pi/2-i')}$。

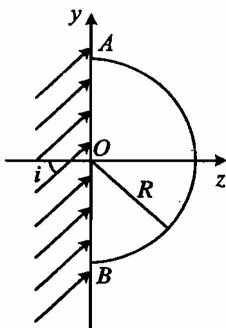


图 5.58 半圆柱体的横截面

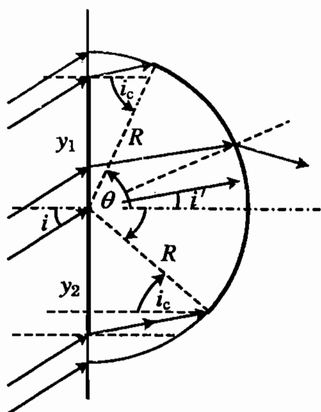


图 5.59 光在圆柱面上的全反射

利用

$$\cos i'=\sqrt{1-\sin^2 i'}=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-n^2\sin^2 i'}$$
$$=\frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2 i}$$

得到

$$d=y_1+y_2=\frac{2Rn\sin i_c}{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}$$
$$=\frac{2R}{\sqrt{1.5^2-\sin^2 i}}$$

从而得到

$$d_{\max}=\frac{4R}{\sqrt{5}},\quad d_{\min}=\frac{4R}{3}$$

(2) 从图 5.59 中可以看出，上半部分圆弧的张角为 i_c+i'，下半部分圆弧的张角为 i_c-i'，

所以总的张角为

$$\theta = i_c + i' + i_c - i' = 2i_c$$

全入射时，$i = \pi/2$，$i' = i_c$，被照亮的圆弧只在上半部分。

5.4.6 虹与霓

喷泉、瀑布、海浪所形成的水雾在日光下能产生绚丽的彩虹，雨后初晴的碧空中，也可常常看见圆弧形的彩虹映在蓝天中。只要稍加留心就会注意到，无论是喷泉、瀑布、海浪还是雨后的彩虹，形状都是圆弧形的，而且最外圈总是红色，向内依次是黄、绿、蓝。如果空气非常洁净，有时还能在彩虹的外圈看到另外一条虹，外圈的虹虽然形状与内圈的虹相似，但色彩的分布恰好相反，最外圈是蓝色，最内圈是红色，而且亮度要低得多。外圈的彩虹称作“副虹”，这就是古书上所说的“霓”。

虹的成因是日光在水珠中发生折射、反射或全反射，同时产生色散。如果从光学成像的角度分析，实际上虹就是太阳的一个有球差和色差的像。下面，我们从几何光学的基本定律对彩虹的成因作一解释。

照射到地球的日光是包含各种波长成分的平行光束。水珠是球形的，日光在球面上不同的入射点处，入射角、入射面都是各不相同的，因而折射、反射的情况也不相同。由于球面上任一点的法线都经过球心，所以任一条光线的入射面都是过水珠球心的大圆，只是没有任何两个大圆是互相平行的。

首先分析入射面是竖直的情形。如图 5.60 所示，入射光线首先在朝向太阳一侧的球面上经折射进入水珠，之后被另一侧球面反射（如果角度合适会发生全反射），最后又从朝向太阳一侧的球面折射出来。由于色散，红光的出射点低于蓝光的，与水平面的夹角也大于蓝光的。所有这些光线中，只有极少的一部分从水珠上部射入并从下部射出的光线可以进入地面上的人眼或成像仪器。因为光线是发散的，所以，对观察者来说，红光的位置高于蓝光的。

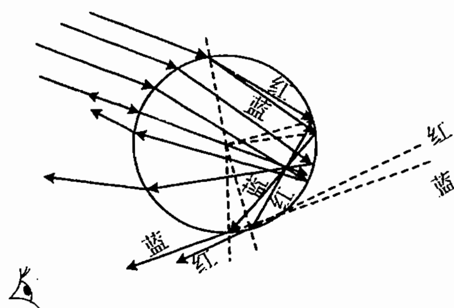


图 5.60　日光在水珠中的折射、反射或全反射

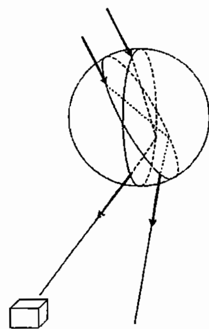
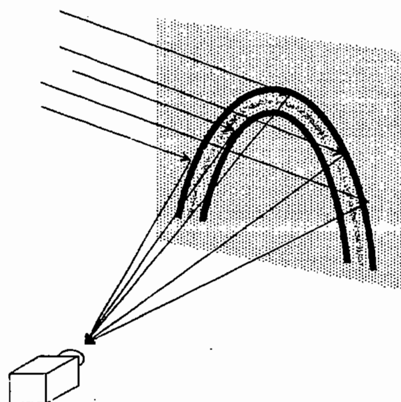


图 5.61　水珠中不同入射点的光线出射方向不同

对于处于观察者和太阳正面的水珠，如果光线的入射面不是竖直平面，则从水珠折射出的光线不射向观察者，因而不会被看到，如图 5.61 所示。对于观察者两侧的水珠，竖直入射面的光线不能进入眼睛，只有在高度较低的水珠中且在倾斜入射面中的光线才能被看到。因而彩虹的形状总是圆弧形的，圆弧的顶点正在太阳与观察者连线所在的竖直平面内，如图 5.62 所示。

从图 5.63 可以看出，某些从水珠下半部入射的光线在内部经过两次反射后从水珠上半部

射出，也能进入地面上观察者的眼睛，这样的虹位置要高于只有一次反射的虹，而且色彩分布正好相反。由于两次反射，光强要弱得多，所以只有在特别洁净的大气中才能见到这样的副虹（或霓）。


图5.62　太阳、观察者与彩虹间的相对位置

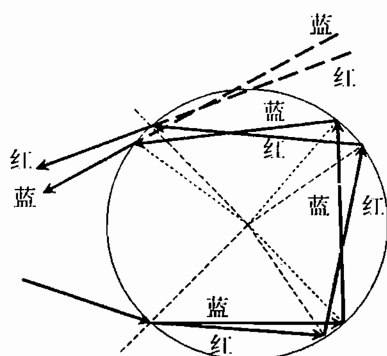


图 5.63　霓的形成

5.5　变折射率光学

5.5.1　变折射率介质

两种不同的透明介质有明显的分界面，例如空气中的玻璃表面等。在这样的分界面处，光线的方向将发生折变，这是一种突变，可以用折线表示。

但是，还有一类透明介质，即使是在同一种介质中，各处的折射率也不相同。例如大气，由于受重力和温度的影响，在不同的环境、不同的高度，大气的密度不同，所以其折射率不同。另外，由大气压强分布而引起的空气流动也会造成折射率的不同。这种折射率的变化不是突变的，往往没有明显的边界，而是渐变的。在这种情况下，光线方向的变化也是渐变的，可用光滑的曲线而不是折线表示。

渐变折射率介质的折射率是空间位置的函数，一般情况下可以写作 $n=n(\boldsymbol{r})$，其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 是表示空间位置的位矢。实际中，折射率空间分布的函数关系往往十分复杂，本书只讨论较为简单的情况，在这种情况中，折射率仅随空间位置的一个参量变化。

可以根据处理问题的方便而灵活地选取坐标系。例如，在选定的直角坐标系中，设介质的折射率仅随坐标 y 改变，用函数表示为

$$n=n(y)$$

其中的任意一条光线在某一点(x_0,y_0)的方向已知，那么，如何确定光线在介质中的传播路径？

5.5.2　光线方程

为确定光线方程，可以采用微分学中常用的方法，将介质分成一系列厚度为 $\mathrm{d}y$ 的薄层，设每一层中的折射率是均匀的，如图 5.64 所示。在其中任意一层的界面上，应用折射定律，有

$$n\sin i = n_j\sin i_j = n_{j+1}\sin i_{j+1} = n(y_0)\sin i(y_0) = n_0\sin i_0$$

图 5.64 介质分层

折射率和光线的入射角、折射角的变化可表示为

$$n_{j+1} = n_j + \Delta n_j,\quad i_{j+1} = i_j + \Delta i_j$$

由于$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cot\ i$，利用三角函数公式

$$\sin i = 1/\sqrt{1+\cot^2 i} = 1/\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \frac{n_0}{n}\sin i_0$$

可以得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{n^2 - n_0^2\sin^2 i_0}{n_0^2\sin^2 i_0} \tag{5.14}$$

这就是光线方程。可以根据折射率分布函数 $n = n(y)$和已知条件 n_0，i_0 求解光线方程。

【例 5.16】（第 3 届全国中学生物理竞赛预赛试题） 如图 5.65 所示，一束平行白光沿 x 方向通过屏 P 上小孔 C 后，射向玻璃立方体 A。设 A 的折射率在 y 方向上随着 y 值的增加而线性增大，但在与 y 轴垂直的平面内是均匀的。从 A 射出的光线经过折射率均匀的玻璃三棱镜 B 后，照到与 x 轴垂直的观察屏（毛玻璃）E 上。试在右图中定性地画出所看到的 E 上的图像。

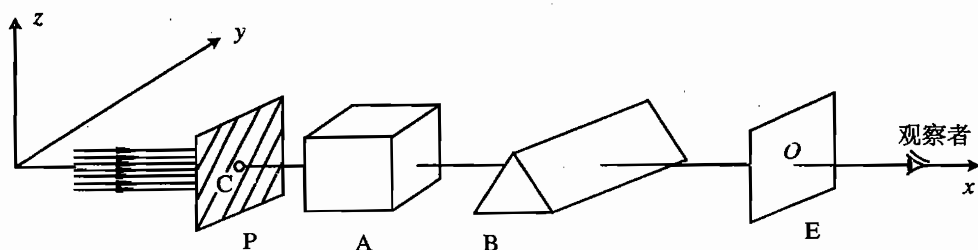


图 5.65 例 5.16 中的装置

解 白光通过小孔 C 后，投射到 A 上。由于 A 的折射率沿 y 方向增大，所以光线沿 y 方向发生色散，形成一条彩带，沿着 y 方向波长依次变短。再经过 B，向底边折射，由于短波的折射率较大，所以彩带的短波部分向下弯曲较多。

【例 5.17】 若一条笔直而平坦的高速公路上方空气的折射率随高度 y 的变化规律为 $n = n_0(1 + Ay)$，其中 $A = 0.8\times10^{-6}\ \mathrm{m}^{-1}$，$n_0$ 是地面处空气的折射率。一个人站在公路上向远处观察，他的眼睛离地面的高度为 $H = 1.6\ \mathrm{m}$，问此人能看到公路上最远的距离 d 是多少？

解 由于空气的折射率随高度的增加而变大，所以从公路上发出的光线将向上弯曲传播。如果从远处公路表面发出的光线传播到人所在的位置，其高度超过人眼的位置，则无法看到。为求出 d，需要知道光线的轨迹，因此，可将公路上方的空气划分为许多平行于地面的薄层，而每层的折射率可以视作不变量，而相邻两层的折射率略有变化。光线穿过各个薄层时遵循折射定律，再加上相应的几何关系，就可以得到光线轨迹的方程，从而求出 d 值。

按图 5.66(a)取直角坐标系，设光线自坐标原点发出，将公路上方的空气划分为一系列平行于地面的薄层，各层的折射率为 n_0，n_1，n_2，…。易知，从原点发出的光线几乎沿着公路表面

传播，并且光线经过各个空气层折射时满足下面的关系：

$$n_0 = n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = \cdots = n\sin\theta \tag{5.15}$$

式中，θ 是光线在任一薄层中传播时光线与该薄层界面的夹角。由上式及题意，可得

$$n_0 = n\sin\theta = n_0(1 + Ay)\sin\theta \tag{5.16}$$

如图 5.66(a)所示，由几何关系

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cot\theta$$

可得

$$\sin\theta = 1/\sqrt{1+\cot^2\theta} = 1\Big/\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

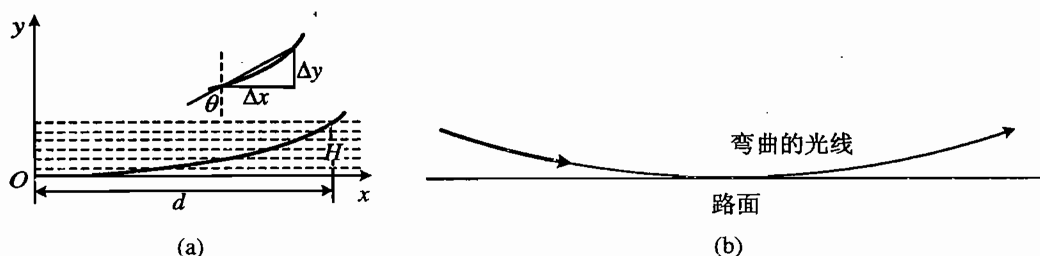


图 5.66　路面附近弯曲的光线

代入式(5.16)，有

$$1 + Ay = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

对上式整理，得

$$1 + 2Ay + A^2y^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

由于 $A = 0.8\times10^{-6}\ \mathrm{m}^{-1}$，可以将 A^2y^2 略去，得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 2Ay \tag{5.17}$$

式(5.17)即是光线满足的微分方程，也可以改写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \sqrt{2A}\,\mathrm{d}x \tag{5.18}$$

两端积分，得到

$$2\sqrt{y} = \sqrt{2A}x + C$$

由初始条件 $x=0$ 时，$y=0$，可知积分常数 $C=0$。于是光线的轨迹方程为

$$y = \frac{A}{2}x^2 \tag{5.19}$$

当 $y=H$ 时，有

$$d = \sqrt{\frac{2H}{A}} = 2\times10^3\ \mathrm{m}$$

即此人最远能看到 2 000 m 长的公路。

事实上，在路面附近，光线发生弯曲的情况如图 5.66(b)所示，这种光线的弯曲似乎是被远

处路面反射的结果，看起来，好像路面上有一个反射镜（实际上，观察者往往会根据生活常识认为是一汪积水），这是晴朗炎热的夏天常见的景象。炽热的沙漠中或冬季的海面上，空气的折射率分布都有类似的特征，弯曲的光线使远处的景物若隐若现，这就是人们所说的“海市蜃楼”。

【例 5.18】 设光纤的折射率分布满足 $n^2(r) = n^2(0)(1-\alpha^2 r^2)$，式中 α 为比 1 小得多的常数，$n(0)$为光纤轴线中心的折射率，r 为光纤中一点到其轴线的距离。试求光线传播的轨迹方程，并证明：在近轴光线条件下，光纤有自聚焦的特性。

解 光学纤维分两类，一类称阶跃型光纤，其折射率沿径向呈阶梯形分布，这种光纤的传输机制是全反射原理，故又称全反射光纤。进入光纤端面的光线在不同折射率介质的界面上发生多次全反射而传播到另一端。光纤可以黏合、弯曲，用于图像传输。

另外还有一种新型光纤，其折射率从轴线沿径向连续变小，光线在这种光纤中被连续折射，故称折射型光纤（或梯度型光纤）。本题讨论的即是这种新型光纤中光线的传播轨迹。为此，可以将光纤分割成许多同轴的薄圆筒，将每层圆筒的折射率看作常数。由对称性可知，只需要分析含光纤轴线的截面内的光线轨迹即可。由折射定律及几何关系可以求得光线的轨迹。

设 Oz 表示光纤轴线；Or 垂直于 Oz，表示光线的半径方向。现沿径向将光纤分为一系列薄层，如图 5.67 所示，相应的折射率记作 $n_1, n_2, n_3, \cdots$。光线在光纤中发生连续折射，沿轴向传播（图 5.68）。按折射定律，有

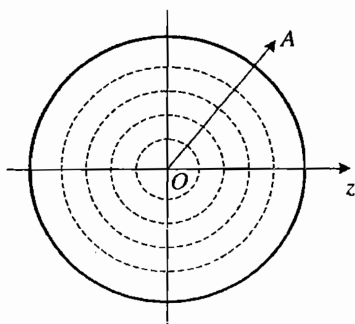


图 5.67 [illegible]型光纤的截面

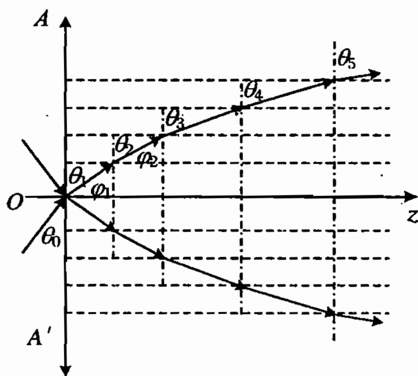


图 5.68 折射型光纤中的光线

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = \cdots = \text{常量}$$

因此，对于折射率连续分布的情况，则有

$$n(r)\sin\theta = n(r)\cos\varphi = n(0)\cos\varphi_1 = \text{常量} \tag{5.20}$$

式中，θ 表示光线在距轴线 r 处的切线方向与半径的夹角，而 φ 是其余角。另外，$n(0)$，φ_1 分别表示光纤轴线上的折射率和光线与轴线的夹角。

为了求光线轨迹的方程，先考虑光线轨迹上任一点的斜率

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = \tan\varphi = \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.21}$$

将式(5.20)代入式(5.21)，整理后得到

$$\mathrm{d}z = \frac{n(0)\cos\varphi_1 \mathrm{d}r}{[n^2(r) - n^2(0)\cos^2\varphi_1]^{\frac{1}{2}}} \tag{5.22}$$

将

$$n^2(r) = n^2(0)(1 - \alpha^2 r^2)$$

代入上式并积分，得

$$z = \int_0^r \frac{n(0)\cos\varphi_1 \mathrm{d}r}{[n^2(r) - n^2(0)\cos^2\varphi_1]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\cos\varphi_1}{\alpha}\arcsin\frac{\alpha r}{\sin\varphi_1}$$

从而可求出 r 的表达式

$$r = \frac{\sin\varphi_1}{\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{\cos\varphi_1}z\right) \tag{5.23}$$

式(5.23)表明光的路径为正弦曲线。振幅 $\sin\varphi_1/\alpha$ 与初始条件 φ_1 有关。设 L 表示该正弦曲线的空间周期，则应有

$$\frac{2\pi}{L} = \frac{\alpha}{\cos\varphi_1} \tag{5.24}$$

假定光线自光纤端面 $r=0$ 处入射，且入射角为 θ_0，因此，由折射定律，有

$$\sin\theta_0 = n(0)\sin\theta_1$$

代入式(5.24)，可得

$$\frac{2\pi}{L} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta_0}{n^2(0)}}}$$

显然，对于从不同方向入射的光线，其 θ_0 不同，L 也不同。但当小角度入射时(傍轴近似)，$\cos\varphi_1 \approx 1$，所有光线有相同的 $L = 2\pi/\alpha$。

它们的轨迹如图 5.69 所示。这意味着光线在光纤中传播时有聚焦效应，因而称作自聚焦光纤。自聚焦光纤可用来成像，称为自聚焦透镜，它的直径很小，焦距很短，能沿弯曲路径成像，分辨率高，被广泛应用在光纤通信和工业诊断的内窥镜等方面。

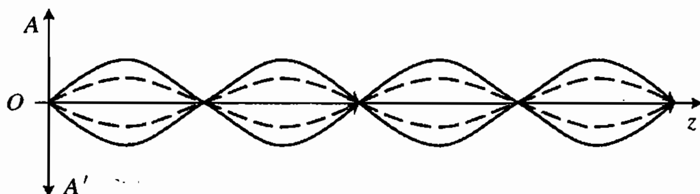


图 5.69　折射型光纤中的自聚焦效应

【例 5.19】(第 9 届全国中学生物理竞赛预赛试题)　设有一块透明光学材料，由折射率略有不同的许多相互平行、厚度为 $d = 0.1$ mm 的薄层密接构成。图 5.70 表示与各薄层垂直的一个截面，AB 为此材料的端面，与薄层界面垂直。OO' 表示截面的中心线。各薄层的折射率 n_k 的数值为 $n_k = n_0 - k\nu$，其中 $n_0 = 1.4142$，$\nu = 0.0025$。现有一光线 PO 以入射角 $\theta_0 = 30^\circ$ 射向 O 点。求此光线在材料内能够达到的离 OO' 最远的距离。

解　光线在进入介质时，折射角为

$$\theta_0' = \arcsin\frac{\sin 30^\circ}{1.4142} = \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$$

在介质中的第一个分界面处，入射角为

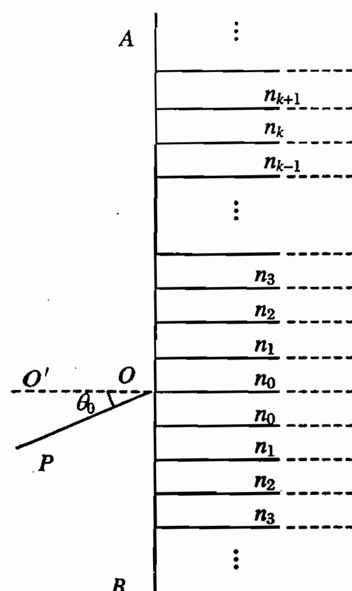


图 5.70　例 5.19 中光学材料的截面

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0' = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\alpha_0 = \cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

之后的折射满足

$$n_0\sin\alpha_0 = n_1\sin\alpha_1 = \cdots = n_k\sin\alpha_k = \cdots$$

直至出现全反射,然后向下折射。出现全反射的条件是

$$n_0\sin\alpha_0 = n_1\sin\alpha_1 = \cdots = n_{k-1}\sin\alpha_{k-1} = n_k$$

$$n_k = n_0 - kv = 1.4142 - 0.0025k$$

从中解得

$$k = \frac{1.4142 - n_0\sin\alpha_0}{0.0025}$$

$$= 400\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right) = 36.5$$

说明在进入 $k = 37$ 层后发生全反射,因此,最远的距离为

$$(k+1)d = 38\times 0.1 = 3.8\quad(\text{mm})$$

第 6 章　透镜与透镜组的成像

6.1　成像的基本概念

6.1.1　从盲人摸象说起

人能够一眼看清大象的全貌，这当然是因为来自大象的光线经过眼睛后在视网膜上形成了一个完整的图像。在《伊索寓言》中，四个盲人则用“摸”的方式，分别构建出了大象的腿、尾、牙和躯干的图像，虽然他们没能将这几部分合成起来得到大象准确而完整的图像，但却说明用其他方式也能获得实物的像。

其实，“物”是客观存在的，“像”只是物的再现。人们本能地以为“像”只是由“光”构成的，那也是因为自然赋予我们视觉的结果。例如，黑暗中我们能够摸出器物的形状，没有视觉的蝙蝠依然能够“看”得清清楚楚，等等。所以，除了光学方法之外，还有其他成像方式。

“摸”其实是一种扫描过程，手上的每一个触点就是一个“探针”。如果用探针扫描物体，并使探针能够分辨物体上的凸凹、虚实、材质等细节，并将扫描所得到的信息按序排列，也可以再现物体的形貌。如果将扫描信息用图形表现，就得到了扫描客体的像。

扫描是一种逐点成像方式，探针越细小，分辨本领就越高；对不同信号的识别越灵敏，准确度就越高。

现代高分辨率的显微镜，如扫描电子显微镜、扫描隧道显微镜、原子力显微镜等等，都是采用这种逐点扫描的方式再现物体的形貌和结构的，近场光学显微镜也采用这种方式。

用于医学诊断的 X 射线成像是利用人体中不同组织对 X 射线吸收的差异，依据透射 X 射线的强度而成像的。尽管可以将 X 射线称作 X 光，但 X 光不能像可见光那样利用透镜折射成像，所以医用 X 射线机中没有任何光学透镜，只是记录透射 X 射线的强度而已。更先进的 CT 成像，与光学成像相差很大。所谓 CT，是 Computerized Tomography 的缩写，意思是“由计算机所得的断层图像”，或简称“计算机断层扫描”。使一束细 X 射线绕身体某部位轴向旋转，并同步记录透射强度，将扫描结果输入计算机，就可得到被射线束扫过的断层的图像。当然，为了生成图像，在计算机中需要建立一个庞大的数据库，该数据库就是各种生理组织的解剖结果与 X 射线透过率的关系库。除此之外，还有核磁共振成像，机制不同，但方法类似。微波束由于和人体中的元素产生共振而被吸收，根据微波扫描过程中吸收的数据，也可以通过计算机合成图像。

6.1.2　光学成像的基本要素

光学成像就是用折射、反射的方法将物再现。如果将物和像都看成是一系列按序排列的空

间点，那么，只要像点与物点一一对应，像与物就整体对应，如图 6.1 所示。

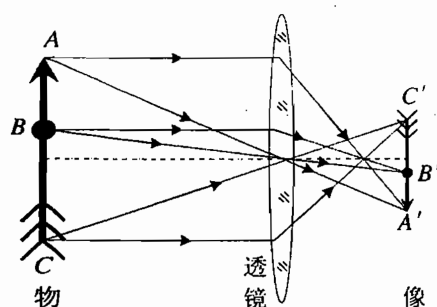


图 6.1 成像过程中像点与物点一一对应

从光线的观点看，物点就是光线束的出发点，像点就是光线束的会聚点。

因而，研究光学成像，可以从经过光学系统之后的光线束的会聚性入手。

以下首先讨论成像的一些基本概念。

1. 同心光束

从同一点发出的或会聚到同一点的光线，称为**同心光束**，如图 6.2 所示。

物和像都是由一系列的点构成的，物点和像点一一对应，于是就得到了对应的物和像。从光线的性质看，物上的每一点都发出同心光束，而对应的像点都由同心光束会聚得到，所以成像的最基本条件是要满足同心光束的不变性。当然，这仅仅是对点成像的要求。从整个物和像的对应关系看，还必须要满足物像间的相似性，即空间上各个点之间的相互位置要一一对应，同时每一对物像点的颜色，即光的波长要一一对应，这就要求成像的光学系统不产生畸变，没有像差、色差等等。

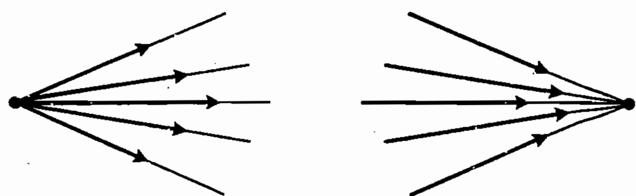


图 6.2 发散和会聚的同心光束

2. 光具组

单个平面反射镜或球面反射镜可以成像，单个透镜可以成像，甚至单个折射面也能够成像，这些都可以看作是光学成像的基本元件。但更多的情况是将多个成像元件组合起来，以达到更好的成像效果。这样组合起来的一系列成像光学器具，就是**光具组**。

从对光线的作用看，光具组就是由若干个反射面或折射面组成的光学系统。光具组的对称轴就是**光轴**。

3. 物方和像方

物所发出的光线经过成像元件或光具组之后成像，这样一来，光具组就将光线传播的空间分为两部分，一部分是物所在的空间，或者是物所发出的光线所在的空间，称为**物方空间**，或简称为**物方**。而另一部分空间是像所在的空间，或者会聚成像的光线所在的空间，称为**像方空间**，或简称为**像方**。

在透镜成像的情形下，物光线和像光线总是在透镜的两侧，或者说观察者总是通过透镜观察物，这时物方和像方是分开的，互不交叠的。而在反射镜成像的情形下，由于光线总是被反射回来，而不可能穿透到镜面的另一侧，所以物方和像方是重叠的，总是在镜面的同一侧。

有时看起来像并不在像方。例如平面镜成像或凹透镜成像就是这样：平面镜的像在镜面的另一侧，而凹透镜的像在物方。因而，用像所在的空间来定义像方是不恰当的。平面镜之所以能够成像，是因为光线被反射，而凹透镜之所以能够成像，是因为光线被折射，它们的像都是由被反射或折射后的光线构成的。这些成像光线所处的空间是像方，与像看起来在何处没有直接的关系。

4. 实像和虚像

经过光具组的像方光线，如果是会聚的，则在像方会聚成同心光束，就形成实像，如图 6.3(a)所示。实像是真实的光线会聚而成的，从光学角度看，与实物的性质是相似的。

经过光具组的像方光线，如果是发散的，则在像方无法会聚，不能形成实像。但是，如果将这些发散的光线反向延长后，将会聚到某一点，如图 6.3(b)所示。对观察者来说，这些发散的同心光束就是从这样的会聚点射出的，因而这些会聚点就是像点。只是这些并不真的是像方光线会聚而成的点，因此这样的像就是**虚像**。虚像一定不能在像方形成。

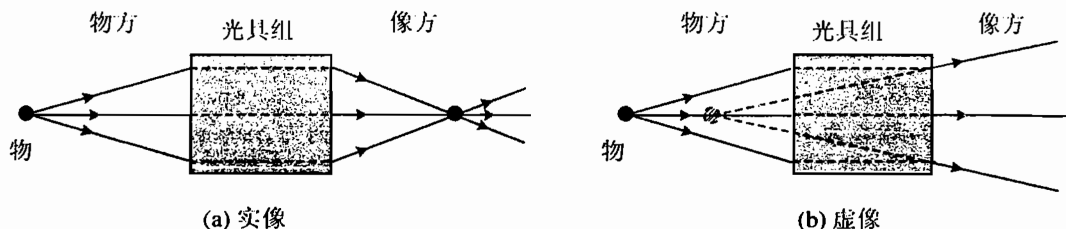


图 6.3　实像与虚像

我们说虚像不真的是光线会聚而成的，不是指虚像不能发出真实的光线。对观察者来说，虚像在像方的光线是真实的光线，观察虚像同观察实物的效果是一样的，如图 6.4 所示。而且成虚像的光线发散角很大，在不同的位置处都能很容易地观察到。

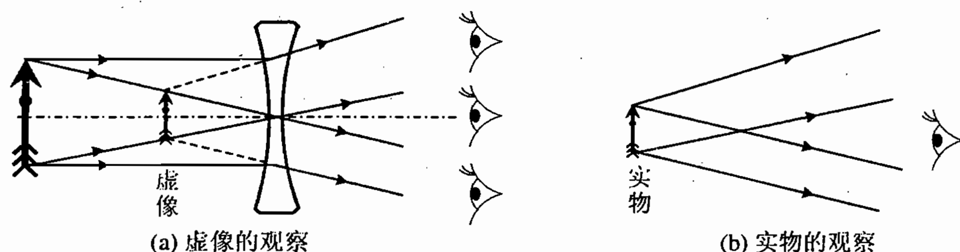


图 6.4　虚像与实物的观察

相比于虚像的观察来说，直接观察实像则显得困难。由于受到光具组通光孔径的限制，像方同心光束的发散角往往比较小，所以只有在一定的范围内才能观察到成实像的光线，如图 6.5(a)所示。因而往往通过接收屏或者毛玻璃观察实像，如图 6.5(b)所示。由于接收屏和毛玻璃表面的粗糙引起光线的漫反射或散射，光线的发散角增大，观察起来要方便得多。

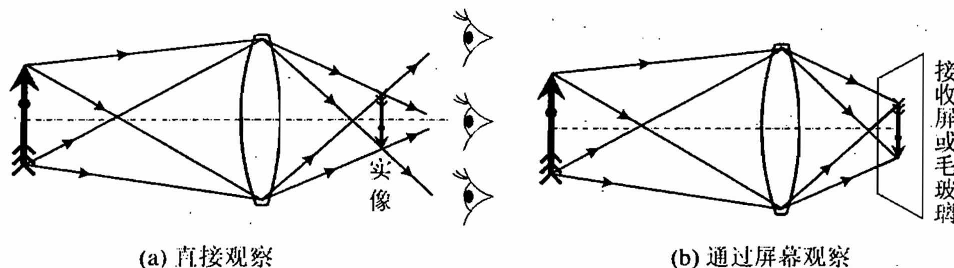


图 6.5　实像的观察

6.2 傍轴光经球面折射成像

球面是对称性最高,也是较容易加工制作的一类曲面。折射球面和反射球面是光学成像的基本单元,本节将讨论同心光束经单个球面之后成像的条件和一般规律。

6.2.1 单球面折射成像

1. 轴上物点成像

在图 6.6 中,球心为 C、半径为 r 的球面 Σ 两侧的折射率分别为 n,n',光轴与球面的交点为 O,O 就是该球面的顶点。物点 Q 在光轴上,Q 点沿任意方向发出的一条光线入射到球面上,记入射点为 M,$\angle MCO$ 为 φ。该光线在 M 点处的入射角和折射角分别为 i 和 i'。经折射后,该光线与光轴在 Q' 点相交。由于从 Q 点发出的沿着光轴射向球面的光线经过球面折射后方向不变,仍沿光轴方向,所以 Q' 点就是 Q 点发出的两条不同方向光线的会聚点。

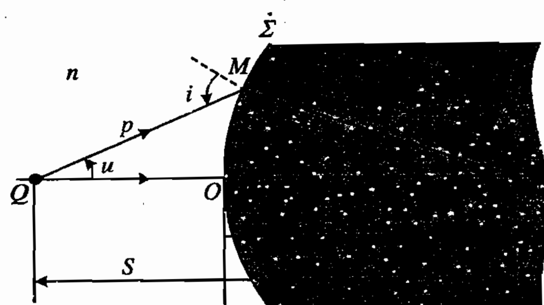


图 6.6　轴上物点经单球面折射成像

记经过 M 点的光线的长度分别为 p,p',与光轴的夹角分别为 u,u'。Q,Q' 到球面顶点 O 的距离分别为 s,s',在$\triangle QMC$ 和$\triangle Q'MC$ 中,根据正弦定理,有

$$\frac{p}{\sin\varphi}=\frac{s+r}{\sin i} \quad 和 \quad \frac{p'}{\sin\varphi}=\frac{s'-r}{\sin i'}$$

上述两式进一步可分别化为

$$\frac{p}{n(s+r)}=\frac{\sin\varphi}{n\sin i} \quad 和 \quad \frac{p'}{n'(s'-r)}=\frac{\sin\varphi}{n'\sin i'}$$

按折射定律,$n\sin i=n'\sin i'$,可以得到

$$\frac{p}{n(s+r)}=\frac{p'}{n'(s'-r)} \tag{6.1}$$

在$\triangle QMC$ 和$\triangle Q'MC$ 中,根据余弦定理,有

$$p^2=(s+r)^2+r^2-2r(s+r)\cos\varphi \quad 和 \quad p'^2=(s'-r)^2+r^2+2r(s'-r)\cos\varphi$$

上述两式进一步可分别化为

$$\begin{aligned}p^2&=s^2+2rs+r^2+r^2-2r(s+r)\cos\varphi\\&=s^2+2s(s+r)(1-\cos\varphi)=s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2}\end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}p'^2&=s'^2-2rs'+r^2+r^2+2r(s'-r)\cos\varphi\\&=s'^2-2s'(s'-r)(1-\cos\varphi)=s'^2-4r(s'-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}\end{aligned} \tag{6.3}$$

将式(6.2)和(6.3)代入式(6.1),可得

$$\frac{s^2+4r(s+r)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{n^2(s+r)^2}=\frac{s'^2-4r(s'-r)\sin^2\frac{\varphi}{2}}{n'^2(s'-r)^2}$$

整理后有

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}=-\sin^2\frac{\varphi}{2}\left[\frac{4r}{n^2(s+r)}+\frac{4r}{n'^2(s'-r)}\right] \tag{6.4}$$

由式(6.4)可以看出,s' 是 s 和 φ 的函数。也就是说,同一物点所发出的光线方向不同(即 φ 不同)时,折射后的光线与光轴的交点是不同的,即同心光束经球面折射后失去同心性。

欲使折射光线保持同心性,须要求式(6.4)中的 s' 仅仅是 s 的函数而与 φ 无关。只有在满足下述两种条件之一时,这一要求才能成立。

(1) 等式的右端为0。

如果 φ 很小,即 $\varphi\approx0$,则$\sin^2\frac{\varphi}{2}\approx0$。此时式(6.4)的右端为0,由此可得

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}=\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2} \tag{6.5}$$

即

$$\frac{n(s+r)}{s}=\pm\frac{n'(s'-r)}{s'} \tag{6.6}$$

当 φ 很小时,物方光线、像方光线分别与光轴的夹角 u 和 u' 都很小,所有成像的光线都临近光轴,这样的条件称作**傍轴条件**,或**近轴条件**。

对于图6.6所示的情况,式(6.6)中应当取正号。整理后得到

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r} \tag{6.7}$$

这就是傍轴条件下单个折射球面的物像公式,式中 s 定义为物距,s' 定义为像距。

记

$$\Phi=\frac{n'-n}{r} \tag{6.8}$$

称 Φ 为折射球面的**光焦度**。光焦度的量纲为长度的倒数,按国际标准单位制,其单位为 m^{-1},称作**屈光度**(符号为D)。光焦度是折射球面的基本光学参数,由球面的曲率半径和球面两侧的折射率的差决定。

使平行光入射,相当于物在无穷远处,即 $s=\infty$,从而得

$$s'=\frac{n'r}{n'-n}=f' \tag{6.9}$$

f'称作**像方焦距**,像点 Q'所在的位置为**像方焦点**,如图6.7所示。

折射光为平行光,相当于在无穷远处会聚成像,即 $s'=\infty$,从而得

$$s=\frac{nr}{n'-n}=f \tag{6.10}$$

f 称作**物方焦距**,物点 Q 所在的位置为**物方焦点**,如图6.8所示。

定义了焦距 f 和f' 之后,物像公式(6.7)亦可写为

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1 \tag{6.11}$$

这称为高斯公式。

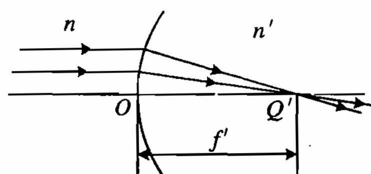


图 6.7　像方焦点与像方焦距

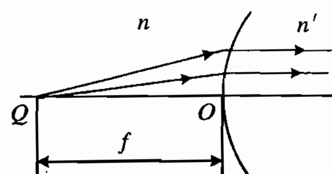


图 6.8　物方焦点与物方焦距

(2) 等式的两端均等于 0。

由于式(6.4)中分子中的物距和像距可以取任意值，所以只有 $r=\infty$，且 $n'^2=n^2$ 才能满足这一条件。这时，等式的左端为$\frac{s^2}{\infty}-\frac{s'^2}{\infty}=0$，而等式的右端为 $-\sin^2\frac{\varphi}{2}\left[\frac{4r}{n^2r}+\frac{4r}{-n'^2r}\right]=0$。在这一条件下，对于任意的角度 φ，式(6.4)都能够成立，并不仅仅限于傍轴光线。

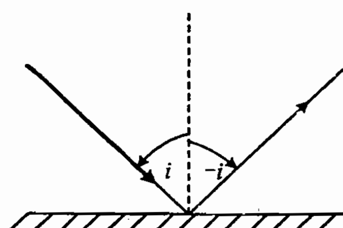


图 6.9　反射定律中角度的正负值

$r=\infty$，表示界面为平面。至于 $n'^2=n^2$ 的含义，可以这样看：如果 $n'=n$，则两侧是同一种介质，该界面没有任何物理意义；只有当 $n'=-n$ 时，界面才有意义。从传统意义上对折射的理解与定义，负的折射率难以接受。但是，如果按照数学上对角度的定义观察反射定律，由于入射光线和反射光线相对于法线的旋转方向恰相反，所以反射角应当是负值，如图 6.9 所示。这样一来可以将反射定律写作 $-i'=i$，如果将其作为折射定律的特例，则有 $n'\sin(-i)=n\sin i$，因而必须有 $n'=-n$。

这样一来，$r=\infty$ 且 $n'=-n$ 时，表示平面反射镜，物像关系为

$$s'=-s \tag{6.12}$$

像距取负值，表示成像于反射镜的另一侧，像不在像方。成像公式中的符号，后面将作详细的讨论。

在本书的第 1 章中已经讨论过平面镜可以严格精确地成像，通过上面的分析，读者可进一步看出，平面反射镜是唯一能够严格成像的几何光学器件。

6.2.2　轴外物点成像

实际的物体总有一定的空间尺度，多数物点总是在光轴之外的。轴外物点发出的光线成像规律又是怎样的呢？

球面的对称性是最高的，凡是过球心的直线都是其对称轴，也就是光轴。如果将图 6.1 中的光轴绕球心 C 旋转，则物点和像点相应旋转并画出一段圆弧，如图 6.10 所示，其中圆弧 QQ_1 的像就是圆弧 $Q'Q_1'$，即圆弧 QQ_1 和圆弧 $Q'Q_1'$ 相互共轭。

不妨将原来的光轴(即图中水平方向的光轴)称作**主光轴**，设物是一段垂直于主光轴的直线，如图 6.11 所示，则轴外的物点 P 的物距比 Q 点的要大一些，根据物像公式$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$或高斯公式$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$，物距 s 越大，像距 s' 越小。因此，在满足傍轴条件时，像$\widehat{P'Q'}$应当是进

一步向球心弯曲的弧线(注意,不是圆弧)。

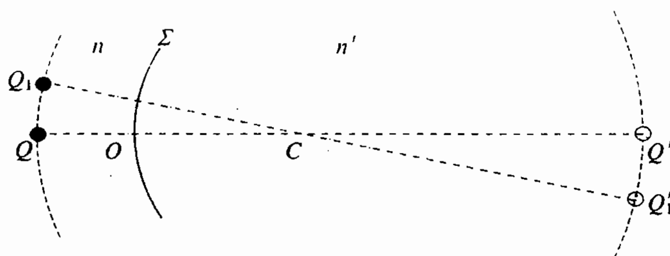


图 6.10 轴外物点成像

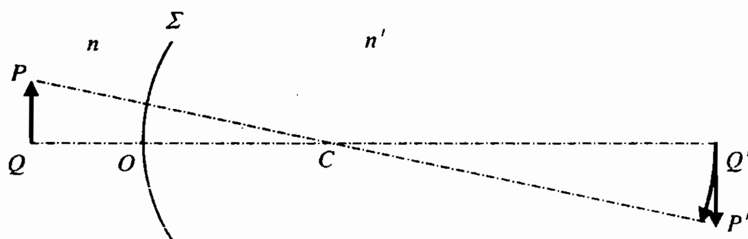


图 6.11 傍轴条件下的物与像(弧线近似为直线)

如果是垂轴小物,所成的像也很小,这时,曲线$\widehat{P'Q'}$近似为垂轴的直线。因而,在满足傍轴条件时,垂轴直线所成的像也是垂轴直线。图 6.11 中仅仅画出了一个过光轴的平面,而实际上,垂轴平面的像也是垂轴平面。所以,物所在的垂轴平面就是**物平面**,而对应的像所在的垂轴平面就是**像平面**。

从轴外物点成像的特点可以看出,所谓的傍轴光线,不仅仅是指临近光轴或主光轴的光线束,例如,轴外物点的光线束不临近主光轴。广义的傍轴光线是指发散角不是很大的光线束。

6.2.3 横向放大率

如图 6.12 所示,将物和像的高度(即物和像的横向长度)分别记为 y 和 y',并定义像高与物高的比值为像的**横向放大率**,以符号 V 表示,则

$$V=\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}}=\frac{s'\tan i'}{s\tan i}$$

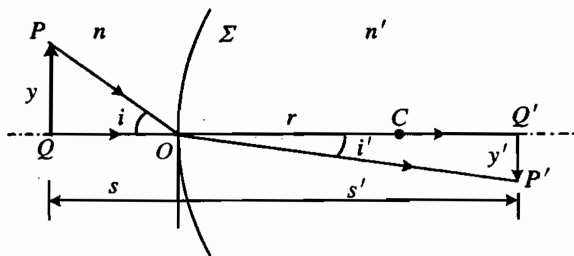


图 6.12 像的横向放大率

光线 PO 经球面折射后变为 OP',相应的角度关系为 $n'\sin i'=n\sin i$。由于是傍轴光线,入射角、折射角都是小角,$\tan i'\approx\sin i'$,$\tan i\approx\sin i$,因而

$$\frac{s'\tan i'}{s\tan i}\approx\frac{s'\sin i'}{s\sin i}=\frac{ns'}{n's}$$

则横向放大率为

$$V=\frac{y'}{y}=\frac{ns'}{n's}\tag{6.13}$$

6.2.4 焦平面

按照前面的讨论，焦点随着光轴绕球心旋转，在傍轴条件下就形成了过焦点 F 和 F' 的垂轴的平面 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$，这样的平面称作**焦平面**，如图 6.13 所示。由于物方焦点发出的光线会聚于像方无穷远处，而来自物方无穷远处的光线会聚于像方焦点，所以物方焦平面 $\mathscr{F}$ 就是无穷远处的像的物平面，而像方焦平面 $\mathscr{F}'$ 就是无穷远处物的像平面。

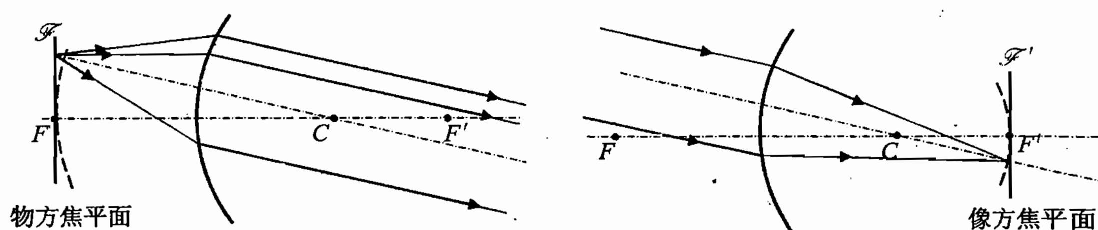


图 6.13　焦平面及其光学性质

由于从物方焦点发出的同心光束在像方是与光轴平行的光线，可以看出，从物方焦平面 $\mathscr{F}$ 上同一点发出的光线，经球面折射后在像方是相互平行的光线。同理，相互平行的物方光线，经球面折射后，必定会聚于像方焦平面 $\mathscr{F}'$ 上的同一点。

由焦平面的光学性质，可以得到求任一光线经球面折射后的方向的作图方法。对于沿任意方向的入射光线，都可以作出与该光线平行的光轴，即与入射光线平行的且通过球心的直线。相对于已经取定的光轴，可以把这条新光轴称为**次光轴**。在满足近轴条件下，次光轴与像方焦平面的交点即是这条次光轴的焦点，与次光轴平行的入射光线一定通过该焦点，即次光轴与像方焦平面的交点。

从上述推导过程可以看出，光线的近轴条件，即 $\varphi \approx 0$，以及物点的近轴条件，即 $y \approx 0$，是球面成像的充要条件。这样就可以保持光束的同心性和物像的相似性。这就要求用于成像的折射球面的通光孔径不能很大，同时物的线度也不能很大。这样一来，就对成像系统，包括光具组和物都有了极大的限制，几乎无法得到实用的球面成像系统。实际上，真正"严格"的成像系统是无法实用化的，实用的系统都是在满足一定条件下尽可能把上述两个傍轴条件的限制放宽的结果。

在引入并定义了焦点、焦距、焦平面等概念后，单个折射球面的光学性质可以用相应的光学参数描述，如图 6.14 所示。

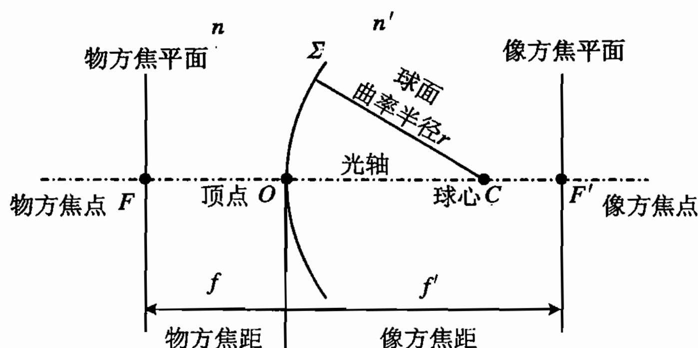


图 6.14　单个折射球面的光学参数

在高斯公式中，所有的距离都从过球面顶点的垂轴平面算起，这样的平面称作球面的主平面

【例 6.1】 读者可以看出，本节讨论单折射球面物像关系所用的光学系统，是假设球面曲率中心在像方的，即对观察者来说是凹球面，而且像方折射率大于物方折射率，即 $n<n'$。对于其他类型的光学系统，本节所得到的结论是否仍然适用？

解 分析物像关系的物理基础是折射定律，对于其他光学系统，利用折射的基本规律进行讨论。

(a) 凸球面，且 $n<n'$，见图 6.15。

从图 6.15 可以看出，这时物点发出的同心光束折射后在像方是发散的，不能会聚成实像，但在傍轴条件下，折射光线的反向延长线在物方会聚成虚像。同理，平行于光轴的物方光线的虚像点也位于物方。

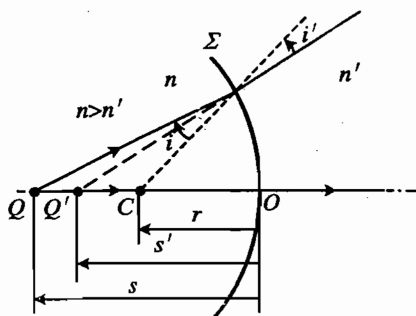


图 6.15 凸球面($n<n'$)

由于遵循相同的规律，所以基本的物像关系式也与式(6.6)相同，只是物点到球心的距离变为 $s-r$，对傍轴光线，依然有

$$\frac{n(s-r)}{s}=\pm\frac{n'(s'-r)}{s'}$$

取正号，则可得到

$$\frac{n}{s}-\frac{n'}{s'}=-\frac{n'-n}{r}$$

该式显然与物像关系式(6.7)不一致，但是如果稍作变形，则有

$$\frac{n}{s}+\frac{n'}{-s'}=\frac{n'-n}{-r} \tag{6.14}$$

由于球心在物方，所以约定在像方的凸球面的曲率半径 r 为负值，同时，由于所成的为虚像，也可以约定像距 s'为负值．这样一来式(6.14)与(6.7)完全一样。

这也是几何光学中必须对参数的正负符号作出约定的依据。

(b) 凸球面，且 $n>n'$，见图 6.16。

这时，由于总有 $i'<i$，所以物点发出的傍轴同心光束经折射后必定在像方会聚成实像。与式(6.6)相比，物点到球心的距离为 $s-r$，而实像点到球心的距离为 $s'+r$。在这种情形下，式(6.6)变为

$$\frac{n(s-r)}{s}=+\frac{n'(s'+r)}{s'}$$

整理后得到

$$\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{-r} \tag{6.15}$$

只要约定凸球面的曲率半径 r 为负值，式(6.15)与(6.7)就完全一样。

(c) 凹球面，且 $n>n'$，见图 6.17。

这时，由于总有 $i'>i$，所以物点发出的傍轴同心光束经折射后在像方必定发散，只能在物方成虚像。与式(6.6)相比，虚像点到球心的距离为 $s'+r$。在这种情形下，式(6.6)变为

$$\frac{n(s+r)}{s}=-\frac{n'(s'+r)}{s'}$$

整理后得到

$$\frac{n}{s}+\frac{n'}{-s'}=\frac{n'-n}{r} \tag{6.16}$$

同样,约定像距 s'为负值,则式(6.16)与(6.7)完全一样。

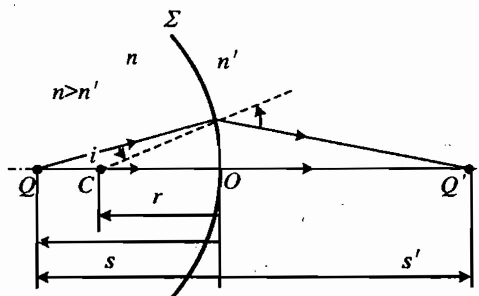


图 6.16 凸球面($n>n'$)

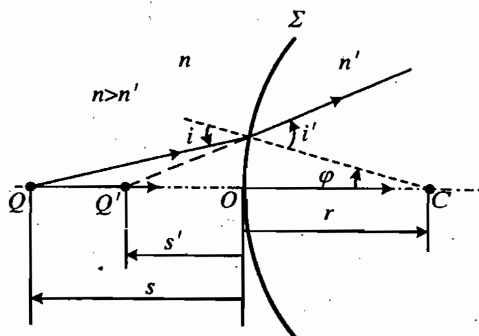


图 6.17 凹球面($n>n'$)

【例 6.2】 针对射向球面的会聚同心光束,试导出物像公式。

解 这样的入射光束在物方并无会聚点,也就是没有真实的物点。光束的会聚点在球面的右侧,就是将入射光束延长后的会聚点 Q。既然成像公式要给出物像之间的数学关系,在没有实物的情形下,也可以将上述物方光线的会聚点 Q 作为物点。当然 Q 是未经折射的入射光束的虚拟会聚点,称作虚物。

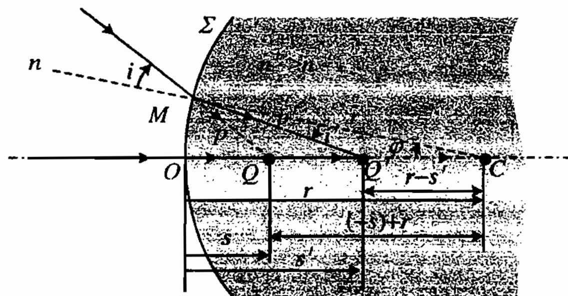


图 6.18 会聚同心光束经球面折射后成像

设入射光束满足傍轴条件,则光束经球面折射后,将会聚于 Q' 点。Q' 点就是虚物 Q 的像点,如图 6.18 所示。

同推导实物成像的方法和步骤相仿,对于图 6.18 中的两个以球面半径 CM 为共有边的三角形$\triangle QMC$ 和$\triangle Q'MC$,应用正弦定理和余弦公式,并注意到$\overline{QC}=r-s=r+(-s)$,$\overline{Q'C}=r-s'$,仍然可以得到式(6.6),即

$$\frac{n(r-s)}{s}=+\frac{n'(r-s')}{s'}$$

整理后得到

$$\frac{n}{-s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n}{r} \tag{6.17}$$

则只需将其中的 s 以负值代入,式(6.17)与(6.7)就完全一样,物像公式依然成立。会聚入射光线经球面的折射可以作为虚物成像进行处理。

6.2.5 几何光学的符号约定

从前面的叙述可以看出,几何光学就是应用折射、反射定律计算或确定光线方向等问题。在这种情况下,对于其中所涉及的诸如距离和角度等几何参量的正负号进行约定,并赋予正负

值不同的含义是非常必要的。应该指出,这种约定并没有一致的标准,只是一种根据习惯而定出的符号法则而已,不同的约定或符号体系并无优劣之分。

本书对线段和角度的符号采用以下方式进行约定:

(1) 球心在像方,球面的曲率半径 $r>0$;球心在物方,球面的曲率半径 $r<0$。

也就是说,对像方(观察者)而言,凹球面的半径为正值,凸球面的半径为负值。

(2) 物在物方,物距 $s>0$;物在像方,物距 $s<0$。

实际中,物(即"实物")自然在物方,这没有问题;物在像方,是指逐次成像过程中"虚物"的情形,正如例 6.2 中所讨论的会聚光线成像的情形。

(3) 像在像方,像距 $s'>0$;像在物方,像距 $s'<0$。

成在像方的像肯定是实像,成在物方的像肯定是虚像。这样就是约定实像的像距为正,虚像的像距为负,同(2)中的约定实质相同。

焦距是特殊的物距、像距,焦距的符号约定及其含义与物距、像距的相同。即物方焦点在物方,焦距 $f>0$;像方焦点在像方,焦距 $f'>0$。反之,焦距均为负值。

(4) 物、像的横向尺度(高度)y,y' 均用垂轴直线段表示。线段在主光轴以上,$y>0$;线段在主光轴以下,$y<0$。

(5) 角度自主光轴或球面法线算起,逆时针方向为正,顺时针方向为负。角度正负值的约定与数学中角度的度量一致。

(6) 本书中,涉及几何光学的图示中的参量均标注为正值,对实际为负值的参量均加负号,以示遵守本书的符号约定。

在反射的情形中,物方、像方在球面的同一侧。而上述符号系统是依据折射的情形,即物方、像方分居球面两侧而约定的,因此对反射球面另给出符号约定:

(7) 对观察者而言,凹反射球面的曲率半径为负值,凸反射球面的曲率半径为正值。

(8) 像在物的同一方,像距为正值;像在物的另一方,像距为负值。

图 6.19 是关于半径、高度和角度约定的示意,其中以左侧为物方,右侧为像方。

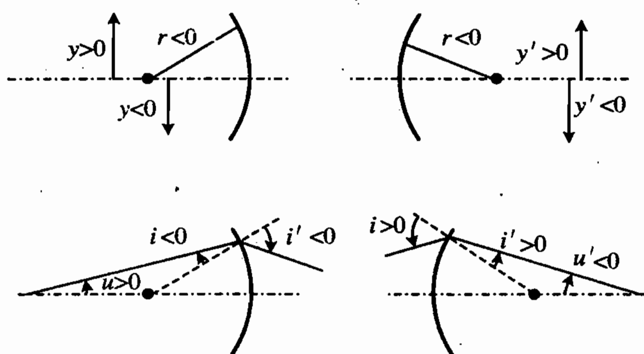


图 6.19　曲率半径、高度及角度的符号约定

在上述约定下,横向放大率公式(6.13)应当表示为

$$V=\frac{y'}{y}=-\frac{ns'}{n's} \tag{6.18}$$

【例 6.3】　用本小节的成像方法重做例 6.2。

解　当球面的曲率半径 $r=\infty$,即为平面时,物像公式为

$$\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=0$$

于是得到

$$s'=-\frac{n'}{n}s$$

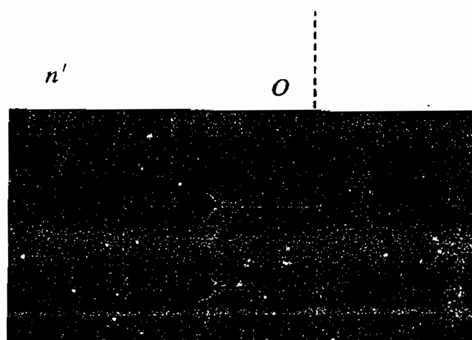


图 6.20 用物像公式计算水下物点成像

在水面下（物方）成虚像，如图 6.20 所示，与直接用折射定律得到的结果一致。

在物点附近作一条折射面的法线，以物、像到该法线的距离作为像高，则横向放大率为

$$V=\frac{y'}{y}=-\frac{ns'}{n's}=-\frac{n}{n'}\left(-\frac{n'}{n}\right)=+1$$

这说明像点、物点到任意法线的距离相等，即看起来像在物的正上方，而且像与物的大小、倒正都一致。

【例 6.4】 用费马原理证明物像关系式(6.7)。

证明 费马原理是指物像之间的任意路径都是等光程的。可以用两种方法对此加以证明。

方法 1 如图 6.21 所示，只要对任意路径的光程 $np+n'p'$ 与沿光轴的光程 $ns+n's'$ 证明即可。



图 6.21 利用等光程性证明物像公式

自入射点 M 作光轴的垂线 MD，记$\overline{MD}=h$。利用圆的相交弦定理，可得

$$(2r-d)d=h^2$$

由于光线满足傍轴条件 $d\ll r$，故上式可化为 $2rd\approx h^2$，即 $d\approx h^2/(2r)$。在 Rt△QMD 中，有

$$p^2=(s+d)^2+h^2\approx s^2+2sd+d^2+2rd\approx s^2+2(s+r)d$$

$$p\approx s\sqrt{1+\frac{2(s+r)d}{s^2}}\approx s\left[1+\frac{(s+r)d}{s^2}\right]\approx s+\frac{(s+r)d}{s}$$

同理，在 Rt△$Q'MD$ 中，有

$$\begin{aligned}p'^2&=(s'-d)^2+h^2\\&\approx s'^2-2s'd+d^2+2rd\approx s'^2-2(s'-r)d\end{aligned}$$

$$p'\approx s'\sqrt{1-\frac{2(s'-r)d}{s'^2}}\approx s'-\frac{(s'-r)d}{s'}$$

由 $np+n'p'=ns+n's'$，可得

$$ns+\frac{ns+nr}{s}d+n's'-\frac{n's'-n'r}{s'}d=ns+n's'$$

整理后得到

$$\frac{ns + nr}{s}d - \frac{n's' - n'r}{s'}d = 0$$

化简后即有

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

方法 2　如图 6.22 所示，在△QMC 和△$Q'MC$ 中，根据余弦定理，有

$$p = [r^2 + (r + s)^2 - 2r(r + s)\cos\theta]^{1/2}$$

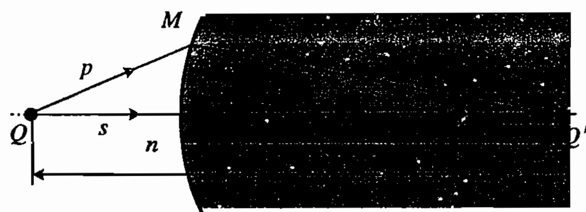


图 6.22　利用光程的平稳性证明物像公式

利用傍轴条件 $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$，上式可化为

$$p = \left[2r^2 + 2rs + s^2 - 2r(r + s)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right]^{1/2} = [s^2 + r(r + s)\theta^2]^{1/2}$$

$$\approx s\left[1 + \frac{r(r + s)}{2s^2}\theta^2\right] = s + \frac{r(r + s)}{2s}\theta^2$$

同理，有

$$p' \approx s' - \frac{r(s' - r)}{2s'}\theta^2$$

于是任意路径的光程

$$L = np + n'p' = n\left[s + \frac{r(r + s)}{2s}\theta^2\right] + n'\left[s' - \frac{r(s' - r)}{2s'}\theta^2\right]$$

取极值的条件为

$$\frac{dL}{d\theta} = n\frac{r(r + s)}{s}\theta - n'\frac{r(s' - r)}{s'}\theta = 0$$

当 $\theta \neq 0$ 时，可得 $n\dfrac{r(r+s)}{s} - n'\dfrac{r(s'-r)}{s'} = 0$，即

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

进一步计算，可得

$$\frac{d^2L}{d\theta^2} = r\left(n\frac{r + s}{s} - n'\frac{s' - r}{s'}\right) = 0$$

这说明光程是恒定值，即物像的之间的光程相等。

6.2.6　作图法

每一条物方光线都有唯一的一条像方光线，根据光的可逆性原理，这条像方光线反向入射，必将沿入射线的反向射出，因而说两者之间是共轭的。用作图法可以方便而直观地表示光线的

折射和物像之间的关系。

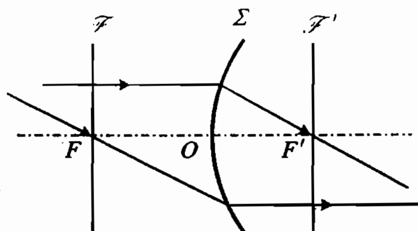


图 6.23 单个折射球面的共轭光线

利用特殊光线的共轭性表示物像的关系是作图法的基本原则。如图 6.23 所示，在单球面的情况下，两对基本的共轭光线是：

（1）平行于光轴的物方光线与经过像方焦点的像方光线；

（2）经过物方焦点的物方光线与平行于光轴的像方光线。

除此之外，利用物方和像方焦平面的性质，也是作图法常采用的手段。

【例 6.5】 用作图法画出图 6.24 中入射光线经球面之后的折射光线，其中(a)的焦距为正值，而(b)的焦距为负值。

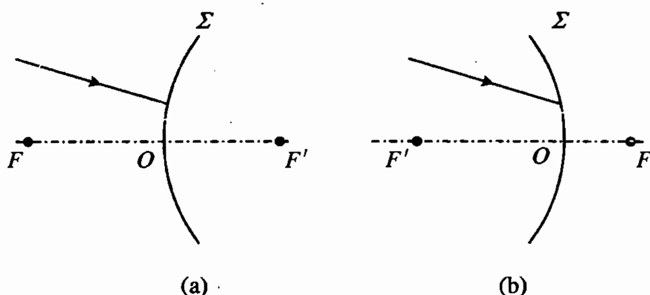


图 6.24 用作图法求出图中入射光线的像方共轭光线

解 物像关系是在傍轴条件下获得的，因而作图时，光线在球面上的入射点应当画在主平面上。

利用焦平面的特性，可以很容易解决问题。

(a) 解法 1：如图 6.25 所示，作出物方焦平面 $\mathscr{F}$，过 $\mathscr{F}$ 与入射光线的交点 A 作一条平行于光轴的辅助光线 1，该光线的像方共轭光线 1′经过像方焦点 F'，则上述光线的像方光线必定平行于 1′。

解法 2：如图 6.26 所示，作出像方焦平面 $\mathscr{F}'$，作一条与上述光线平行且过物方焦点 F 的辅助光线 2，其共轭光线平行于光轴且与 $\mathscr{F}'$ 交于 B 点，则入射光线的共轭光线必经过 B 点。

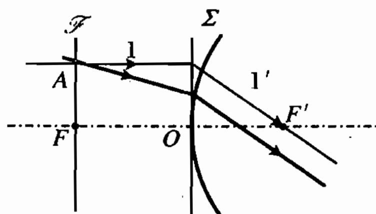


图 6.25 (a)的解法 1

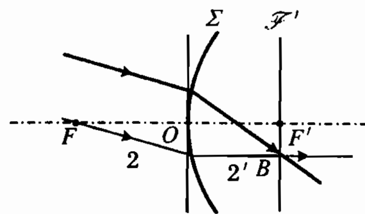


图 6.26 (a)的解法 2

(b) 焦距为负值的折射球面，其物方焦点在像方，而像方焦点在物方。

解法 1：如图 6.27 所示，延长入射光线，与物方焦平面 $\mathscr{F}$ 的交点为 A。作一条辅助光线 1，

平行于光轴且射向 A，则上述两条入射光线经过物方焦平面上同一点，在像方相互平行。

解法 2：如图 6.28 所示，作一条与入射光线平行且射向物方焦点 F 的辅助光线 2，则这两条光线的像方光线必射向像方焦平面 $\mathscr{F}'$ 上的同一点 B。

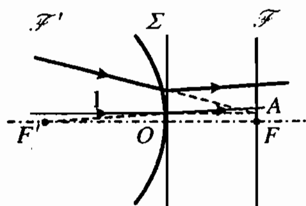


图 6.27 (b)的解法 1

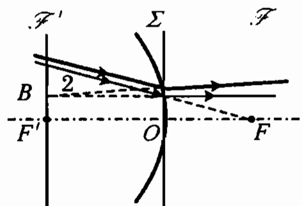


图 6.28 (b)的解法 2

如果已知物 PQ，则可以按图 6.29 的方法求出像 $P'Q'$。

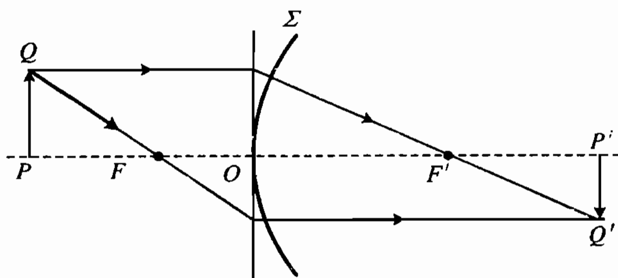


图 6.29 用作图法求折射球面的像

6.3 傍轴光经球面反射成像

球面反射镜简称球面镜，通过光线的反射成像。凸面镜、凹面镜是被广泛使用的光学元件。

6.3.1 球面反射的物像公式

球面折射的物像关系为

$$\frac{n}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

如果将反射也归于一种折射并且用折射定律表示，则因为 $n\sin i = n'\sin i'$，而且 $i' = -i$，必定可以得到 $n' = -n$，即像方的折射率是物方折射率的负值。

同时，在反射的情形中，物方、像方在球面的同一侧，其中像距的计量与折射情形下的方向恰好相反，如图 6.30 和图 6.31 所示。

所以如果要将上式转化为反射情况下的物像关系，不仅要将 n' 以 $-n$ 代替，同时还要将像距 s' 改成 $-s'$，于是得到 $\frac{-n}{-s'} + \frac{n}{s} = \frac{-n-n}{r} = -\frac{2n}{r}$，则反射球面的物像关系为

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r} \tag{6.19}$$

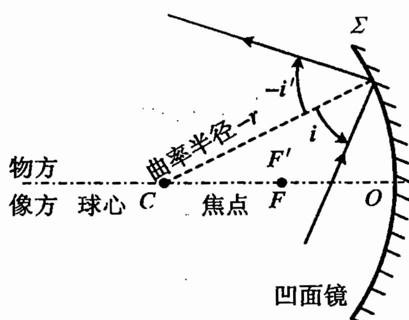


图 6.30 凹面镜

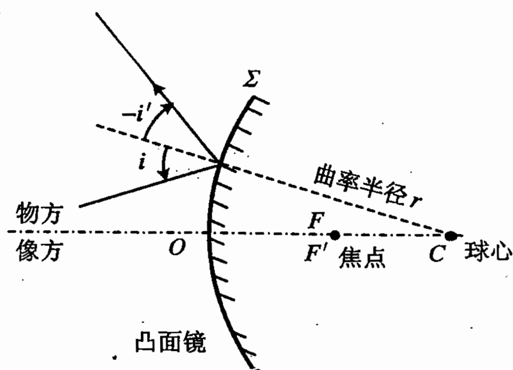


图 6.31 凸面镜

读者当然也可以根据光线在球面上反射的规律直接推导出式(6.19)。如图 6.32 所示，以凹面镜为例，注意到按照本书的符号约定，曲率半径 r 为负值，线段$\overline{CQ'} = -(s' + r)$。

图 6.32 用反射定律推导球面镜的物像公式

在$\triangle QMC$ 和$\triangle Q'MC$ 中，由正弦定理，有

$$\frac{p}{s+r} = -\frac{p'}{s'+r}$$

由余弦定理，有

$$p^2 = (s+r)^2 + r^2 - 2r(s+r)\cos\varphi$$

和

$$p'^2 = (s'+r)^2 + r^2 - 2r(s'+r)\cos\varphi$$

于是可以得到

$$\frac{s^2}{(s+r)^2} - \frac{s'^2}{(s'+r)^2} = -\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(\frac{4r}{s+r} - \frac{4r}{s'+r}\right)$$

对于傍轴光线，有

$$\frac{s^2}{(s+r)^2} = \frac{s'^2}{(s'+r)^2}$$

对上式开平方，并取负号，有

$$\frac{s}{s+r} = -\frac{s'}{s'+r}$$

同样可得到式(6.19)。

球面镜的焦距为

$$f = f' = -\frac{r}{2} \tag{6.20}$$

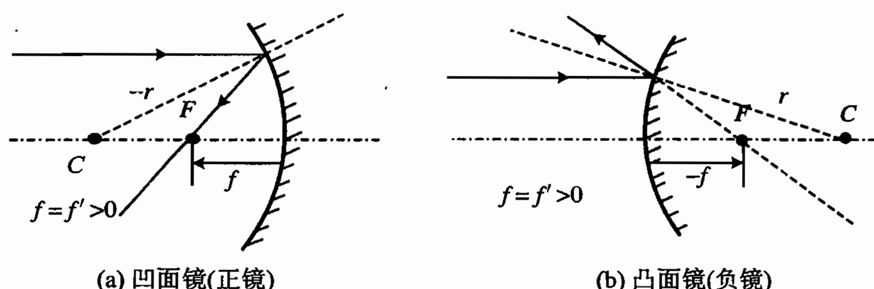
当 $r = \infty$时，式(6.19)可化为 $s' = -s$，此为平面镜的物像公式。

由于反射镜的物方、像方均在反射面的同一侧，所以其物方焦距和像方焦距相等。

对于球面反射镜，依据本书的符号系统，凹面镜的半径为负值，凸面镜的半径为正值。因此，凹面镜的焦距为正值，焦点在镜前；而凸面镜的焦距为负值，焦点在镜后。如图 6.33 所示。

球面镜的高斯公式为

$$\frac{f}{s'}+\frac{f}{s}=1 \tag{6.21}$$



(a) 凹面镜(正镜)　　(b) 凸面镜(负镜)

图 6.33　凹面镜、凸面镜的焦点

6.3.2　球面镜成像的特点

1. 像的横向放大率

根据式(6.18),球面折射成像的横向放大率公式为

$$V=\frac{y'}{y}=-\frac{ns'}{n's}$$

按照符号约定,用 $-n$ 代替 n',同时将 s' 改成 $-s'$,可得球面反射成像的横向放大率为

$$V=\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \tag{6.22}$$

2. 像的虚实与倒正

由式(6.22),可得

$$s'=-\frac{sr}{2s+r}$$

实物成像,物距总是正值,即 $s>0$,所以球面镜的成像规律如下:

对于凸面镜,$r>0$:

$s'<0$,只能成虚像,而且横向放大率 $V=-\frac{s'}{s}=\frac{r}{2s+r}$,$0<V<1$,只能成正立缩小的虚像。

对凹面镜,$r<0$:

$s>-\frac{r}{2}$,$s'>0$,成实像,既可以是放大的,也可以是缩小的,像总是倒立的。

$s<-\frac{r}{2}$,$s'<0$,成虚像,横向放大率 $V=-\frac{s'}{s}=\frac{r}{2s+r}>1$,虚像总是正立放大的。

6.3.3　球面镜成像的作图法

凹面镜和凸面镜中特殊的共轭光线如图 6.34 和图 6.35 所示。

凹面镜中,由于焦点在物(像)方,所以光线可以通过焦点。而凸面镜的焦点在反射镜后侧,光线无法经过,在这种情形下,所谓“经过焦点的光线”系指延长线经过焦点,或者瞄向焦点的光线。

反射镜中,由于物方、像方的折射率相反,所以经过球面顶点的两条共轭光线 3 和 3′的角度

相反。

球面镜成像的特点可以用作图法表示，如图 6.36 所示。

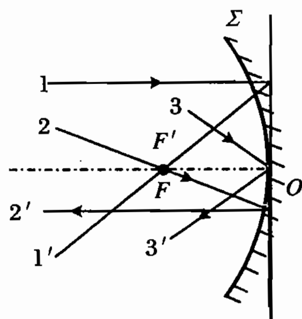


图 6.34　凹面镜中的特殊共轭光线

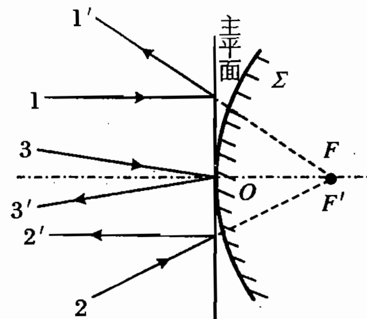
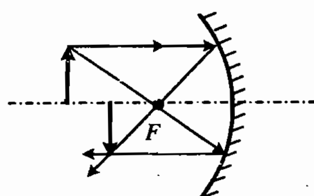
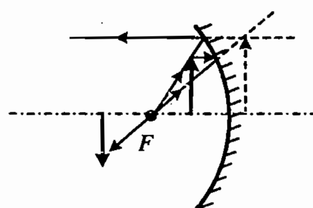
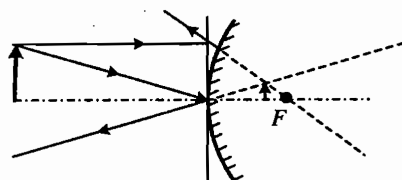


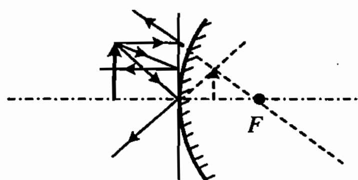
图 6.35　凸面镜中的特殊共轭光线





凹面镜可以成倒立的实像或正立放大的虚像





凸面镜只能成正立缩小的虚像，物距越远，像越小

图 6.36　凹面镜、凸面镜成像的特点

6.4　傍轴光经薄透镜成像

成像光学系统的基本单元主要是平面镜和球面反射镜以及透镜。本节主要讨论单个薄透镜的物像关系和成像规律。

6.4.1　薄透镜

如图 6.37 所示，透镜由折射率为 n_L 的透明介质制作，透镜两侧的表面都是球面，朝向物方（折射率为 n）的一侧球面记作 Σ_1，球心为 C_1，曲率半径为 r_1，朝向像方（折射率为 n'）的一侧球面记作 Σ_2，球心为 C_2，曲率半径为 r_2。通过两球心 C_1，C_2 的直线就是透镜的对称轴，称作光轴；光轴与透镜表面的交点就是顶点 O_1 和 O_2，O_1，O_2 间的距离记为 d，用 d 表示该透镜

的厚度。

所谓**薄透镜**，是指厚度 d 比球面半径小得多，同时 d 也比成像时的物距、像距小得多，即 $d \ll r_1, r_2, |s|, |s'|$ 的透镜。由于厚度很薄，所以可以认为 $d=0$，这样一来，两球面顶点 O_1, O_2 也可以认为是重合的，重合点记为 O，就是透镜光轴的中心，称为薄透镜的**光心**。

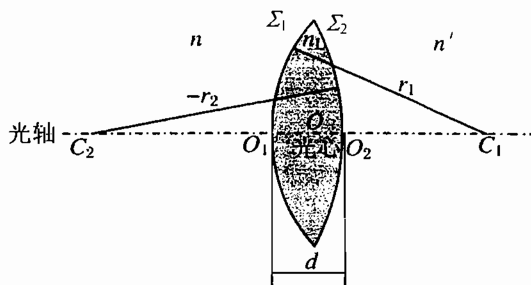


图 6.37　薄透镜的结构

6.4.2　薄透镜成像的物像公式

6.2.1 小节中已经讨论了单个球面折射时的物像公式，经过成像透镜的光线要依次被两侧的球面折射，相当于经历两次成像，可以采用下述逐次成像法由单球面的物像公式得到薄透镜的物像公式。

1. 逐次成像法

物所发出的光线经薄透镜折射成像的过程是这样的：首先，光线在第一球面处发生折射，然后经过透镜的介质，最后经第二球面折射成像。因此，要得到物像之间的关系，当然可以针对上述过程，依次计算光线经两球面折射的情况，以得到最后的结果。

上述计算过程是逐次应用折射定律，略嫌繁琐。前面我们已经得到了傍轴光线经过单个球面折射的成像公式，所以，上述每一次折射过程当然就是一次成像过程，因而，从成像的过程讨论薄透镜的问题也是可以的。

左侧（即物方）的物点 Q 先经第一球面 Σ_1 成像于 Q_1'，这当然是假设球面 Σ_2 不存在，则 Σ_1 右侧介质的折射率都是 n_L。由于无论实像、虚像都发出光线，所以可以将 Q_1' 作为物点，再经第二折射面 Σ_2 成像 Q'，Q' 即为 Q 经透镜后所成的像。这种让光线依次通过多个折射（或反射）球面成像的方法称为**逐次成像法**。

物点经薄透镜的两次成像过程可用图 6.38 表示。

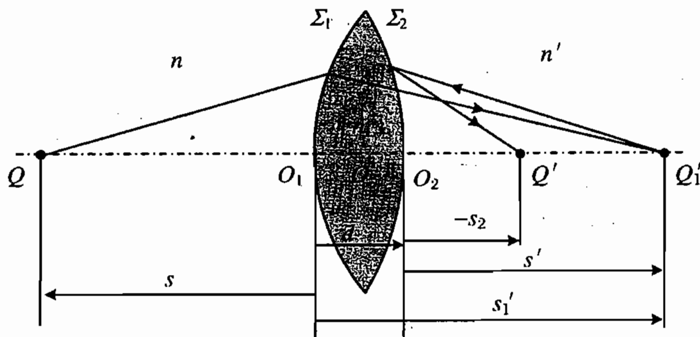


图 6.38　薄透镜的逐次成像

在 Q 经 Σ_1 成像于 Q_1' 的过程中，物距为 s，物方的折射率为 n，像方的折射率为 n_L，应用物像关系公式(6.7)，得到

$$\frac{n_L}{s_1'} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1}$$

其中，像距为 s_1'，像位于折射率为 n_L 的介质中。

记 $\Phi_1=(n_L-n)/r_1$，称为第一折射球面 Σ_1 的光焦度。

Q_1'再经 Σ_2 成像于 Q'的过程中，将经 Σ_1 所成的中间像 Q_1'作为 Σ_2 的物，按照本书的符号约定，物距为 $d-s_1'$，由于是薄透镜，所以 $d-s_1'\approx -s_1'$，Q_1'实际上是 Σ_2 的虚物。此时物方的折射率为 n_L，像方的折射率为 n'，再次应用公式(6.7)，得到

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n_L}{-s_1'}=\frac{n'-n_L}{r_2}$$

记 $\Phi_2=(n'-n_L)/r_2$，称为第二折射球面 Σ_2 的光焦度。把以上得到的两式相加，有

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2}=\Phi_1+\Phi_2=\Phi \tag{6.23}$$

这就是薄透镜的物像公式。其中

$$\Phi=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2} \tag{6.24}$$

为薄透镜的光焦度。

需要指出的是，只有成像过程中相邻球面的间隔为 0 时，整个成像系统的光焦度才等于各个球面的光焦度之和。因而式(6.24)仅仅对薄透镜才适用。

2. 薄透镜的焦点与焦平面

令 $s'=\infty$，得到薄透镜的物方焦距

$$f=\frac{n}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}=\frac{n}{\Phi} \tag{6.25}$$

令 $s=\infty$，得到薄透镜的像方焦距

$$f'=\frac{n'}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}=\frac{n'}{\Phi} \tag{6.26}$$

形式上与单折射球面的焦距类似。

薄透镜的焦点和焦平面的定义与单个球面的相同，如图 6.39 所示。

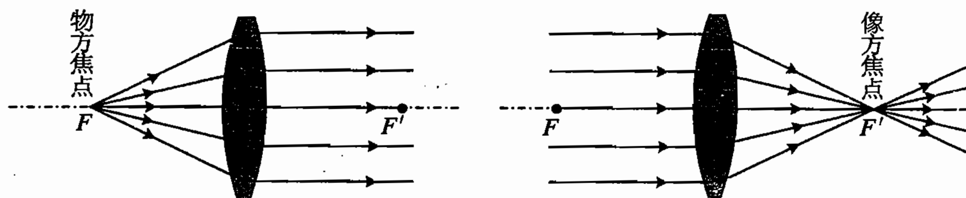


图 6.39 薄透镜的物方焦点与像方焦点

如果透镜置于空气中，取 $n=n'=1$，则有

$$f=f'=\frac{1}{(n_L-1)\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)} \tag{6.27}$$

式(6.27)称为**磨镜者公式**。

将上述焦距的表达式(6.25)，(6.26)代入式(6.23)，则得到薄透镜的高斯公式

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1 \tag{6.28}$$

高斯公式中，物距和像距都是以光心为基点度量的，或以经过光心的垂轴平面（薄透镜的主平面）为度量起点。

如果用焦点或焦平面作为度量的基准点，用到焦点的距离表示物像的位置，如图 6.40 所示，即 $s = x + f, s' = x' + f'$，高斯公式可写作$\frac{f'}{x'+f'} + \frac{f}{x+f} = 1$，整理后得到 $xf' + ff' + x'f + f'f = x'x + x'f + f'x + f'f$，则有

$$xx' = ff' \tag{6.29}$$

这就是**牛顿物像公式**。

由磨镜者公式可以看出，空气中，薄透镜焦距的正负号取决于两球面的曲率半径。由于

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

如果 r_1 为正的，r_2 为负的，则焦距 f, f' 为正的，这是普通的双凸透镜，中间厚，边缘薄；如果 r_1 为负的，r_2 为正的，则焦距 f, f' 为负的，这是普通的双凹透镜，中间薄，边缘厚。

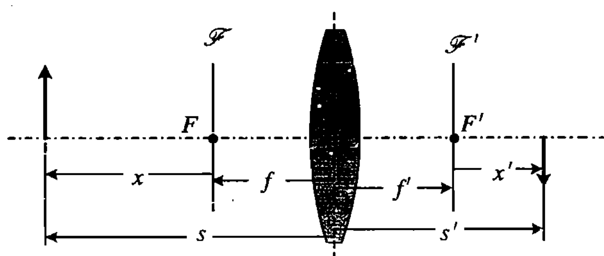


图 6.40　牛顿物像公式和高斯公式中的物距、像距

如果 r_1 为正的，r_2 也为正的，且 $|r_1| > |r_2|$，则焦距 f, f' 为正的；如果 r_1 为负的，r_2 也为负的，且 $|r_1| > |r_2|$，则焦距 f, f' 为正的。这是月牙形透镜，中间厚，边缘薄。

如果 r_1 为负的，r_2 也为负的，且 $|r_1| < |r_2|$，则焦距 f, f' 为负的，中间薄，边缘厚。

$f = f' > 0$，像点在透镜的右侧，透镜为会聚透镜，称为正透镜，正透镜具有实焦点；

$f = f' < 0$，像点在透镜的左侧，透镜为发散透镜，称为负透镜，负透镜具有虚焦点。

综上所述，空气中，凡是中间厚、边缘薄的透镜都是会聚的正透镜；反之是发散的负透镜。如图 6.41 所示。

正透镜 $r_1>0,\ r_2<0$	正透镜 $r_1>0,\ r_2>0,$ $r_1<r_2$	负透镜 $r_1>0,\ r_2>0,$ $r_1>r_2$
负透镜 $r_1>0,\ r_2>0$	负透镜 $r_1<0,\ r_2<0,$ $\lvert r_1\rvert<\lvert r_2\rvert$	正透镜 $r_1<0,\ r_2<0,$ $\lvert r_1\rvert>\lvert r_2\rvert$

图 6.41　各种构型的正透镜与负透镜

如果将薄透镜置于折射率更大的介质中，例如玻璃中的气泡，或水中的气泡所形成的透镜，则上述透镜的正负号恰好相反。

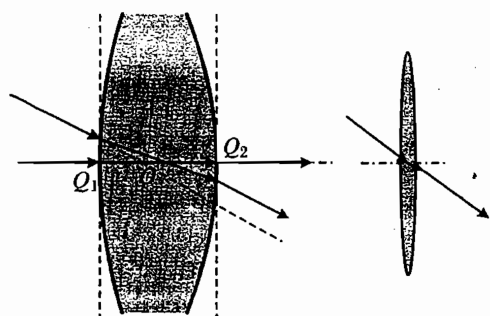


图 6.42 经过透镜光心的光线

如果从透镜对波面形状改变的观点来看，则上述结论的成立是当然的。

3. 经过光心的光线

如图 6.42 所示，由于对称性，在光心附近，可以认为透镜的两个表面互相平行，又由于透镜很薄，$d \approx 0$，所以经过透镜光心的光线可以看作是透过了很薄的平行平板，因而通过薄透镜光心的光线不改变方向。

4. 从费马原理看光学成像

依据费马原理，可以证明空气中的正透镜必定是中间厚、边缘薄；负透镜必定是中间薄、边缘厚。

所谓的正透镜，是指物方焦点在其物方，而像方焦点在其像方，如图 6.43 所示。

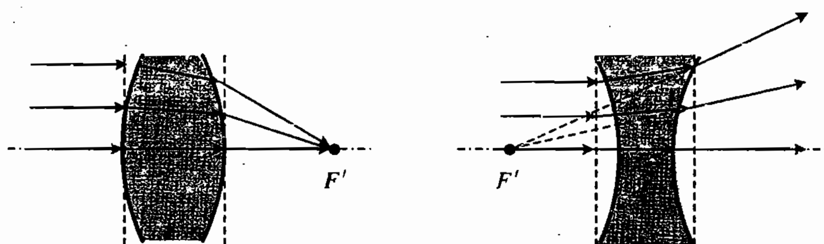


图 6.43 用费马原理解释正、负透镜的结构特征

平行光自左侧入射，会聚到正透镜的右侧焦点。光线愈远离光轴，光路所经过的距离愈长。

为使各个路径的光程相等，则远离光轴的光线在透镜中的距离必须较短(由于透镜的折射率大于空气的)。所以正透镜的形状，必须是愈远离中心轴线，厚度愈薄。因而正透镜必定具有中间厚、边缘薄的结构。

负透镜使入射平行光在像方发散，在透镜的物方成虚像。虚光线的光程为负值。远离光轴的虚光线的光程值较大。按照费马原理，实光线在透镜中的光程 + 虚光线的虚光程 = 0，为使各个路径的光程相等，则远离光轴的光线在透镜中的距离必须较长，所以负透镜必定具有中间薄、边缘厚的结构。

【例 6.6】 一个点光源位于凸透镜的主光轴上。当点光源位于 A 点处，它成像于 B 点；而当它位于 B 点，它成像于 C 点。已知 $\overline{AB} = 10$ cm，$\overline{BC} = 20$ cm，试求该凸透镜的焦距。

解 题中 A，B，C 三点有图 6.44 所示的两种相对位置。

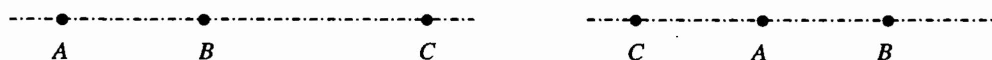


图 6.44 例 6.6 中物像的两种相对位置

凸透镜的成像规律如图 6.45 所示，物在焦点之外，成实像于像方焦点之外；物在焦点之内，成虚像于物方。

先看第一种相对位置，透镜共有四个位置，如图6.46所示。图6.46(a)，(b)中，应是在 B 处成虚像，但与凸透镜成虚像的规律不符；图6.46(c)中，看起来 A 在 B 处成实像，B 又在 C 处成虚像，但是，由于光路是可逆的，所以 B 处如果是实像，则其物必在 A 处成实像，又因为实像总是在焦点之外，该处的物也不可能成虚像。因而只有图6.46(d)是可能的，即 A 在 B 处成虚像，B 由于是虚像点，光线是所谓的虚光线，所以 B 处的物与 A 处的像不存在可逆的光路，不可能在 A 处再成像，而在 C 处成虚像。

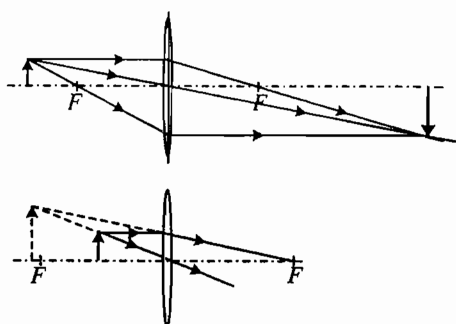


图6.45 凸透镜成实像和虚像的特点

根据图中所标注的物距和像距，列出高斯公式，进行计算：

$$s'_B = \frac{s_A f}{s_A - f} = -(10 + s_A)$$

$$s'_B = -s_B,$$

$$s'_C = \frac{s_B f}{s_B - f} = \frac{(10 + s_A)f}{(10 + s_A) - f} = -(30 + s_A)$$

将数据代入，得到 $10f = 10s_A + s_A^2$，$20f = 300 + 40s_A + s_A^2$。先消去 f，则有

$$0 = -300 - 20s_A + s_A^2$$

解得 $s_A = 30$，$s_A = -10$（舍去）。

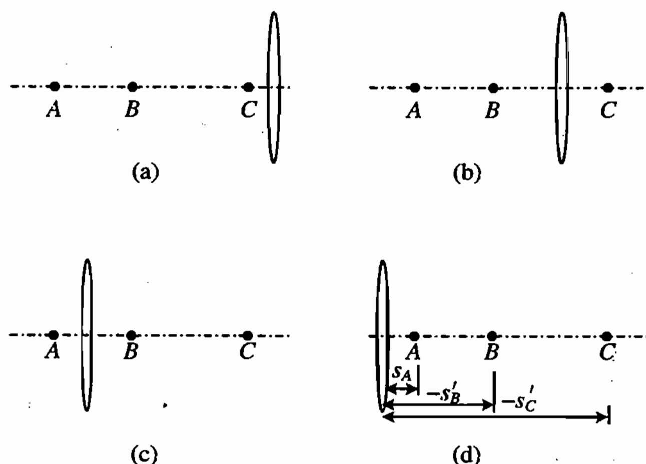


图6.46 凸透镜位置的判定

因此，只有 $f = 120$ cm。

读者可自行分析第二种相对位置，算得透镜的焦距为 $f = 40/9$ cm。

5. 像的横向放大率

因为是经过两个球面逐次成像，所以总放大率为两次成像的放大率的乘积，即

$$\beta = \beta_1\beta_2 = \left(-\frac{ns'_1}{n_L s}\right)\left(-\frac{n_L s'}{-n's'_1}\right) = -\frac{ns'}{n's} \tag{6.30}$$

6.4.3 薄透镜成像的作图法

1. 共轭光线

由薄透镜的焦点和光心的特性可知，下列的特殊光线之间有一一对应的物像关系：

平行于光轴的物方入射光线↔经过像方焦点的光线；

经过物方焦点的入射光线↔平行于光轴的像方光线；

经过光心的物方入射光线↔经过光心并与入射光线方向相同的像方光线。

上述三对特殊的光线之间是物像关系，因而称它们是相互共轭的，如图 6.47 和图 6.48 所示。

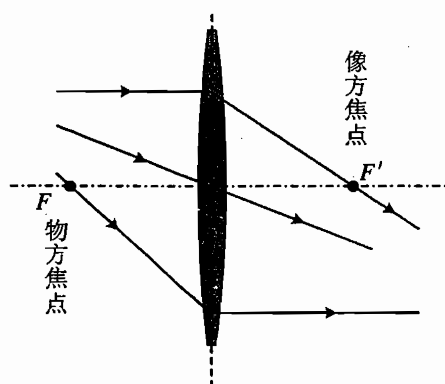


图 6.47 凸透镜的共轭光线

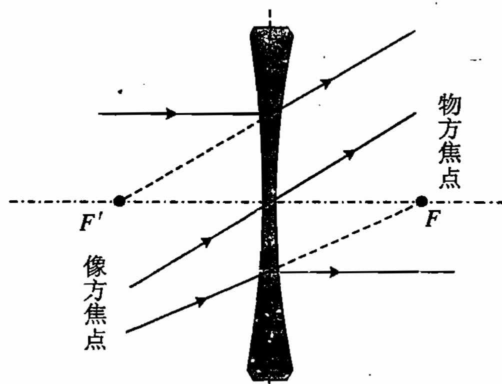


图 6.48 凹透镜的共轭光线

值得注意的是，对于负透镜，其物方焦点实际上位于像方，而像方焦点实际上位于物方。

2. 作图举例

【例 6.7】 如图 6.49 所示，作出任意入射光线经凸透镜折射后的像方共轭光线。

解 可以用三种不同的作图法求解，见图 6.50。

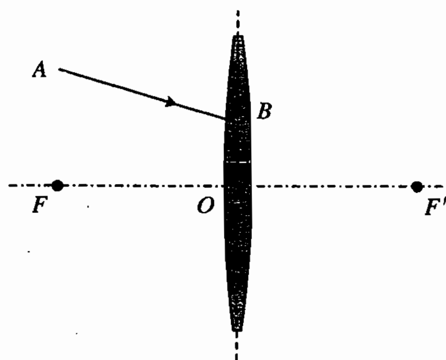


图 6.49 射向凸透镜的任意物方光线

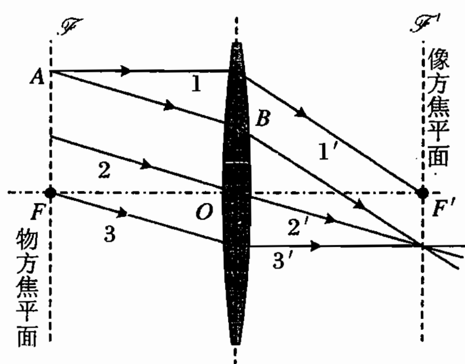


图 6.50 求解凸透镜像方光线的三种方法

(a) 作平行于光轴的入射光线 1，并使光线 1 与原入射光线在物方焦平面相交，则辅助光线的像方共轭光线 1′必经过像方焦点且与待求光线平行。

(b) 作通过光心且与原光线平行的入射光线 2，则辅助光线在像方的光线 2′方向不变，且与待求光线在像方焦平面相交。

（c）作与该光线平行的入射光线 3，并使之过物方焦点，则其在像方为平行于光轴的光线 3′，相互平行的入射光线必相交于像方焦平面上。

【例 6.8】 如图 6.51 所示，作出任意入射光线经凸透镜折射后的像方共轭光线。

解 同样有三种不同的作图法，见图 6.52。

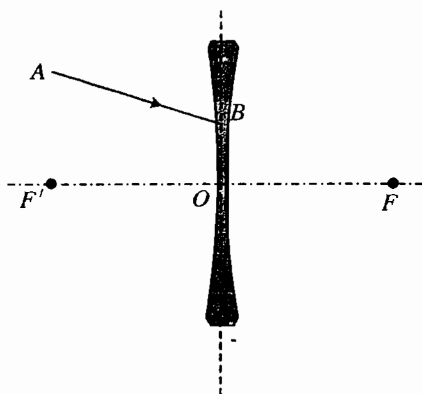


图 6.51 射向凹透镜的任意物方光线

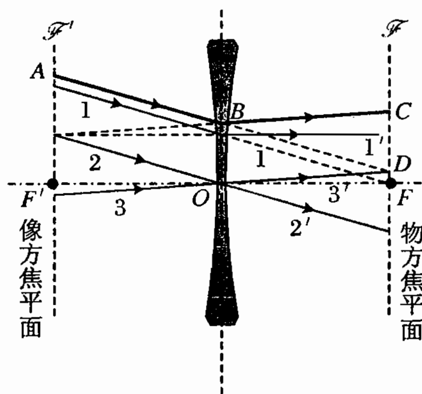


图 6.52 求解凹透镜像方光线的三种方法

（a）作平行且过物方焦点的辅助入射光线 1，则辅助线在像方的光线 1′必平行光轴，且原光线交于像方焦平面。

（b）作平行且过光心的入射光线 2，则其共轭光线 2′方向不变，且光线 2′与待求光线必交于像方焦平面上，由于像方焦平面位于物方（光线入射一方），实际是折射光线的反向延长线交于像方焦平面。

（c）作经过光心且与原光线在物方焦平面上相交的辅助光线 3，则其共轭光线 3′与待求光线在像方必是相互平行的光线。

【例 6.9】（第 3 届全国中学生物理竞赛预赛试题） 如图 6.53 所示，某人的眼睛在 E 处通过放大镜 L 观察标尺 M，F_1 和 F_2 为 L 的焦点。他既能通过 L 看到 M 上的一部分刻度，又能直接从镜外看到部分刻度，试在题图上用作图法求出他看不到的 M 上的刻度值的范围。在作图时用①，②，…标明你画的光线，并写出作图步骤。

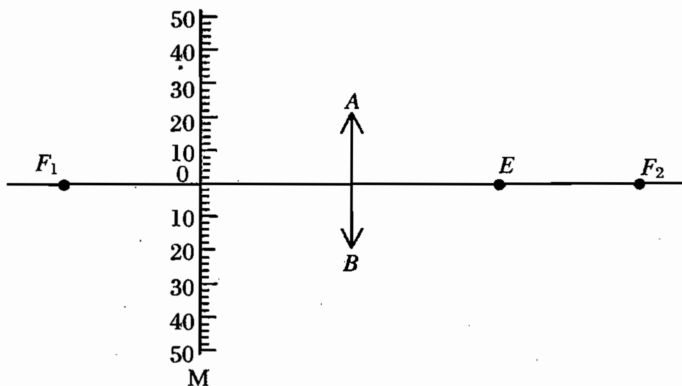


图 6.53 例 6.9 的示意图

解　本题中，标尺上某些区域发出的光线可不经透镜直接进入观察者的眼睛，这些区域当然可以被看到。另有一些区域所发出的光线，经过透镜折射后也可以进入观察者的眼睛，也能被看到。还有一些区域，所发出的光线经透镜折射后不能进入观察者的眼睛，这属于不可见的区域。

每一个具体的成像问题，都可以用多种作图法求解。

根据光的可逆性，所有从 E 点发出的光线能够覆盖到的区域就是可见的区域。

方法 1　见图 6.54。

(1) 从 E 点向透镜的边缘 A 引一条光线 EA；

(2) 过透镜光心作与 AB 平行的光线，该光线与过 F_1 的焦平面交于 H 点；

(3) 由于平行光线经透镜后都会聚于焦平面上的同一点，所以光线 EA 的共轭光线为 AH；

(4) AH 与标尺的交点 C 就是从 E 点发出的光线能够到达的标尺上的最高位置，即光轴到 C 的区域能够通过透镜看到；

(5) 将 EA 直接延长与标尺交于 D 点，D 点以上区域可以被眼睛直接看到；

(6) E 点发出的光线不能到达 CD 之间的区域，则标尺上 CD 之间不能被看到，即 30～40 范围不能被看到；

(7) 在光轴的另一侧，有对称的不能被看到的区域(下方 30～40)。

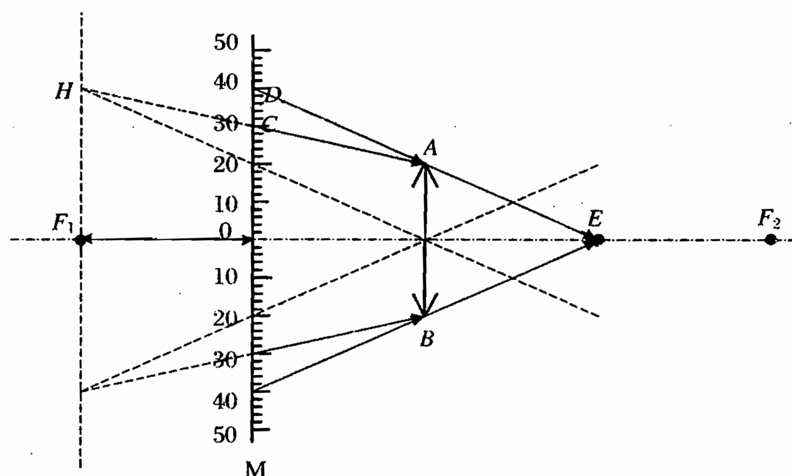


图 6.54　方法 1

方法 2　见图 6.55。

若高中阶段的读者不熟悉焦平面的概念，则可以用物像法解决该问题。同样利用物像共轭的原理，作出眼睛经透镜所成的像，然后进行判断。

(1) 在 E 处作一傍轴小物，求出该物经透镜所成的像。可见，E 点的像在焦点 F_2 处。

(2) 从标尺看眼睛，除了不经透镜可直接看到的区域之外，在一些区域看到的是眼睛经透镜所成的像。将 F_2 与 A 用直线连接起来，所得的直线与标尺交于 C 点，则 C 点以上的部分不能通过透镜看到 E。

(3) 标尺上可不通过透镜直接看到眼睛的区域在 D 点以上。

(4) CD 之间的区域看不到眼睛，眼睛也看不到标尺。

当然还有其他方法。

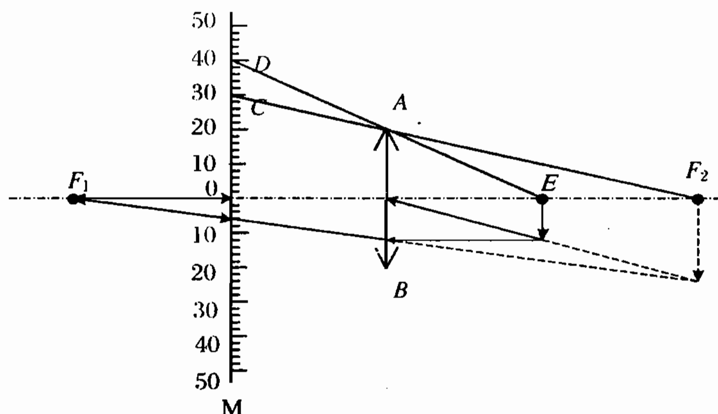


图 6.55　方法 2

【例 6.10】（第 5 届全国中学生物理竞赛预赛试题）　想用两个薄凸透镜，最后在物体所在处形成一个与物体大小相等的倒立的虚像。已知靠近物体的那个透镜的焦距为 f_1，物体与此透镜的距离为 u_1。试求第二个透镜的焦距 f_2 以及它与第一个透镜间的距离 L。

解　这是一个透镜组逐次成像的问题，可以利用高斯公式和物像关系求解。

第一次成像的像距为

$$v_1 = \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1} \tag{6.31}$$

第二次成像时，第一次的像作为第二透镜的物，物距为

$$u_2 = L - v_1 = L - \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1} \tag{6.32}$$

像距为

$$v_2 = \frac{u_2 f_2}{u_2 - f_2} = \frac{\left(L - \dfrac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}\right) f_2}{L - \dfrac{u_1 f_1}{u_1 - f_1} - f_2} \tag{6.33}$$

由于最后所成的为等大小的倒立的像，横向放大率为 −1，即

$$V = \left(-\frac{v_1}{u_1}\right)\left(-\frac{v_2}{u_2}\right) = \frac{v_1}{u_1}\frac{v_2}{u_2} = -1 \tag{6.34}$$

求解上述方程即可得出答案。

当然，针对此问题，可采用简单的方法。

第二次成像时，像距为

$$v_2 = -(u_1 + L) \tag{6.35}$$

这样式(6.34)中就只有未知量 L，而不会出现 f_2，从而可得到

$$\frac{\dfrac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}}{u_1} \frac{-(u_1 + L)}{L - \dfrac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}} = -1$$

解得

$$L = \frac{2u_1 f_1}{u_1 - 2f_1} \tag{6.36}$$

将式(6.35),(6.36)代入式(6.33),得到

$$-\left(u_1 + \frac{2u_1 f_1}{u_1 - 2f_1}\right) = \frac{\left(\frac{2u_1 f_1}{u_1 - 2f_1} - \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1}\right) f_2}{\frac{2u_1 f_1}{u_1 - 2f_1} - \frac{u_1 f_1}{u_1 - f_1} - f_2}$$

解得

$$f_2 = \left(\frac{u_1}{u_1 - 2f_1}\right)^2 f_1$$

【例 6.11】(第 6 届全国中学生物理竞赛预赛试题) 在焦距为 f 的会聚薄透镜 L 的主光轴上放置一发光圆锥面(图 6.56),圆锥的中心轴线与主光轴重合,锥的顶点位于焦点 F,锥高等于 $2f$,锥的母线与中心轴线的夹角等于 α。求圆锥面的像。

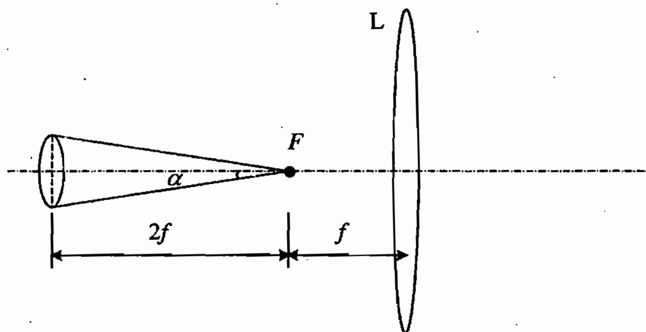


图 6.56 例 6.11 的示意图

解 由于直线经过透镜成像后仍为直线,所以在本题中,分别求出圆锥的顶点和底面的像的位置,再根据横向放大率确定底面的大小即可。

由于顶点在焦点处,故其像在无穷远处。底面的物距为 $s = 3f$,故像距为

$$s' = \frac{sf}{s - f} = \frac{3}{2}f$$

底面的横向放大率为

$$V = -\frac{s'}{s} = -\frac{1}{2}$$

底面半径为

$$h' = 2f\tan\alpha \times \frac{1}{2} = f\tan\alpha$$

所成像为圆柱体,半径为 $f\tan\alpha$,一端在像方 $3f/2$ 处,另一端在无穷远处。

【例 6.12】(第 10 届全国中学生物理竞赛预赛试题) 一圆锥透镜如图 6.57 所示,S,S' 为锥面,M 为底面,通过锥顶 A 垂直于底面的直线为光轴。平行光垂直入射于底面。现在把一垂直于光轴的平面屏 P 从透镜顶点 A 向右移动。假设不计光的干涉与衍射。

(1) 用示意图画出在屏上看到的图像;当屏远移时图像怎样变化?

(2) 设圆锥的底面半径为 R，锥面母线与底面的夹角为 β(3°～5°)，透镜材料的折射率为 n。令屏离锥顶 A 的距离为 x，求出为描述图像变化需给出的屏的几个特殊位置。

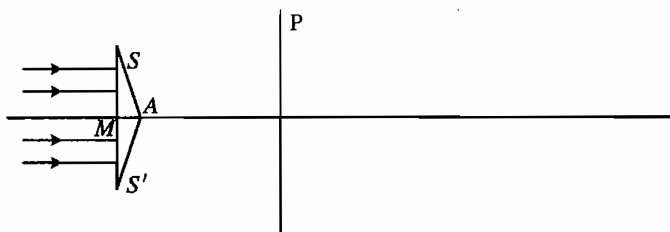


图 6.57　例 6.12 中的圆锥透镜

解　图 6.57 为过轴线的平面，由于圆锥的旋转对称性，可以在该面内分析光经过圆锥透镜后传播的情况。

图中经过母线 SA 的折射光，其偏转角为 $(n-1)\beta$，成为向下的平行光束，再考虑到旋转对称性，从而在屏上形成一个圆斑。如图 6.58 所示，经上下两母线的光束会出现重叠，在重叠区域，不考虑干涉衍射的情况下，光强是不重叠区域光强的 2 倍，即屏上是一个亮的圆斑嵌套在不太亮的圆斑中。随着距离的变化，外部圆斑先减小，再增大，内部圆斑先增大，后减小。在某一处，两圆斑的外缘重合。再至某处，圆斑成为一个圆环，中间是暗的，随距离增大，圆环内外径同步线性增大，但内外径之差不变。

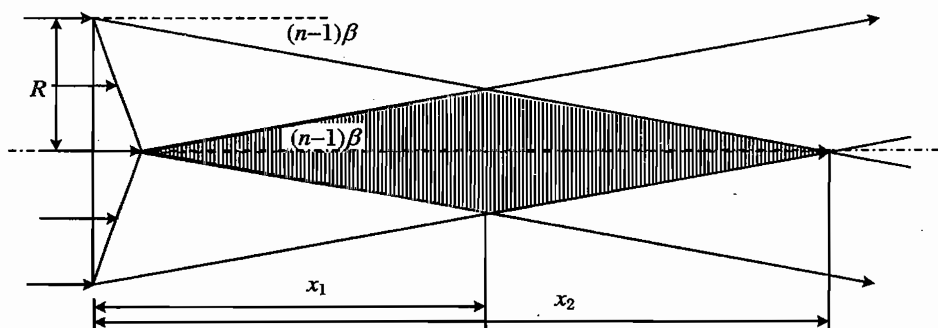


图 6.58　经过折射的光束

图 6.58 中，两圆斑重合的位置满足条件

$$x_1\tan(n-1)\beta + x_1\tan(n-1)\beta = R$$

即

$$x_1 = \frac{R}{2\tan(n-1)\beta} \approx \frac{R}{2(n-1)\beta}$$

出现圆环的位置满足条件

$$x_2\tan(n-1)\beta = R$$

即

$$x_2 = \frac{R}{\tan(n-1)\beta} \approx \frac{R}{(n-1)\beta}$$

【例 6.13】(第 19 届全国中学生物理竞赛复赛试题)　设一薄凸透镜放在空气中，两侧焦点和透镜中心的距离相等。如果此薄透镜两侧的介质不同，其折射率分别为 n_1 和 n_2，则透镜两

侧仍各有一焦点,设为 F_1,F_2,但 F_1,F_2 和透镜中心的距离不相等,其值分别为 f_1 和 f_2。现有一薄透镜 L,已知此凸透镜对平行光束起会聚作用,在其左右两侧介质和折射率及焦点的位置如图 6.59 所示。

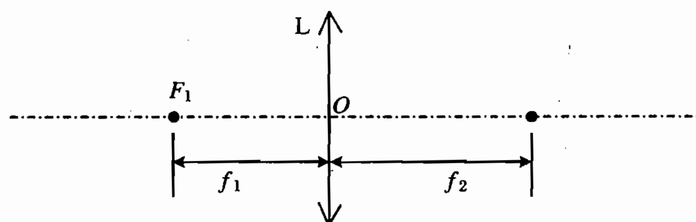


图 6.59 例 6.13 的示意图

(1) 试求出此时物距 u、像距 v、焦距 f_1、焦距 f_2 四者之间的关系式。

(2) 若有一傍轴光线射向透镜中心,已知它与透镜主轴的夹角为 θ_1,则与之相应的出射线与主轴的夹角 θ_2 为多大?

(3) f_1,f_2,n_1,n_2 四者之间有何关系?

解 本题可直接套用公式计算,若不这样,则根据透镜的性质用作图法最好。

(1) 根据焦点的性质,可作图表示物像关系,见图 6.60。

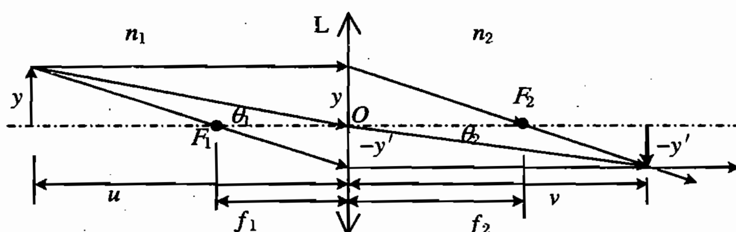


图 6.60 物像关系

若记物高和像高分别为 y 和 y',由两对对顶的相似三角形,可得到如下关系:

$$\frac{y}{y'} = \frac{u - f_1}{f_1} = \frac{f_2}{v - f_2}$$

整理后可得

$$vf_1 + uf_2 = uv, \quad 即 \quad \frac{f_1}{u} + \frac{f_2}{v} = 1$$

这就是物方、像方折射率不同时的高斯公式。

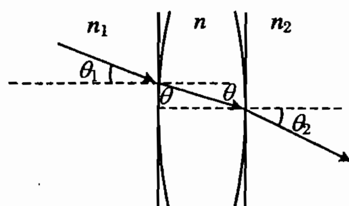


图 6.61 光线过光心的折射

(2) 由于薄透镜的光心附近的两侧可以看作是一对相互平行的平面,见图 6.61,因而有

$$n_1 \sin\theta_1 = n\sin\theta = n_2 \sin\theta_2$$

可得

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

由于是傍轴光线,$\sin\theta_1 \sim \theta_1$,$\sin\theta_2 \sim \theta_2$,上式也可以表示为

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

(3) 将图 6.60 中物、像上的对应点与光心相连，从而形成一对共轭光线。可以看出

$$\frac{y}{y'} = \frac{u\tan\theta_1}{v\tan\theta_2}$$

而

$$\frac{y}{y'} = \frac{f_2}{v - f_2}$$

利用公式$\frac{f_1}{u} + \frac{f_2}{v} = 1$，可得$\frac{u}{v} = \frac{f_1}{v - f_2}$，于是有

$$\frac{y}{y'} = \frac{f_2}{f_1}\frac{f_1}{v - f_2} = \frac{f_2}{f_1}\frac{u}{v} = \frac{u\tan\theta_1}{v\tan\theta_2}$$

即得

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} \approx \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

【例 6.14】（第 19 届全国中学生物理竞预赛试题） 在图 6.62 中，三棱镜的顶角 α 为 60°，在三棱镜两侧对称位置上放置焦距均为 $f = 30.0$ cm 的两个完全相同的凸透镜 L_1 和 L_2。若在 L_1 的前焦面上距主光轴下方 $y = 14.3$ cm 处放一单色点光源 S，已知其像 S' 与 S 对于该光学系统是左右对称的，试求该三棱镜的折射率。

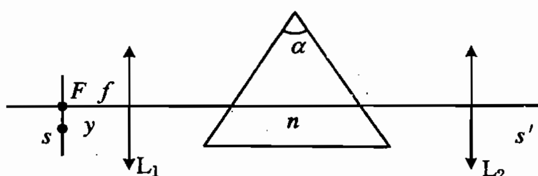


图 6.62 例 6.14 中的装置

解 由于各光学元件是左右对称的，而物像也是左右对称的，故光线在棱镜中的传播也是左右对称的。即从焦平面发出的光线经棱镜 L_1 后变为平行光，满足最小偏向角的平行光射向棱镜（图 6.63），棱镜中的光线与光轴平行。

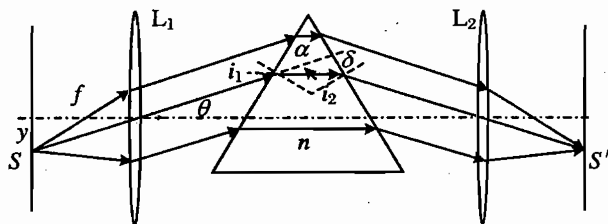


图 6.63 最小偏向角的情形

经过棱镜的光线与光轴的夹角满足

$$\tan\theta = \frac{y}{f}$$

光线在棱镜侧面的入射角为

$$i_1 = \frac{\alpha}{2} + \theta$$

经过棱镜后，光线的偏转角为

$$\delta = 2\theta$$

光线的折射角为

$$i_2 = \frac{\alpha}{2}$$

于是折射率为

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \arctan\frac{y}{f}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

【例 6.15】(第 21 届全国中学生物理竞预赛试题) 有一种高脚酒杯，如图 6.64 所示，杯内底面为一凸起的球面，球心在顶点 O 下方玻璃中的 C 点，球面的半径 $R = 1.50\,\text{cm}$，O 到杯口平面的距离为 8.0 cm。在杯脚底中心处 P 点紧贴一张画片，P 点距 O、点 6.3 cm。这种酒杯未斟酒时，若在杯口处向杯底方向观看，看不出画片上的景物，但如果斟了酒，再在杯口处向杯底方向观看，将看到画片上的景物。已知玻璃的折射率 $n_1 = 1.56$，酒的折射率 $n_2 = 1.34$，试通过分析、计算与论证解释这一现象。

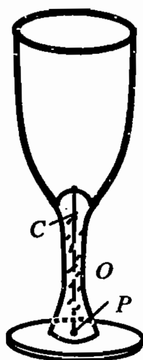
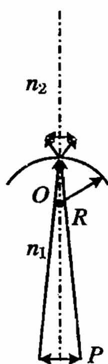


图 6.64　高脚杯图



6.65　成像情况

解　物经球面折射成像(图 6.65)，有物像关系

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n' - n_1}{R}$$

其中，$R = -1.50\,\text{cm}$，$s = 6.3\,\text{cm}$，$n_1 = 1.56$。若杯子是空的，则像方为空气，折射率为 1，算得 $s' = 0.13\,\text{cm}$，这是一个缩小的实像，在球面附近，横向放大率为 0.032，且光束的发散角很小，不易被观察到。

若杯中注酒，像方折射率为 $n_2 = 1.34$，算得 $s' = -0.14\,\text{cm}$，这是一个虚像，横向放大率约为 0.026。再经过酒与空气的界面折射一次，由于是平面成像，故有

$$\frac{1}{s''} + \frac{n_2}{d - s'} = \frac{1 - n_2}{\infty} \quad \Rightarrow \quad s'' = -\frac{d - s'}{n_2} \approx -\frac{d}{1.34}$$

所成的像仍是虚像。在酒杯中，经两次成虚像后，虽然横向放大率仍很小，但光束的发散角变大了，容易被看到。

【例 6.16】(第 25 届全国中学生物理竞赛预赛试题) 如图 6.66 所示，一细长的圆柱形均匀玻璃棒，其一个端面是平面(垂直于轴线)，另一个端面是球面，球心位于轴线上。现有一很细的光束沿平行于轴线方向且很靠近轴线入射。当光从平端面射入棒内时，光线从另一端面射出后与轴线的交点到球面的距离为 a；当光线从球形端面射入棒内时，光线在棒内与轴线的交点到球面的距离为 b。试近似地求出玻璃的折射率 n。

解　这是近轴光线经单球面折射成像的问题。

球面在空气一侧的焦距为 $f' = \frac{-r}{1-n}$，在玻璃一侧的焦距为 $f = \frac{-nr}{1-n}$，即

$$a = f' = \frac{r}{n-1}, \quad b = f = \frac{nr}{n-1}$$

于是

$$n = \frac{b}{a}$$

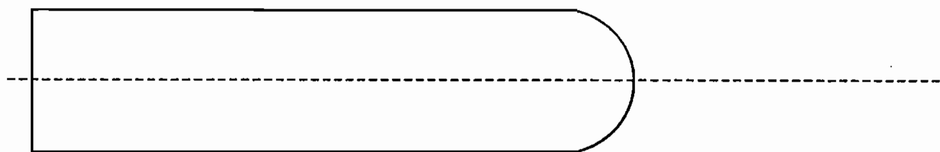


图 6.66　例 6.16 中的玻璃棒

【例 6.17】(第 26 届全国中学生物理竞赛复赛试题)　设内半径为 R 的直立圆柱器皿内盛有水银，绕圆柱轴线匀速旋转(水银不溢，皿底不露)，稳定后的液面为旋转抛物面。若取坐标原点在抛物面的最低点，纵坐标轴 z 与圆柱器皿的轴线重合，横坐标轴 r 与 z 轴垂直，则液面的方程为 $z=\frac{\omega^2}{2g}r^2$，式中 ω 为旋转角速度，g 为重力加速度。(当代已使用大面积的此类旋转水银液面作反射式天文望远镜。)

观察者的眼睛位于抛物面最低点正上方某处，保持位置不变，然后使容器停转，待液面静止后，发现与稳定旋转时相比，看到的眼睛的像的大小、正倒都无变化。求人眼位置至稳定旋转水银面最低点的距离。

解　本题有三个关键点，首先要明白大的抛物面的近轴部分近似于球面，可用球面反射的物像公式；其次，要确定平面与抛物面顶点间的距离，也就是要计算抛物面下水银的体积；最后，看到的像的大小都相同，不是指像的大小相同，而是像对眼睛的视角相同。

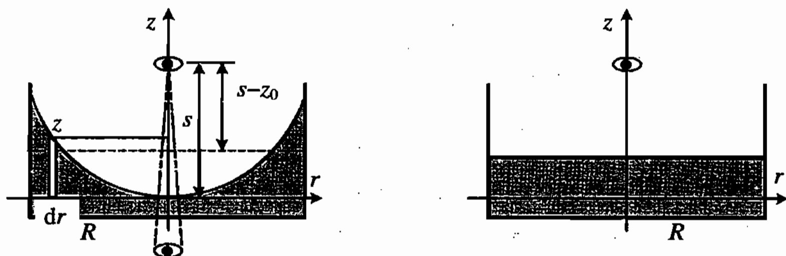


图 6.67　例 6.17 中的装置

抛物面的焦点就是球面成像的焦点，由于抛物线的方程为 $z=\frac{\omega^2}{2g}r^2$，可知其焦点为

$$f = \frac{g}{2\omega^2}$$

对于过抛物面顶点的平面之上的水银的体积，可以采用积分方法计算。取一半径为 r 的薄壁圆筒，筒壁的高为 $z=\frac{\omega^2}{2g}r^2$，圆筒的底面积为 $S=\pi r^2$，则薄壁的底面积为 $\mathrm{d}S=2\pi r\mathrm{d}r$。因此，该圆筒壁的体积为

$$\mathrm{d}V = z\mathrm{d}S = 2\pi zr\mathrm{d}r$$

上述水银的体积为

$$V = \int_0^R 2\pi zr\mathrm{d}r = \int_0^R 2\pi\frac{\omega^2}{2g}r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi\omega^2R^4}{4g}$$

当抛物面成为平面时，这些水银所形成的圆柱的高为

$$z_0 = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

这就是平面与抛物面顶点间的距离。

以下讨论成像问题。

设眼睛到抛物面顶点的距离为 s，眼睛的大小为 y，则抛物面成像的像距为

$$s_1' = \frac{sf}{s-f}$$

像的大小为

$$y_1' = y\frac{-s_1'}{s} = -\frac{yf}{s-f}$$

该像对眼睛的张角为

$$\varphi_1 = \frac{y_1'}{s-s_1'} = -\frac{yf}{(s-s_1')(s-f)}$$

眼睛到平面的距离为 $s_2 = s - z_0$，平面成像的像距为 $s_2' = -(s - z_0)$，像的大小仍为 y，则对眼睛的张角为

$$\varphi_2 = \frac{s_2'}{s_2 - s_2'} = \frac{y}{2(s-z_0)}$$

由于 $\varphi_1 = \varphi_2$，所以

$$\frac{yf}{(s-s_1')(s-f)} = \frac{y}{2(s-z_0)}$$

$$-(2s-2z_0)f = s^2 - 2sf$$

解得

$$s = \sqrt{2fz_0} = \sqrt{2\times\frac{g}{2\omega^2}\frac{\omega^2R^2}{4g}} = \frac{R}{2}$$

点评 作者在评阅考卷中发现，几乎所有的考生都用积分方法计算抛物面下圆筒内水银的体积，但几乎没有考生能够算对，原因都是积分的体积元选错了，他们选取绕轴形成的扇形作体积元，这当然是没有道理的。至于标准答案中所给的计算体积的方法，尽管简洁，但几乎没有考生采用。这真是辜负了出题者的良苦用心。

6.5 透镜组成像

为了获得所需的效果，实用的成像系统往往由多个透镜共轴排列，构成透镜组。例如，照相机的镜头就是由多片共轴透镜构成的。其中，柯克物镜由 3 片透镜构成；匹兹万物镜由 4 片构成；天塞物镜、海利亚物镜由 4 片构成；双高斯物镜、普兰那物镜、松那物镜都由 6 片透镜构成；变焦镜往往由 15 片左右的透镜构成。

光线每经过一个透镜成一次像，因而用逐次成像法可以方便地解决透镜组的成像问题。

6.5.1 透镜组成像的计算

逐次成像计算的要点是要确定物像的虚实，尤其是物的虚实。

每一个透镜的像是下一个透镜的物。像如果位于下一个透镜的物方，则是实物；如果不在下一个透镜的物方，则必定是虚物。

实物或者虚物可以用物距的正负值体现。设两透镜的光心间距为 d，前一透镜的像距为 s_1'，则该像到下一透镜的距离为 $s_2 = d - s_1'$，s_2 就是下一次成像的物距。当 $s_1' < d$ 时，像为实物，物距 s_2 取正值；当 $s_1' > d$ 时，像为虚物，物距 s_2 取负值。

以下通过例子加以说明。

【例 6.18】 计算物体经过平行平板玻璃所成的像。

解 如图 6.68 所示，设玻璃的厚度为 d，记空气和玻璃的折射率分别为 n_1 和 n_2，物到玻璃一个侧面的距离为 s_1。

平面的曲率半径 $r = \infty$，则物像公式为$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = 0$。

第一次折射成像，像距为 $s_1' = -\frac{n's}{n} = -\frac{n_2 s_1}{n_1}$，所成的为虚像，横向放大率为 1。该虚像到第二折射面的物距为 $s_2 = d - s' = d + \frac{n_1}{n_2}s_1$。

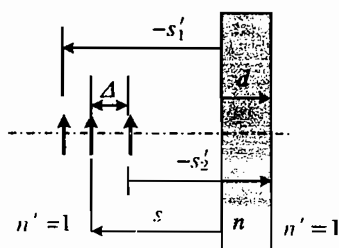


图 6.68 玻璃平板的逐次成像

第二次成像，像距为 $s_2' = -\frac{n_1 s_2}{n_2} = -\left(s_1 + \frac{n_1}{n_2}d\right)$，所成的仍为虚像，横向放大率依然为 1。相对于原物的位移为 $\Delta = -s_2' - (s_1 + d) = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)d = \left(\frac{1}{n_2} - 1\right)d$，比物更靠近玻璃，看起来比原物要大一些。

【例 6.19】 如图 6.69 所示，计算物体经过顶角为 α 的光楔所成的像。

解 记物到光楔一个侧面的距离为 s。

如图 6.70 所示，自物点向光楔左侧面作垂线，第一次折射所成的像在该垂线上。显然所成的为虚像，像距为 $-ns$。这个虚像处于第二折射面的物方，因而是光楔左侧面的实物。

自像向光楔右侧面作垂线，第二次成的像在这一垂线上。

由于光楔很薄，所以第二次成像的物距就是 ns，像距为 $-s$，与物到光楔的距离相同。由图 6.70 可见，由于光楔的两侧面不平行，故最后的像会向楔尖方向稍稍移动，移动的距离为

$$\Delta h = (ns - s)\alpha = (n-1)s\alpha$$

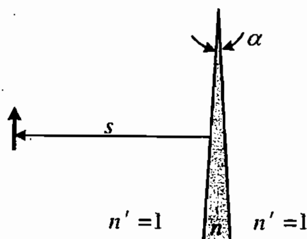


图 6.69 光楔成像

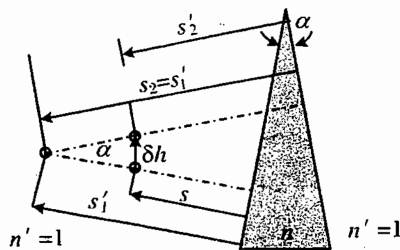


图 6.70 非平行平面的逐次成像

【例 6.20】 将薄透镜的一侧涂以反射膜,讨论这样的"透反射镜"的成像特征。

解法 1 可以将这种装置看作是一个薄透镜和一个球面镜的组合,两者的间距为 0。透镜的焦距为 $f_1=\dfrac{1}{(n-1)\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)}=\dfrac{r_1r_2}{(n-1)(r_2-r_1)}$,球面镜的焦距为 $f_2=-\dfrac{r_2}{2}$。

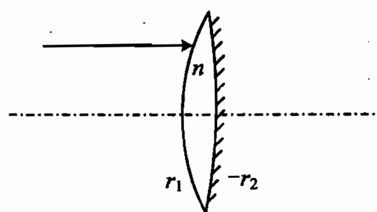


图 6.71 透反射镜

如图 6.71 所示,以平行光入射,计算该光具组的焦距。经透镜成像于 $s_1'=f_1$ 处。

对球面反射镜,该像的物距为 $s_2=-f_1$,经球面镜成像,像距为

$$s_2'=\frac{s_2f_2}{s_2-f_2}=\frac{f_1f_2}{f_1+f_2}$$

反射光再经透镜成像。物距为

$$s_3=-s_2'$$

像距为

$$s_3'=\frac{s_3f_1}{s_3-f_1}=\frac{-\dfrac{f_1f_2}{f_1+f_2}f_1}{-\dfrac{f_1f_2}{f_1+f_2}-f_1}$$

$$=\frac{f_1^2f_2}{f_1(f_1+2f_2)}=\frac{f_1f_2}{f_1+2f_2}=\frac{1}{\dfrac{2}{f_1}+\dfrac{1}{f_2}}$$

s_3'就是该光具组的像方焦距 f。由于是球面反射,且物方、像方重合,故光具组相当于一个球面反射镜,焦距为

$$f=\frac{f_1f_2}{f_1+2f_2}=\frac{\dfrac{r_1r_2}{(n-1)(r_2-r_1)}\dfrac{r_2}{2}}{\dfrac{r_1r_2}{(n-1)(r_2-r_1)}+\dfrac{2r_2}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{r_1r_2}{n(r_2-r_1)-r_2}$$

解法 2 从各个球面对光线的折射、反射分析成像。逐次成像过程为:Σ_1 处折射(空气→玻璃)→Σ_2 处反射(玻璃→玻璃)→Σ_1 处反射(玻璃→空气)。

平行光经球面 Σ_1 折射(空气→玻璃),像距即为 Σ_1 的右焦距

$$s_1'=\frac{nr_1}{n-1}$$

再经球面 Σ_2 反射(玻璃→玻璃),物距为

$$s_2=-s'_1=-\frac{nr_1}{n-1}$$

像距为

$$s_2'=-\frac{r_2s_2}{r_2+2s_2}=\frac{r_2s_1'}{r_2-2s_1'}$$

最后经球面 Σ_1 折射(玻璃→空气),物距为 $s_3=-s_2'$,像距为

$$s_3'=-\frac{s_3r_1}{(1-n)s_3+nr_1}\quad(s_3'\text{是光具组的焦距 }f)$$

因此

$$f=\frac{\dfrac{r_2f_1'}{r_2-2f_1'}r_1}{-(1-n)\dfrac{r_2f_1'}{r_2-2f_1'}+nr_1}$$

$$=\frac{r_2f_1'r_1}{-(1-n)r_2f_1'+nr_1(r_2-2f_1')}$$

$$=\frac{r_2\dfrac{nr_1}{n-1}r_1}{-(1-n)r_2\dfrac{nr_1}{n-1}+nr_1\left(r_2-2\dfrac{nr_1}{n-1}\right)}$$

$$=\frac{nr_1r_2}{-(1-n)nr_2+n[(n-1)r_2-2nr_1]}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{r_1r_2}{n(r_2-r_1)-r_2}$$

解法 3 利用各个球面的光焦度计算。

由于光线依次经过三个密接球面成像，这三个密接球面构成的光具组的光焦度就等于各个球面的光焦度之和，即 $\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3$，而

$$\Phi_1=\frac{n-1}{r_1},\quad \Phi_2=-\frac{2n}{r_2},\quad \Phi_3=\frac{1-n}{-r_1}$$

所以

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3=\frac{n-1}{r_1}-\frac{2n}{r_2}-\frac{1-n}{r_1}$$

$$=\frac{2n(r_2-r_1)-2r_2}{r_1r_2}$$

从而有

$$f=\frac{1}{\Phi}=\frac{1}{2}\frac{r_1r_2}{n(r_2-r_1)-r_2}=\frac{1}{2n\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)-\dfrac{2}{r_1}}$$

6.5.2 透镜组成像的作图

逐次成像法就是将光线经第一镜所成的像，作为第二镜的物，再经第二镜成像。

在应用逐次成像法作图时，要区分不同的情况，用不同的方法加以处理。

(1) 前次所成的实像位于下次成像的透镜的物方，见图 6.72 和图 6.73。

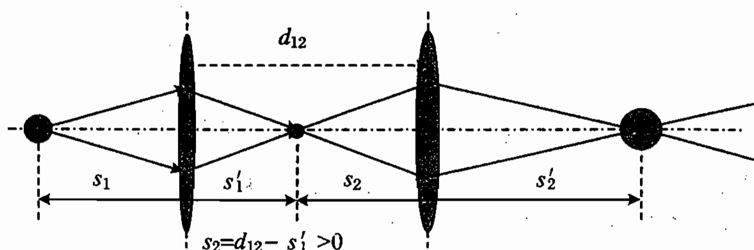


图 6.72 前次的实像为后次成像的实物(经正透镜成像)

这是最简单的情况，前次的像作为后次的物，直接作图。

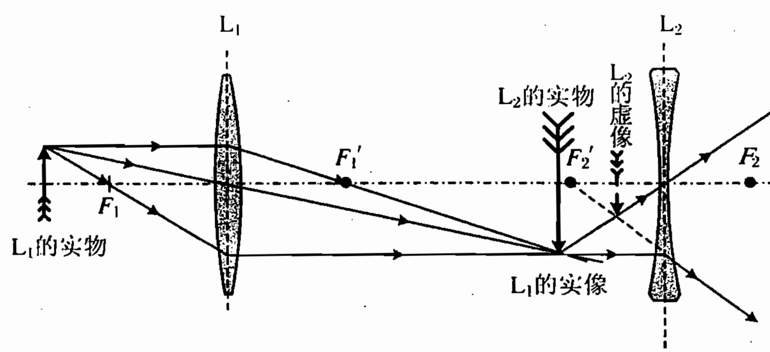


图 6.73　前次的实像为后次成像的实物(经负透镜成像)

(2) 前次所成的为虚像，见图 6.74 和图 6.75。

虚像位于前次透镜的物方，则必定位于后次成像透镜的物方，因而该虚像就是后次成像透镜的实物。

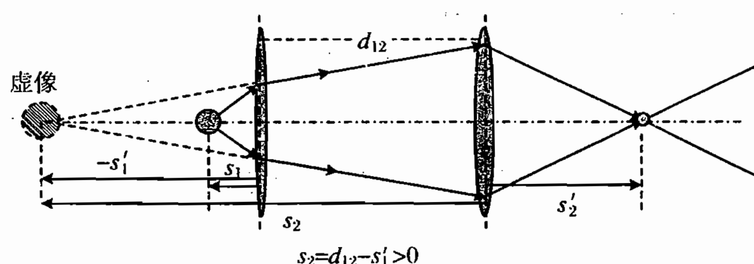


图 6.74　虚像作为实物

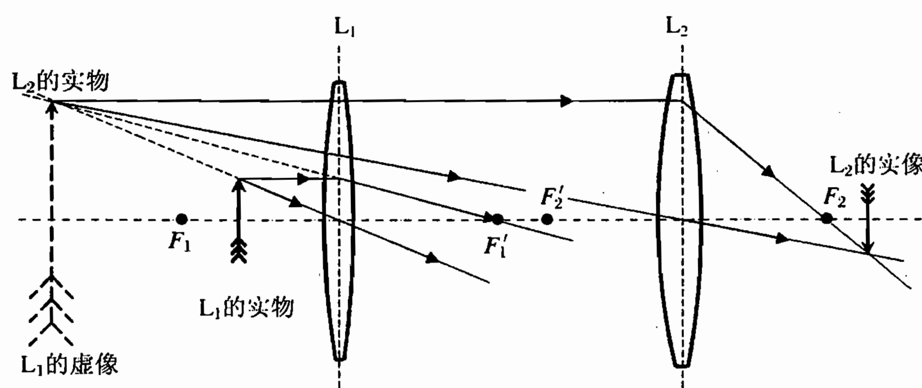


图 6.75　虚像作为实物的作图细节

(3) 前次所成的实像位于下次成像的透镜的像方，见图 6.76。

此时，前次所成的像是下次成像透镜的虚物。

物经 L_1 所成的像位于 L_2 的左侧(物方)，即在经过 L_2 之前已经成一实像，因此，该像作为 L_2 的物是真实的，就是实物。

应用作图法，读者会发现，第一透镜的像成在第二透镜的像方，即对第二透镜来说，第一透镜的像是“虚物”。虚物是不能作为物发光成像的，因而需要特殊处理。

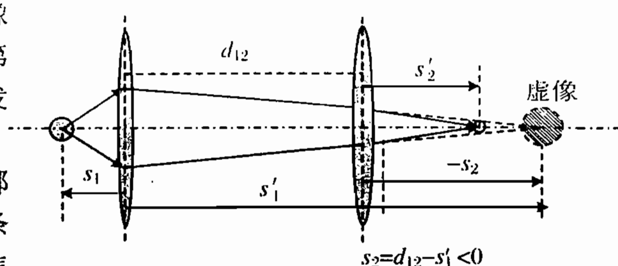


图 6.76　虚物成像

如图 6.77 所示，射向第二透镜的光线都是要会聚到虚物处的，因而，可以任意选两条特殊的光线，现在选择经过第二透镜物方焦点和平行于光轴的两条光线，则很容易就确定出折射后的共轭光线，并作出最后成像的位置。

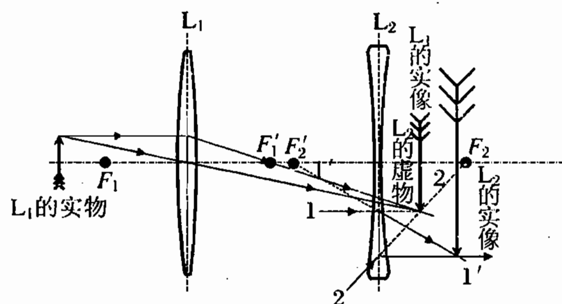


图 6.77　用形成虚物的特殊光线作图

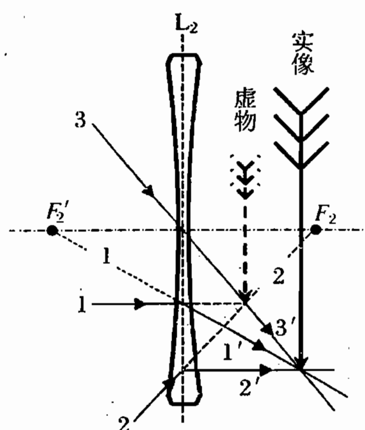


图 6.78　虚物成像的作图细节

实际上，根据前面介绍的求任意入射光线的共轭光线的步骤与方法，完全可以作出图 6.79 中光线 1,2 经 L_2后所成的像。

【例 6.21】(第 16 届全国中学生物理竞赛预赛试题)　设一平凸透镜的焦距为 f，其平面上镀了银，在其凸面一侧距它 $2f$ 处，垂直于主轴放置一高为 y 的傍轴小物，其下端在透镜的主轴上(图 6.80)。

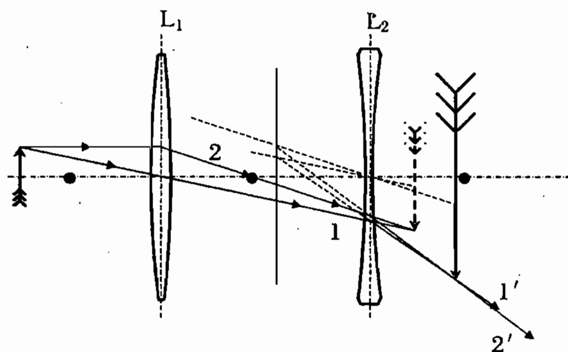


图 6.79　形成虚物的任意光线作图

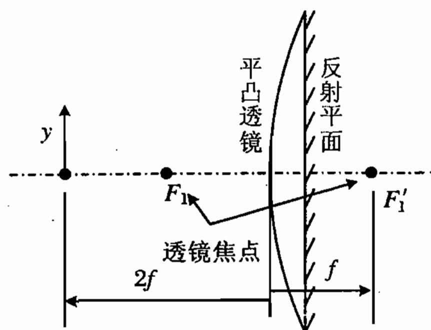


图 6.80　平面镀银的平凸透镜

(1) 用作图法画出物经镀银透镜所成的像，并标明该像是虚的，还是实的。

(2) 计算像的位置和大小。

解 逐次成像过程的分步作图方法如图 6.81 所示。

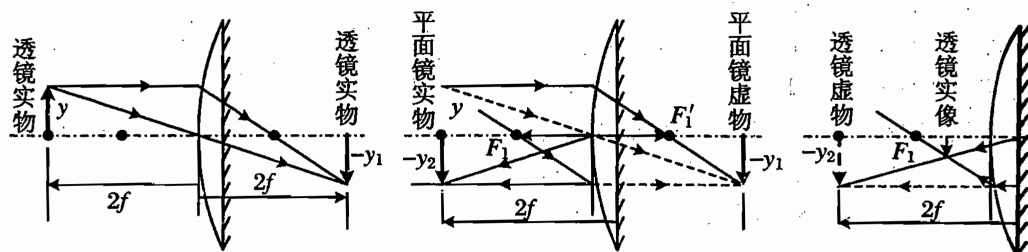


图 6.81 逐次成像作图

也可以采用图 6.82 所示的方法作图。

最后成像的位置和像的大小见图 6.83。

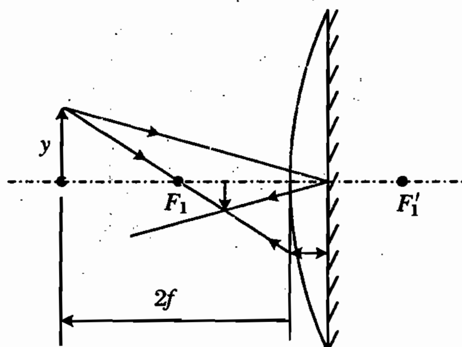


图 6.82 另一种方法作图

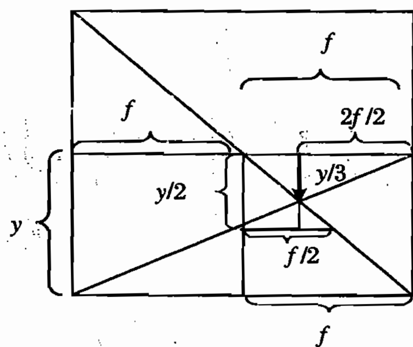


图 6.83 像距的计算

【例 6.22】(第 15 届全国中学生物理竞赛复赛试题) 如图 6.84 所示，L_1 和 L_2 为两个共轴的薄凸透镜，OO'为其主轴，L_1 的焦距为 $f_1 = 10$ cm，口径(直径)为 $d_1 = 4.0$ cm，L_2 的焦距为 $f_2 = 5.0$ cm，口径(直径)为 $d_2 = 2.0$ cm。两镜相距 $a = 30$ cm。AB 为一与透镜共轴的直径为 $d = 2.0$ cm 的均匀发光圆盘，有清晰的边缘，把它放在 L_1 左侧 20 cm 处，它在 L_2 右侧垂直于 OO'的光屏 P 上成像。

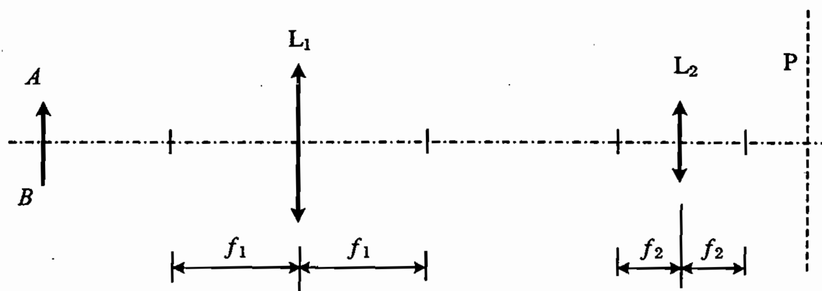


图 6.84 例 6.22 中的装置

(1) 求光屏应放在何处。

(2) 现发现光屏上的像的中间部分较亮，边缘部分较暗。为了使像的边缘部分也能和中间部分一样亮，但又不改变像的位置和大小，可以在 OO' 上插放一个共轴的薄透镜 L_3。试问 L_3 应放在何处，口径（直径）至少要多大，焦距应是多少？

解 本题不仅要解决成像的问题，还要解决成像光束的发散角问题。

(1) 由于物到 L_1 的距离是 2 倍焦距，而两透镜的间距是焦距之和的 2 倍，所以两次都成等大小的倒立实像，接收屏 P 应放在 L_2 像方的 2 倍焦距处。

(2) 如图 6.85 所示（为便于观察，作者将物像及透镜的横向都按比例放大了），尽管物上各点发出的光线都可以在 P 上成实像，但透镜对不同的物点有不同的光瞳。L_1 对 AB 上各点的光瞳基本相等，但 L_2 则不然。从物上中心点 C 发出的光束，凡是通过 L_1 的，都会聚到 P 上，而从 A 点发出的光束，只有图中画出的一小部分能会聚到 P 上，大部分并不经过 L_2。

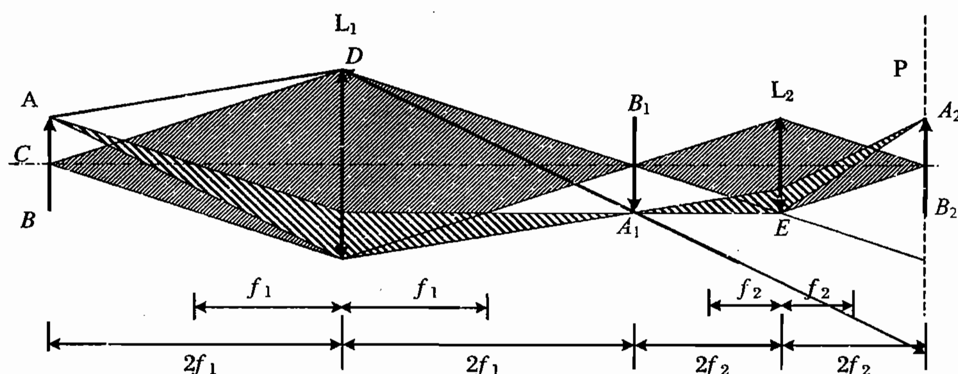


图 6.85 通过 L_2 的光线束

如果要增加一个透镜 L_3，必须做到不能改变最终像的位置，要做到这一点，对 L_3 的成像过程来说，只能是物距为 0，像距也为 0，则 L_3 只能放在中间像 A_1B_1 的位置，即两透镜之间的 2 倍焦距处。

增加 L_3 后，要能够使不经过 L_2 的光线全部经过 L_2，这就对其孔径和焦距有要求。

首先，L_3 的孔径至少不能比中间像小，则孔径至少是 2.0 cm。

其次，要使经过 L_2 的光线全部经过 L_2，必须使经过 L_1 的边缘的光线至少会聚到 L_2 的边缘，即能够使图中 L_1 的边缘 D 点成像于 L_2 的边缘上 E 点。因此其焦距为

$$f_3 = \frac{2f_1 \times 2f_2}{2f_1 + 2f_2} = \frac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2} = \frac{20}{3}\ \text{cm}$$

【例 6.23】（第 14 届全国中学生物理竞赛预赛试题） 在焦距为 20.00 cm 的薄凸透镜的主轴上离透镜中心 30.00 cm 处有一小发光点 S，一个厚度可以忽略的光楔 C（顶角 α 很小的三棱镜）放在发光点与透镜之间，垂直于主轴，与透镜的距离为 2.00 cm，如图 6.86 所示。设光楔的折射率为 $n=1.5$，楔角为 $\alpha=0.028$（弧度）。在透镜的另一侧离透镜中心 46.52 cm 处放一平面镜 M，其反射面向着透镜并垂直于主轴。问最后形成的发光点的位置在何处？

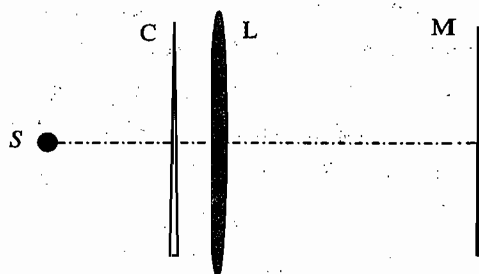


图 6.86 例 6.23 中的装置

（只讨论傍轴光线，小角度近似适用，在分析过程中应作出必要的光路图。）

解　本题中，物点 S 首先依次经光楔、透镜、平面镜成像，被平面镜反射后，再依次经透镜、光楔成像，共有五次成像过程。以下依次分别计算。

(a) 对于光楔 C，物距为

$$s_1 = 28.00\ \text{cm}$$

S 经光楔 C 后成虚像，在其物方（即左侧），像距为

$$s'_1 = -s_1 = -28.00\ \text{cm}$$

到轴的横向距离为

$$y'_1 = (n-1)\alpha s_1 = 0.392\ \text{cm}$$

(b) 对于透镜 L，物距为

$$s_2 = 30.00\ \text{cm}$$

像距为

$$s'_2 = \frac{s_2 f}{s_2 - f} = 60.00\ \text{cm}$$

像点到轴线的距离可依据成像过程中横向放大率进行计算，得到

$$y'_2 = -0.784\ \text{cm}$$

(c) 对于平面镜 M，物距为

$$s_3 = 46.52 - 60.00 = -13.48\quad (\text{cm})$$

像距为

$$s'_3 = -s_3 = 13.48\ \text{cm}$$

到轴线的距离仍为 -0.784 cm。

(d) 对于反射回来的光，其物方、像方相反，经 L 成像后，物距为

$$s_4 = d - (-s'_3) = 33.04\ \text{cm}$$

像距为

$$s'_4 = \frac{s_4 f}{s_4 - f} = 50.67\ \text{cm}$$

到轴线的距离为

$$y'_4 = 1.20\ \text{cm}$$

(e) 对于光楔，透镜的实像是虚物，在原处，距光楔 48.67 cm，向光楔的底部偏移 0.68 cm，距轴线 0.52 cm。

点评　本题只要将五次成像过程分析清楚即可，不仅要计算每次成像的位置，同时要根据横向放大率确定像点到轴线的距离。但题中所给的平面镜到透镜的距离 46.52 cm 不仅毫无依据，还白白地增大了计算量，以至于连出题者给出的标准答案中都出现了计算错误。在竞赛中用复杂的初等数学困扰考生，实在是莫名其妙。

【例 6.24】（第 14 届全国中学生物理竞赛复赛试题）　设一光学系统的结构如图 6.87 所示，薄透镜 L_1 为会聚透镜，焦距为 f_1；薄透镜 L_2 为发散透镜，焦距为 $-f_2$。成像面 P 处放有照相底片，L_1 和 P 的位置固定不动，现给定 $f_1 = 3.00$ cm，P 与 L_1 之间的距离 $l = 4.50$ cm。L_1 与 L_2 之间的距离 d 是可调的。要求通过调节 d 使无穷远处的物或近处的物都能在底片上成像，问：

(1) 如果 $f_2 = -3.00$ cm，物体从无穷远处移到 $u_1 = 100.0$ cm 处，则 L_2 移动的距离为多少？

(2) 是否只要 f_2 和 d 取值适当，不管物体在什么地方都能在 P 上成像？如不能，则对物距有何限制？

(3) 如果要求采用一个焦距确定的 L_2，通过调节 d 的数值使物距满足上面第二问的要求的物体都能在 P 上成实像，则 L_2 的焦距 f_2 应满足什么条件，以及相应的 d 的调节范围为多大？

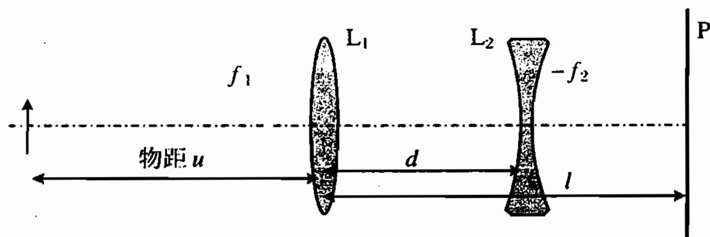


图 6.87　例 6.24 中的装置

解　本题类似于照相机的成像问题，由两个间距可调的透镜组成的一个透镜组，其焦距可以改变。

(1) 物先经过 L_1 成像，根据高斯公式 $\frac{1}{u}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1}$，得到

$$s_1' = \frac{uf_1}{u-f_1}$$

从而有

$$u = +\infty,\quad s_1' = 3\ \text{cm}$$

$$u = 100.0\ \text{cm},\quad s_1' = \frac{300}{97}\ \text{cm}$$

再经 L_2 成像，对于 L_2，焦距 $f_2 = -3.00$ cm，物距 $s_2 = d - s_1'$，由于要求在 P 上成实像，所以像距 $s_2' = l - d$ 必须大于 0。

根据高斯公式

$$\frac{1}{d-s_1'} + \frac{1}{l-d} = \frac{1}{f_2}$$

计算限制条件。高斯公式可化为

$$d^2 - (l + s_1')d + (l - f_2)s_1' + lf_2 = 0$$

代入参数，得

$$d^2 - (4.50 + s_1')d + 7.50s_1' - 13.50 = 0$$

解得

$$d = \frac{4.50 + s_1' \pm \sqrt{(4.50 + s_1')^2 - 4(7.50s_1' - 13.50)}}{2}$$

当 $s_1' = 3.00$ cm 时，$d = 1.50$ cm，6.00 cm，由于 d 的调节范围最大只有 4.50 cm，故 $d = 1.50$ cm。

当 $s_1' = 300/97$ cm 时，$d = 1.62$ cm，5.97 cm，显然 $d = 1.62$ cm。

L_2从 1.50 cm 移动到 1.62 cm，向屏幕移动了 0.12 cm。

(2) 由于要在屏幕上成实像，而 L_2 是负透镜，只有虚物才能成实像。由$\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f_2}$，得到 $s_2'=\frac{s_2f_2}{s_2-f_2}$，其中 $s_2<0, f_2<0$。要使 $s_2'>0$，必须要求 $s_2>f_2$，即 $|s_2|<|f_2|$，即 L_1 的像在 L_2 的物方焦点内侧，而所成的为实像，故 $s_2'=\frac{f_2}{1-f_2/s_2}$。当 $1<\frac{f_2}{s_2}<2$ 时，$s_2'>-f_2$，实像在物方焦点外侧；$\frac{f_2}{s_2}>2$ 时，$0<s_2'<-f_2$，实像在物方焦点内侧。但像一定在虚物的外侧。所以虚物不能处于屏幕外侧，即 L_1 成像时，最大的像距为 4.5 cm。由此算得最小的物距为

$$s_{\min}=\frac{s'_{1\max}f_1}{s'_{1\max}-f_1}=9\text{ cm}.$$

(3) 由(2)知实像一定处于虚物的外侧，而虚物又必须处于焦点的内侧。

最远的虚物的物距为 -4.5 cm，这样的虚物在 P 上，要使经 L_2 的实像也在屏幕上，只有物距为 0，此时 L_2 要紧贴屏幕，对其焦距并无要求。

若物稍远一些，虚物在 P 的内侧，这时物、像间的距离较小，焦距可以较大。虚物在 3 cm 处时，物、像间的距离最大，$s_2+s_2'=1.5$ cm。对这时的情况进行计算，根据$\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f_2}$，可得

$$f_2=\frac{s_2s_2'}{s_2+s_2'}$$

本小题中的可变参量有两个，物距改变，引起 s_2 改变，又可使 d 改变，s_2 和 s_2'也同时改变。若设 $s_2+s_2'=D$，则 $0<s_2+s_2'=D<1.5$ (cm)，$0<s_2'<4.5$ (cm)。所以可讨论

$$f_2=\frac{s_2'(D-s_2')}{D},\quad f_2=\frac{s_2'(1.5-s_2')}{1.5}$$

要使 $f_2<0$，s_2'的最小值须为 1.5 cm，所以 s_2'只能在 1.5～4.5 cm 内取值，此时 f_2 的值为0～-9 cm。

一般情况下，$0<s_2+s_2'=D<1.5$ (cm)，$0<s_2'<4.5$ (cm)，算得 $f_2=\frac{s_2'(D-s_2')}{D}$，因而 L_2 的焦距最大是$|f_2|_{\max}=4.5$ cm，而远处物体经 L_1后，像距为 3 cm，此时使 L_2 紧靠 L_1，虚物的物距$|s_2|$最大为 3 cm。根据 $s_2'=\frac{f_2}{1-f_2/s_2}$，其焦距也必须大于 3 cm，即

$$|f_2|_{\min}=3\text{ cm}$$

在选定 f_2，虚物在 P 的左侧时，$s_2'+s_2>0$。当物很远时，经 L_1 所成的像在 3 cm 处，此时，要使 L_2 与 L_1 的间隔 d 小于 3 cm，即要求 $l<s_1'$，而

$$u=\frac{s_1'f_1}{s_1'-f_1}=\frac{f_1}{1-f_1/s_1'}$$

所以

$$u_{\min}=\frac{f_1}{1-f_1/l}=9\text{ cm}$$

【例 6.25】(第 23 届全国中学生物理竞赛复赛试题) 有一种被称为直视分光镜的光谱学仪器，所有光学元件均放在一直长圆筒内。筒内有：三个焦距分别为 f_1，f_2 和 f_3 的透镜 L_1，L_2，

L_3，$f_1 = f_2 > f_3$；观察屏 P，它是一块带有刻度的玻璃片；由三块形状相同的等腰棱镜构成的分光元件（图 6.88），棱镜分别用折射率不同的玻璃制成，两侧棱镜的质料相同，中间棱镜则与它们不同，棱镜底面与圆筒轴平行。圆筒的一端有一与圆筒轴垂直的狭缝，它与圆筒轴的交点为 S，缝平行于棱镜的底面。当有狭缝的一端对准筒外的光源时，位于圆筒另一端的人眼可观察到屏上的光谱。

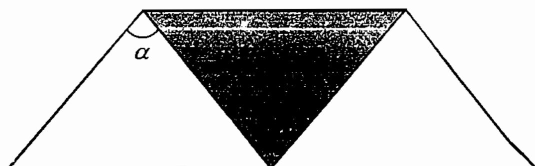


图 6.88　例 6.25 中的分光元件

已知：当光源是钠光源时，它的黄色谱线（波长为 589.3 nm，称为 D 线）位于圆筒轴与观察屏的相交处。制作棱镜所用的玻璃，一种为冕牌玻璃，它对钠 D 线的折射率 $n_D = 1.5170$；另一种为火石玻璃，它对钠 D 线的折射率 $n'_D = 1.7200$。

（1）试在图 6.89 中绘出圆筒内诸光学元件相对位置的示意图，并说出各元件的作用。

（2）试论证三块棱镜各应由何种玻璃制成，并求出三棱镜的顶角 α 的数值。

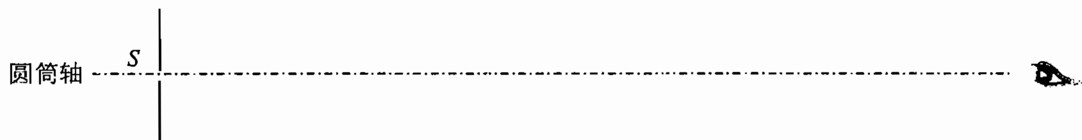


图 6.89　画出光学元件的配置

解　（1）本题中，三棱镜用于分光，透镜一是将入射光变为平行光入射到棱镜上，二是将从棱镜出射的平行光会聚到观察屏上。眼睛通过放大镜直接观察色散之后的光谱线。光路配置如图 6.90 所示。

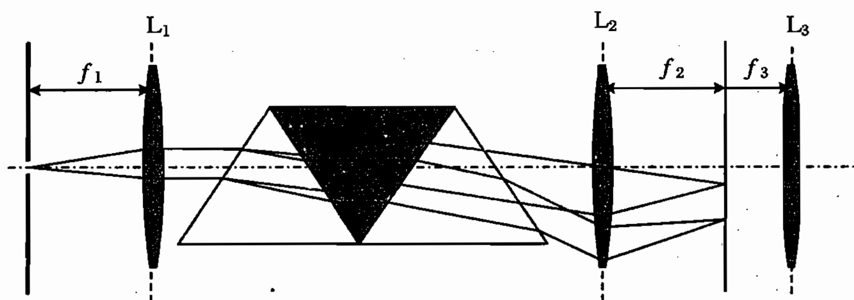


图 6.90　光路配置

（2）由配置图可以看出，出射的 D 线一定沿光轴方向，而入射光线也沿光轴方向，所以光线的折射与传播是对称的，如图 6.91 所示。

可见在中间棱镜的界面处，内部的角度小于外部的角度，所以中间棱镜的折射率高，应当选用火石玻璃，两侧的棱镜应当选用冕牌玻璃。

由图 6.91，可见

$$n'_D \sin\frac{\alpha}{2} = n_D \sin i_1,\quad n_D \sin i_2 = \sin\frac{\alpha}{2}$$

而 $i_1 + i_2 = \alpha$，所以

$$n_D\sin(\alpha - i_1) = n_D(\sin\alpha\cos i_1 - \cos\alpha\sin i_1)$$
$$= \sqrt{n_D^2 - n_D^2\sin^2 i_1}\sin\alpha - n_D\sin i_1\cos\alpha$$
$$= \sqrt{n_D^2 - n_D'^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha - n''_D\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= \sin\frac{\alpha}{2}$$
$$2n'_D\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{\frac{n_D^2}{n_D'^2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} - \cos\alpha\right) = 1$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4n_D'^2 - (n_D + 1)^2}{4(D_2'^2 - n_D)}$$

从而可求得

$$\alpha = 123.6^\circ$$

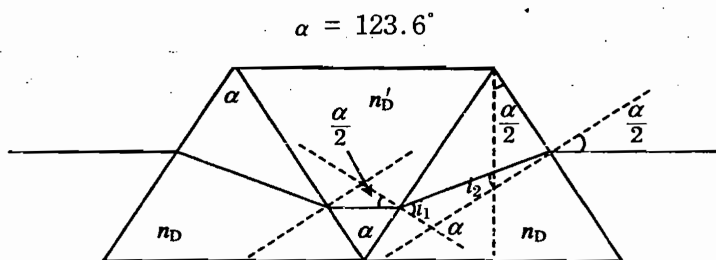


图 6.91　光线在各个界面上的折射

【例 6.26】（第 13 届全国中学生物理竞赛复赛试题）　长度为 4 mm 的物体 AB 经图 6.92 所示的光学系统成像。光学系统由一个直角棱镜、一个会聚透镜和一个发散透镜组成，各有关参数和几何尺寸均标示于图上。求：

（1）像的位置；

（2）像的大小，并作图说明是实像还是虚像，是正立的还是倒立的。

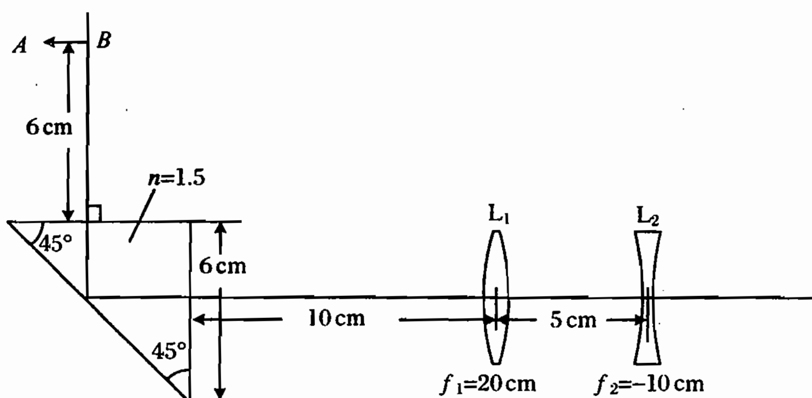


图 6.92　例 6.26 中的光学系统成像

解　三棱镜反射成像，但全反射三棱镜的成像情况不同于平面镜。可根据逐次成像计算棱镜的成像。

（1）对于三棱镜，第一次成像是通过水平面的折射，像距为 $s_1' = -ns = -9$ cm，是虚像，在水平面上方。第二次成像，是反射面成像，在对称位置，即距离竖直面 $6 + 9 = 15$(cm)处。第三

次成像，是竖直平面折射成像，物距为 15 cm，物方为玻璃，成像在空气中，像距为 $s_3'=-s_3/n=-10$ cm，是虚像，在竖直平面的左侧。之后依次经两透镜成像。

第四次成像，物距为 $s_4=20$ cm，经 L_1 后在无穷远处成像。

第五次成像，会聚于 L_2 的像方焦平面处，像距为 $s_5'=-10$ cm，为虚像。

(2) 计算横向放大率：

$$V=\left[-\frac{1\times(-9)}{1.5\times 6}\right](+1)\left[-\frac{1.5\times(-10)}{1\times 15}\right]\left(-\frac{-\infty}{20}\right)\left(-\frac{-10}{-\infty}\right)=+\frac{1}{2}$$

成正立的、缩小的虚像。

实际上，平面反射、折射时，都是成横向放大率为 1 的虚像，因而讨论横向放大率时，只针对透镜即可。

【例 6.27】（第 16 届全国中学生物理竞赛复赛试题） 两个焦距分别是 f_1 和 f_2 的薄透镜 L_1 和 L_2，相距为 d，被共轴地安置在光具座上。

(1) 若要求入射光线和与之对应的出射光线相互平行，问该入射光线应满足什么条件？

(2) 根据所得的结果，分别画出各种可能条件下的光路示意图。

解 (1) 本小题其实就是求出光具组的节点。所谓节点，就是光轴上的一对共轭点，经过节点的一对共轭光线相互平行。

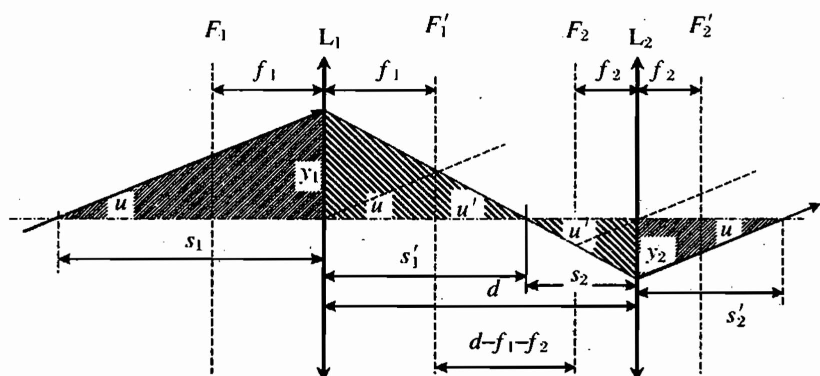


图 6.93 例 6.27 中的光具组

利用图 6.93，从中可以看出，光线与光轴的交点就是共轭的物像点。由两对相似三角形，可得到

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{s_2}{s_1'}=\frac{s_2'}{s_1}$$

进一步化为

$$\frac{s_2'}{s_2}\frac{s_1'}{s_1}=1$$

而利用两次成像的高斯公式，可得

$$\frac{s_1'}{s_1}=\frac{f_1}{s_1-f_1},\quad s_2=d-s_1'=d-\frac{s_1f_1}{s_1-f_1},$$

$$\frac{s_2'}{s_2}=\frac{f_2}{d-\dfrac{s_1f_1}{s_1-f_1}-f_2}=\frac{f_2(s_1-f_1)}{(d-f_2)(s_1-f_1)-s_1f_1}$$

最后可得到

$$\frac{f_1}{s_1 - f_1} \frac{f_2(s_1 - f_1)}{(d - f_2)(s_1 - f_1) - s_1 f_1} = 1$$

$$f_1 f_2 = ds_1 - df_1 - s_1 f_2 + f_1 f_2 - s_1 f_1$$

从而可解出

$$s_1 = \frac{df_1}{d - (f_2 + f_1)}$$

同理,有

$$s_2' = \frac{df_2}{d - (f_2 + f_1)}$$

(2) 若 $d > f_2 + f_1$,就是图 6.93 所示的情形。

若 $d = f_2 + f_1$,只有与光轴平行的光线才满足条件,如图 6.94 所示。

若 $d < f_2 + f_1$, $s_1 < 0$,节点在 L_1 的右侧,对 L_1 等效于虚物成像,光路如图 6.95 所示。

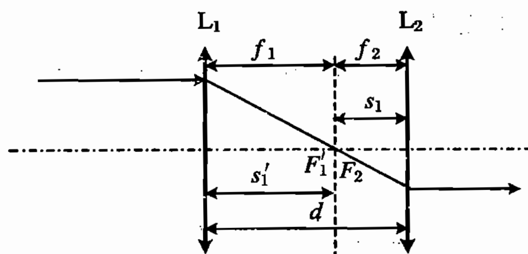


图 6.94 $d = f_2 + f_1$

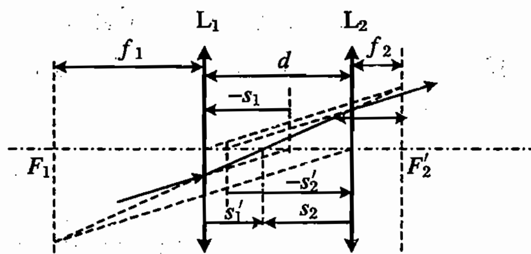


图 6.95 $d < f_2 + f_1$

【例 6.28】 沿直线移动的点光源经 $f = 30$ cm 的凸透镜成像。该点光源以与光轴成 60°的角穿过光轴时,像以 30°的角穿过光轴,试计算这一瞬间光源到透镜的距离。

解 可以将光源的运动分解为轴向的和垂轴的,则轴向的运动速度可由物像关系求得,垂轴的运动速度可由横向放大率求得。

物像关系为 $s' = \dfrac{sf}{s - f}$,像点运动由物点运动决定,即

$$\Delta s' = \frac{(s - f)f - sf}{(s - f)^2} \Delta s = -\frac{f^2 \Delta s}{(s - f)^2}$$

横向放大率为

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = \frac{f}{s - f}$$

由题中条件 $\tan 60° = \dfrac{y}{\Delta s}$, $\tan 30° = \dfrac{-y'}{\Delta s'}$,可得

$$\pm \frac{\tan 60°}{\tan 30°} = \frac{\dfrac{y}{\Delta s}}{\dfrac{-y'}{\Delta s'}} = \frac{s - f}{f} \frac{f^2}{(s - f)^2} = \frac{f}{s - f}$$

由此求出 $s = \dfrac{3f \pm f}{3}$。从而可知,当 $s = \dfrac{4f}{3}$时,成实像;当 $s = \dfrac{2f}{3}$时,成虚像。

【例 6.29】(第 17 届全国中学生物理竞赛预赛试题) 有一水平放置的平行平面玻璃板 H,

厚 3.0 cm，折射率为 $n=1.5$。在其下表面下 2.0 cm 处有一小物 S；在玻璃板上方有一薄凸透镜 L，其焦距为 $f=30$ cm，透镜的主轴与玻璃板面垂直；S 位于透镜的主轴上，如图 6.96 所示。若透镜上方的观察者顺着主轴方向观察到 S 的像就在 S 处，问透镜与玻璃板上表面的距离为多少？

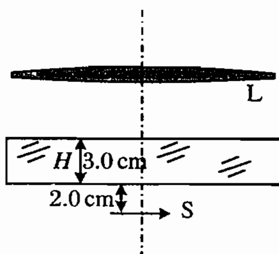


图 6.96　例 6.29 中的装置

解　对于平板下表面成像，像距为

$$s_1' = -\frac{n}{n_0}s_1$$

成虚像，在平面下方。

对于上表面成像，物距为

$$s_2 = d - s_1' = d + \frac{n}{n_0}s_1$$

像距为

$$s_2' = -\frac{n_0}{n}s_2 = -\frac{n_0}{n}\left(d + \frac{n}{n_0}s_1\right) = -\frac{n_0}{n}d - s_1$$

此像到下表面的距离为 $s' = d + s_2' = d - \frac{n_0}{n}d - s_1$。因而相对于原物，所成的像向像方移动的距离为

$$\Delta = s_1 + s' = d - \frac{n_0}{n}d = \left(1 - \frac{n_0}{n}\right)d$$

对于本题，是平行平板成像，像向上的移动距离为

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)d = 1\ \text{cm}$$

即经平板后，在下表面之下 1 cm 处成虚像。

设透镜到平板上表面的距离为 x。对于透镜，前面所成的像是实物，物距为 $s_3 = 4 + x$，而经透镜所成的像是虚像，像距为 $s_3' = -(5+x)$。由高斯公式，得

$$\frac{1}{4+x} + \frac{1}{-(5+x)} = \frac{1}{30}$$

整理后得到

$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

解得

$$x = 1,\ -10\quad (\text{cm})$$

显然只能有 $x = 1$ cm。

【例 6.30】（第 18 届全国中学生物理竞赛复赛试题）　设有一放在空气中的玻璃棒，其折射率为 $n=1.5$，中心轴线长为 $L=45$ cm，一端是半径为 $R_1=10$ cm 的凸球面。

(1) 要使玻璃棒的作用相当于一架理想的天文望远镜（使主光轴上无限远处的物成像于主光轴上无限远处的望远系统），取中心轴线为主光轴，玻璃棒的另一端应磨成什么样的球面？

(2) 对于这个玻璃棒，由无限远处物点射来的平行入射光束与玻璃棒的主光轴成小角度 φ_1 时，从棒射出的平行光束与主光轴成小角度 φ_2，求 φ_2/φ_1（此比值等于此玻璃棒望远系统的视角放大率）。

解　(1) 第一面的像方焦点与第二面的物方焦点重合，则满足望远系统的条件，如图 6.97 所示。

由

$$f_1' = \frac{n}{\Phi_1} = \frac{n}{\frac{n-1}{R_1}} = 30\ \text{cm}, \quad f_2 = \frac{n}{\Phi_2} = \frac{n}{\frac{1-n}{R_2}} = 15\ \text{cm}$$

解得

$$R_2 = -5\ \text{cm}$$

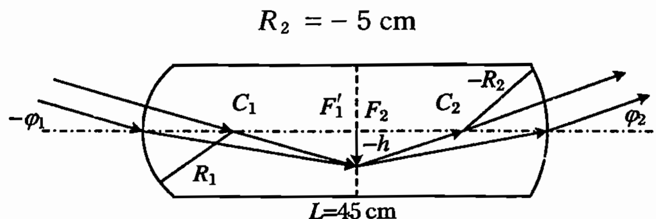


图 6.97　例 6.30 中的玻璃棒

(2) 因为两侧的折射率不等，所以通过光心的光线也发生折射，沿法线（直径）入射的光线方向不变，而且无穷远处的物体成像于像方焦平面处。由 $\varphi_1 \approx \frac{h}{f_1' - R_1}$，$\varphi_2 \approx \frac{h}{f_2 - (-R_2)}$，得到

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \approx \frac{f_1 - R_1}{f_2 + R_2} = \frac{20}{10} = \frac{2}{1}$$

【例 6.31】（第 18 届全国中学生物理竞赛预赛试题）　一束平行光沿薄平凸透镜的主光轴入射，经透镜折射后，会聚于透镜 $f = 48$ cm 处，透镜的折射率为 $n = 1.5$。若将此透镜的凸面镀银，物置于平面前 12 cm 处，求最后所成像的位置。

解　对于平凸透镜，平行光自平面一方入射，在平面处不折射，会聚点就是球面的像方焦点，即

$$\frac{1}{f} + \frac{n}{\infty} = \frac{1-n}{-r}$$

所以球面半径 $r = f/(n-1) = 2f$。

镀银后，球面反射镜的焦距 $f_0 = r/2 = f$。共有三次成像过程。第一次为透镜成像，有

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{48}$$

解得 $s_1' = -16$ cm。

第二次为球面反射成像，物距为 $s_2 = 16$ cm，像距为

$$s_2' = \frac{s_2 f_0}{s_2 - f_0} = -24\ \text{cm}$$

第三次，物距为 $s_3 = 24$ cm，像距为

$$s_3' = \frac{s_3 f}{s_3 - f} = -16\ \text{cm}$$

成虚像，在球面的右侧。

也可以用光焦度计算，镀银薄透镜的光焦度为成像过程中光所经历的三个面的光焦度之和。由于平凸透镜的焦距为 $f = 48$ cm，而平面的光焦度为 0，所以透镜的光焦度即为球面的光焦度，即

$$\Phi = \frac{1-n}{-r} = \frac{1}{f}$$

所以球面半径 $r=f/(n-1)=2f$。

将镀银透镜视为由三个折射面构成的光具组，光焦度为

$$\Phi_0=\frac{n-1}{0}+\frac{-2n}{-r}+\frac{1-n}{0}=\frac{1}{f_0}=\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}$$

所以

$$s'=\frac{sf_0}{s-f_0}=-16\ \text{cm}$$

像距是负值，说明成虚像，在球面的右侧距球面 16 cm 处。

【例 6.32】（第 20 届全国中学生物理竞预赛试题） 两个薄透镜 L_1 和 L_2 共轴放置，如图6.98所示。已知 L_1 的焦距为 $f_1=f$，L_2 的焦距为 $f_2=-f$，两透镜间的距离也为 f。小物体位于物面 P 上，物距为 $u_1=3f$。

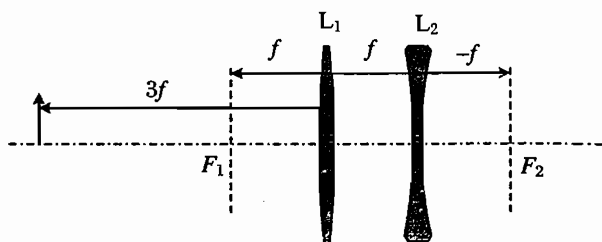


图 6.98 例 6.32 中的装置

（1）小物体经这两个透镜所成的像在 L_2 的______边，到 L_2 的距离为______，是______像（虚或实）、______像（正或倒），放大率为______。

（2）现在把两透镜位置调换，若还要给定的原物体在原像处成像，两透镜作为整体应沿光轴向______边移动距离______。这个新的像是______像（虚或实）、______像（正或倒），放大率为______。

解 （1）用作图法，可知小物体经这两个透镜所成的像在 L_2 的右边，到 L_2 的距离为 f，是倒立实像，放大率为 -1。

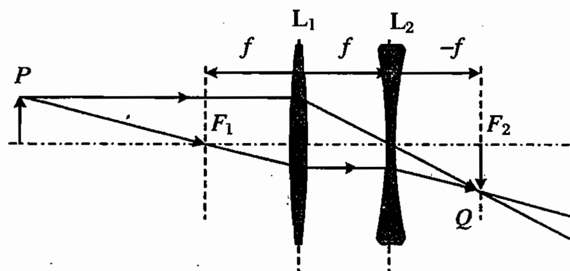


图 6.99 作图法

（2）这样的问题只好通过逐次成像法解决。设第一次成像时，物距为 s_1，算得

$$s_1'=\frac{s_1(-f)}{s_1+f}$$

第二次成像时，物距为

$$s_2=f-s_1'=f+\frac{s_1f}{s_1+f}=\frac{2s_1f+f^2}{s_1+f}$$

像距为

$$s_2'=\frac{s_2f}{s_2-f}=\frac{\frac{2s_1f+f^2}{s_1+f}f}{\frac{2s_1f+f^2}{s_1+f}-f}=\frac{2s_1f+f^2}{s_1}$$

按题目要求，应有

$$s_1+f+s_2'=5f$$

$$s_1+f+\frac{2s_1f+f^2}{s_1}=5f$$

$$s_1=f$$

所以整体向左移动 $2f$，此时像在像方，必为实像。由于 $s_1' = \frac{s_1(-f)}{s_1+f} = -\frac{f}{2}$，$s_2 = \frac{3f}{2}$，$s_2' = 3f$，算得横向放大率为

$$\left(-\frac{-1/2}{1}\right)\left(-\frac{3}{3/2}\right) = -1$$

仍为倒立的实像，如图 6.100 所示。

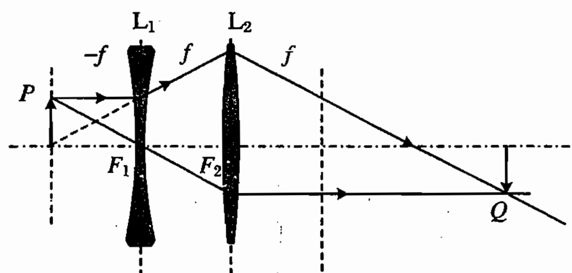


图 6.100

【例 6.33】(第 21 届全国中学生物理竞赛复试题）　目前，大功率半导体激光器的主要结构形式是由许多发光区等距离地排列在一条直线上的长条状，通常称为激光二极管条，但这样的半导体激光器发出的是很多束发散光束，光能分布很不集中，不利于传输和应用。为了解决这个问题，需要根据具体应用的要求，对光束进行必要的变换(或称整形)。如果能把一个半导体激光二极管条发出的光变换成一束很细的平行光束，对半导体激光的传输和应用将是非常有意义的。为此，有人提出了先把多束发散光会聚到一点，再变换为平行光的方案，其基本原理可通过如下所述的简化了的情况来说明：

如图 6.101 所示，S_1，S_2，S_3是等距离(h)地排列在一直线上的三个点光源，各自向垂直于它们的连线的同一方向发出半顶角为 $\alpha = \arctan(1/4)$ 的圆锥形光束。请使用三个完全相同的、焦距为 $f = 1.50h$、半径为 $r = 0.75h$ 的圆形薄凸透镜，经加工组装成一个三者在同一平面内的组合透镜，使三束光都能全部投射到这个组合透镜上，且经透镜折射后的光线能全部会聚于 z 轴(以 S_2为起点，垂直于三个点光源的连线，且与光束中心线方向相同的射线)上距离 S_2为 $L = 12.0h$ 处的 P 点。(加工时可对透镜进行外形的改变，但不能改变透镜的焦距。)

(1) 求出组合透镜中每个透镜光心的位置；

(2) 说明对三个透镜应如何加工和组装，并求出有关数据。

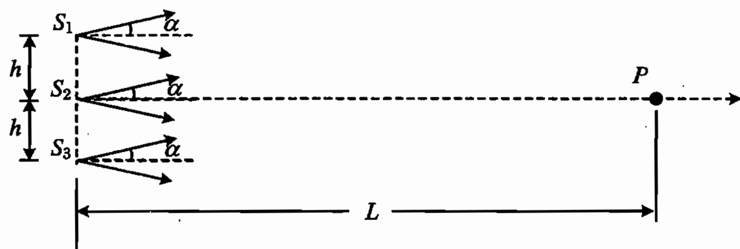


图 6.101　例 6.33 中的光路

解　因为物像之间的轴向距离相等，所以对三个透镜来说，物距、像距分别相等，但横向位置不同，因此，三个透镜的光轴应当错开，可利用横向放大率确定两侧透镜的轴线位置，如图 6.102所示。

(1) 由于 $s' + s = 12h$，$f = 1.5h$，根据$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$，可算得

$$s = 3(2 \pm \sqrt{2})h$$

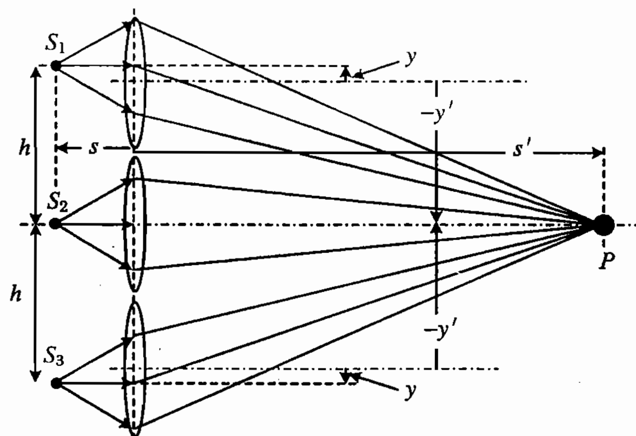


图 6.102　例 6.33 中的三个透镜

当物距较大时，距光源较远，不同光源发出的光将射到同一个透镜上，这样就不能使其汇聚到同一点，所以采用小的物距，使每束光只射到一个透镜上，即取

$$s = 3(2-\sqrt{2})h = 1.76h$$

设 S_1 到其透镜轴线的距离为 y，所成的像到其透镜轴线的距离为 y'，由于横向放大率

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{3(2+\sqrt{2})}{3(2-\sqrt{2})} = 3+2\sqrt{2}$$

而 $y'+y=h$，从而可得

$$y = \frac{h}{4+2\sqrt{2}} = 0.15h$$

第一个透镜的光心在 S_1 下 $0.15h$ 处，即在中心轴线上 $0.85h$ 处，下边的透镜对称地配置。

(2) 在透镜平面处，光斑的大小为

$$\Phi = 2s\tan\alpha = \frac{3(2-\sqrt{2})}{2}h \approx 0.88h$$

而相邻光源间的距离为 h，说明在此处光束没有重叠，而上下两透镜的光轴偏离光源轴线$0.15h$，则上下两透镜的半径至少为 $0.15h+0.44h=0.59h$，但靠近中间光轴的部分要切割掉一部分，以免进入中间的光斑区域。

比较好的组合方式是每个透镜的边缘都比光斑的边缘略大一些，同时切割之后相邻透镜的接触部分长度相等，这样黏结起来很牢固，图 6.103 是一种切割与组装方法。

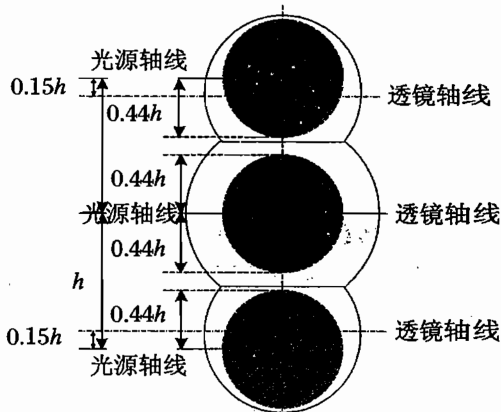


图 6.103　透镜的切割与组装

【例 6.34】(第 24 届全国中学生物理竞赛预赛试题)　如图 6.104 所示，L 是一焦距为 f 的薄凸透镜(F 与 F' 为其焦点)。在透镜的右侧焦点 F' 处放置一曲率半径大小为 R 的球面反射镜(其顶点位于 F' 处)，透镜和球面镜组成一组对称的光学系统。在透镜 L 的左侧光轴上有限远

处有一发光点 P,它发出的傍轴光线经此光学系统后,恰好成像在 P 点。试在下面第一和第二小题中填空,在第三小题中作图。

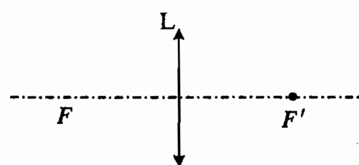


图 6.104　例 6.34 中的装置示意图

(1) 若球面镜为凹面镜,则 P 点到透镜的距离等于______;若球面镜为凸面镜,则 P 点到透镜的距离等于______。

(2) 若将一短细杆垂直于光轴放置,杆的下端位于 P 点,则此细杆经上述光学系统所成的最后的像的大小与物的大小之比对于凹面镜等于______,对于凸面镜等于______。

(3) 若球面镜的半径大小 $R=2f$,试按作图法的规范要求,画出第二问中短杆对于上述光学系统逐次成的像及成像光路图。

解　这是一个自准直光学系统,光线向球面的中心会聚。

(1) $s=\dfrac{-f(f-R)}{R}$;$s=\dfrac{f(f+R)}{R}$。

(2) $-1,-1$。

(3) 成像作图法如下:利用焦平面,可方便地确定任意入射光折射、反射后的方向,如图 6.105和图 6.106 所示。

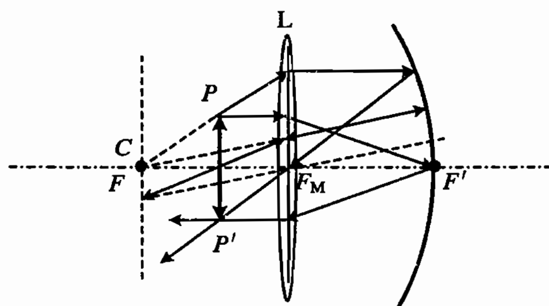


图 6.105　凹面镜

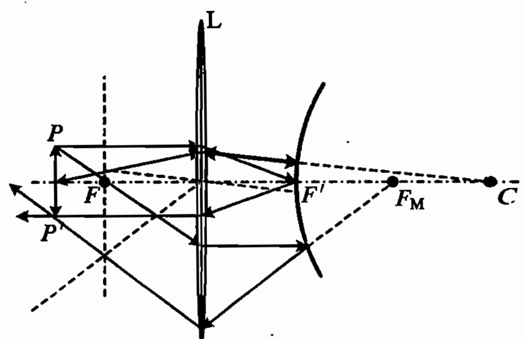


图 6.106　凸面镜

【例 6.35】(第 27 届全国中学生物理竞赛复赛试题)　设正午时太阳的入射光与水平面的夹角为 $\theta=45^\circ$。有一座房子朝南的墙上有一个直径为 $W=10$ cm 的圆窗,窗口中心距地面的高度为 H。试设计一套采光装置,使得正午时刻太阳光能进入窗口,并要求进入的光为充满窗口、垂直墙面且光强是进入采光装置前 2 倍的平行光。可供选用的光学器件如下:一个平面镜、两个凸透镜、两个凹透镜;平面镜的反射率为 80%,透镜的透射率为 70%,忽略透镜表面对光的反射。要求从这些器件中选用最少的器件组成采光装置。试画出你所设计的采光装置中所选器件的位置及该装置的光路图,并求出所选器件的最小尺寸和透镜焦距应满足的条件。

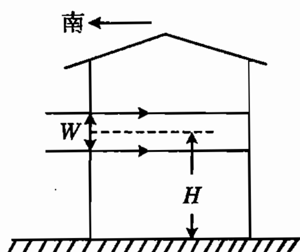


图 6.107　例 6.35 的示意图

解　平行光通过某一截面的光功率(也叫光通量,或能流)正比于截面面积。光强也称作能流密度,是指单位面积的光功率或能流。平行光束中各点的光强相等,如果在不损失能量的前

提下设法将一束平行光的截面减小为原来的1/2,则光强增为原来的2倍。

截面面积为 S 的望远镜的结构可以使入射的平行光束仍以平行方式出射,改变光束截面大小的方式有很多种,其中长短焦距的凸透镜组合与长焦距凸透镜与短焦距凹透镜组合是常见的方式,如图6.108所示。

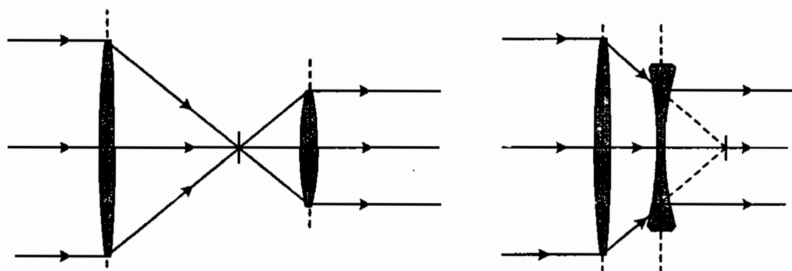


图6.108 望远镜的光路

由于还要将45°的入射光改为水平方向的平行光,所以还要用到平面反射镜,将反射镜的镜面与水平方向的夹角成22.5°即可。

光经过三个光学元件后,光通量变为原来的 $\eta = 80\% \times 80\% \times 70\% = 44.8\%$。若窗孔面积记为 S,这也就是小孔径透镜的面积,记大孔径透镜的面积为 S_0,则

$$\eta I_0 S_0 = IS$$

得到

$$S_0 = \frac{IS}{\eta I_0}$$

要求 $I = 2I_0$,则 $S_0 = 2S/0.448 \approx 2.11^2 S$,即大孔径凸透镜的直径为 $2.11 \times W = 21.1\,(\text{cm})$。反射镜可选任意形状,只要比大孔径透镜投影的椭圆面积大就行。

配置方式见图6.109和图6.110。需要注意的是,使光束中心与窗口中心对齐。

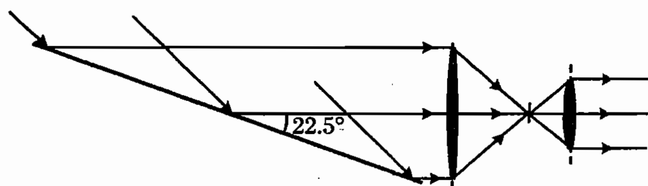


图6.109 配置1

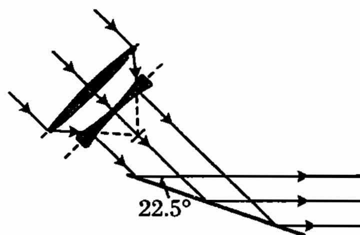


图6.110 配置2

6.6 焦距的实验测量

焦距是球面镜、透镜等光学元件最基本的光学参数。精确地测量焦距是光学课程学习的基本训练内容之一。

6.6.1 正镜焦距的测量

焦距为正值的球面镜和透镜，可以方便地成实像，因而可以直接测量其焦距。

1. 凹面镜

如图 6.111 所示，在不透光的纸板上开一个小孔，使光透过小孔照射到凹面镜上。保持纸面法线与凹面镜的对称轴平行，并前后移动纸板。如果小孔恰好位于球心，则所有光线将沿着球面法线射向球面，并沿原路返回，会聚于小孔处。这种情况当然不便于观察到。如果纸板位于球心，而小孔稍稍偏离球面的轴线，则小孔的像也成在纸面上，且物、像相对于球面的轴线对称。对称中心就是球心。这样就可以测量出球面的半径，进而得到凹面镜的焦距。

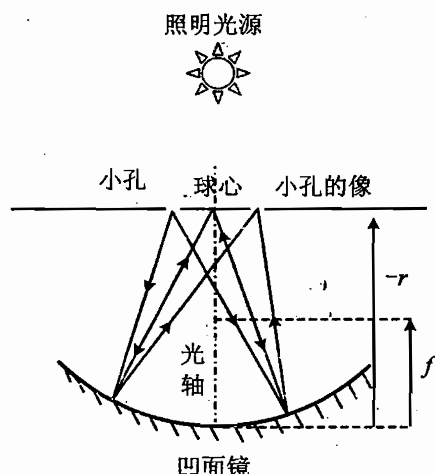


图 6.111 用自准直法测凹面镜的焦距

在上述测量中，当物平面位于球心处且与光轴垂直时，经过球心入射的光线原路返回并在原处成像，因而这种方法称作“**自准直法**”。

2. 凸透镜

(1) 自准直法

也可以用自准直法测量凸透镜的焦距，如图 6.112 所示，在凸透镜的右侧放置一垂轴平面镜，在透镜的左侧，光源和透镜之间放置一开有小孔的垂轴纸板。

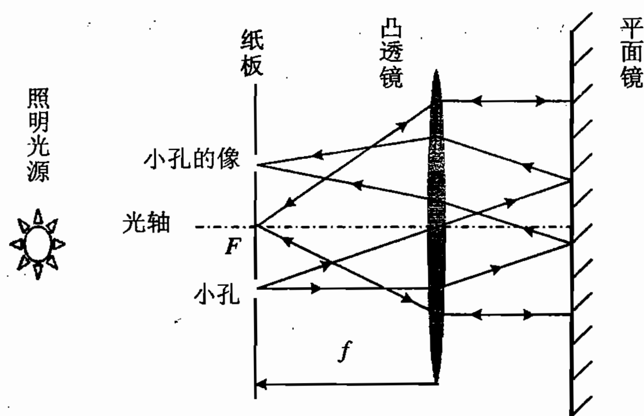


图 6.112 用自准直法测凸透镜的焦距

当小孔位于焦点时，发出的光束经透镜后成为平行于光轴的光束，该光束正入射到平面镜，反射后的光束仍与光轴平行，则经透镜后仍会聚于交点处。

而当小孔位于透镜焦平面上光轴之外时，必成像于轴线另一侧的对称位置。

(2) 共轭法

由于物像之间是共轭的，在实物成实像的情形下，将物置于像平面处，则在原来的物平面处成像。

如图 6.113 所示，固定物平面，使凸透镜沿轴线移动，并根据情况调整接收屏到物平面的距

离 D。如果能够在屏上观察到清晰的像，则固定物平面和像平面。继续移动透镜，直到在接收屏上观察到第二次成像。记接收屏到物平面的距离为 D，两次成像时透镜的间距为 d。

两次成像过程中的物距、像距之间有以下关系：

$$s_1' = s_2, \quad s_2' = s_1$$

$$s_1 + s_1' = s_2 + s_2' = D$$

$$s_1' - s_1 = s_2 - s_2' = d$$

$$s_1 = \frac{D-d}{2}$$

$$s_1' = \frac{D+d}{2}$$

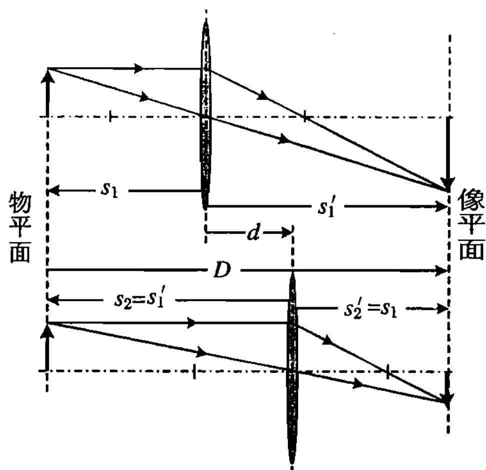


图 6.113　用共轭法测凸透镜的焦距

由透镜的高斯公式

$$\frac{f}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

可得到

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

这种方法称作“共轭法”。

6.6.2　负镜焦距的测量

负镜指凸面镜、凹透镜，它们的焦距是负值，无法对实物直接成像，因而不能直接测量其焦距。

1. 凹透镜

(1) 物像法

如图 6.114 所示，先使物 Q 经一凸透镜成实像于 Q'，然后在凸透镜的右侧共轴放置待测的凹透镜，得到实像 Q''。由图可以看出，在逐次成像过程中，Q' 是凹透镜的虚物，而 Q'' 为虚物经凹透镜所成的实像。测量两次成像的位置到凹透镜的距离，即得 $-s, s'$。

由物像公式

$$\frac{f}{s'} + \frac{f}{s} = 1$$

可以得到凹透镜的焦距为

$$f = \frac{ss'}{s+s'}$$

(2) 自准直法

如图 6.115 所示，先让点光源 Q 经凸透镜成实像于 Q' 点，测得像距 s'。然后，在凸透镜与 Q' 点之间放置待测的凹透镜，使其与凸透镜共轴，并在凹透镜的右侧与光轴垂直处放置平面镜。移动凹透镜到一个合适的位置，使 Q 经过整个光学系统后所成的像 Q'' 与其自身重合。测得此时凹透镜与凸透镜间的距离 d。

既然在原位成像，则射向反射镜的光必定沿其法线，即平行于光轴，可见射向待测凹透镜的

光线是瞄向其物方焦点的，则 Q' 点就是凹透镜的物方焦点。因此，凹透镜的焦距为

$$f = d - s'$$

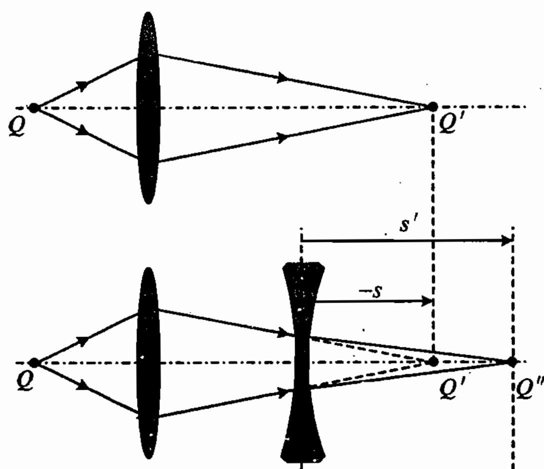


图 6.114　用物像法测凹面镜的焦距

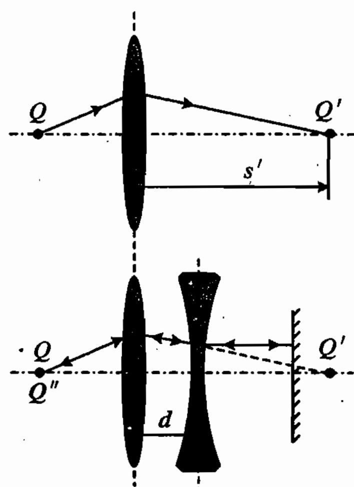


图 6.115　用自准直法测凹透镜的焦距

2. 凸面镜

如图 6.116 所示，在凸面镜之前放置一凸透镜，如果凸透镜的像恰位于凸面镜的球心，则光线按原路返回在物所在的位置成一个等大小的倒立实像。这也是一种测凸面镜焦距的自准直方法。

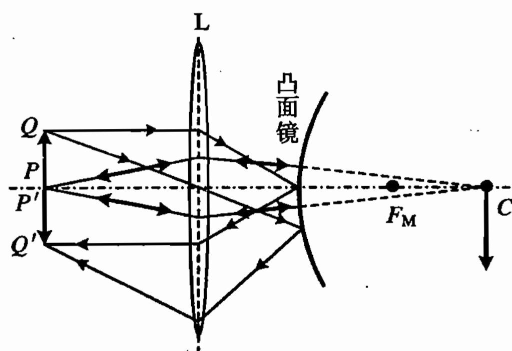


图 6.116　用自准直法测凸透镜焦距

6.7　非傍轴光成像

球面镜、薄透镜等成像元件对于傍轴光线才能很好地保持同心光束的同心性不变，即要求光线束的发散角不能很大，因而限制了成像过程中的光通量。本节讨论非傍轴光成像的条件以及对非傍轴光成像的透镜。

6.7.1 透镜组的阿贝正弦条件

如图6.117所示，$P'Q'$为傍轴小物PQ的像，设该像已经消除了球差，光具组物方、像方的折射率分别为n，n'。其中各条光线满足以下条件：PS平行于光轴，$PN \parallel QM$，$PR \perp QM$，$P'R' \perp M'Q'$（R，R'为垂足）。由于$P'Q'$为傍轴小像，所以有$\overline{F'Q'} \approx \overline{F'P'}$，$\overline{G'R'} \approx \overline{G'P'}$。又由于物像间的等光程性，所以有$\widehat{QMM'Q'} = \widehat{QTT'Q'}$，$\widehat{PNN'P'} = \widehat{PSS'P'}$。由$PS$平行于光轴，$PN \parallel QM$，有

$$\widehat{PSS'F'} = \widehat{QTT'F'}, \widehat{PNN'G'} = \widehat{RMM'G'}$$

$$\begin{aligned}\overline{QR} &= \widehat{QMM'Q'} - \widehat{RMM'G'} - \overline{G'Q'} \\ &= \widehat{QTT'Q'} - \widehat{PNN'G'} - \overline{G'R'} + \overline{Q'R'} \\ &= \widehat{QTT'F'} + \overline{F'Q'} - \widehat{PNN'P'} + \overline{Q'R'} \\ &= \widehat{PSS'F'} + \overline{F'P'} - \widehat{PNN'P'} + \overline{Q'R'} \\ &= \widehat{PSS'P'} - \widehat{PNN'P'} + \overline{Q'R'} \\ &= \widehat{PNN'P'} - \widehat{PNN'P'} + \overline{Q'R'} = \overline{Q'R'}\end{aligned}$$

即$n\overline{QR} = n'\overline{Q'R'}$，而$\overline{QR} = \overline{PQ}\sin u$，$\overline{Q'R'} = \overline{P'Q'}\sin(-u')$。记物高$\overline{PQ} = y$，像高$\overline{P'Q'} = -y'$，则有

$$ny\sin u = n'y'\sin u' \tag{6.37}$$

式(6.37)称作**阿贝正弦条件**。

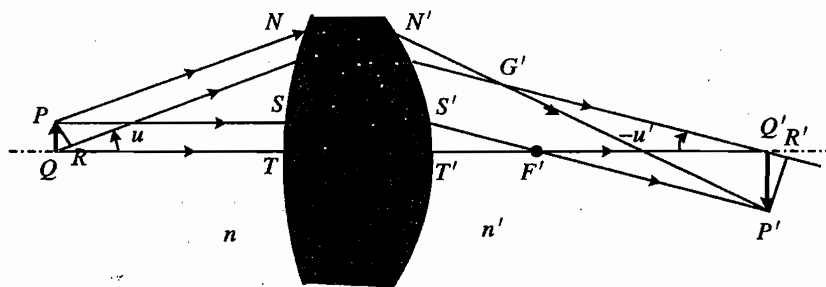


图6.117 非傍轴光线成像

阿贝正弦条件是在轴上已消除球差的前提下，傍轴物点的一个大口径光束成像的充要条件，即阿贝正弦条件可以不要求光线满足傍轴条件。

6.7.2 球形齐明透镜与齐明点

满足阿贝正弦条件的一对共轭点，称作**齐明点**。

例如，折射率为n的球体，轴上有一物点Q，像方的折射率为n'（图6.118），从Q点发出的一条光线在球面上的入射点为M。由于像方的折射光线是发散的，因而只可能成虚像。将折射光线MN反向延长后，与光轴交于Q'点。由于Q'点为虚像点，所以物像间的光程为$n\overline{QM} - n'\overline{MQ'}$。

图 6.118　透明球的齐明点

如果满足关系$\overline{QC}=\frac{n'}{n}r$，$\overline{Q'C}=\frac{n}{n'}r$，则有$\frac{\overline{QC}}{r}=\frac{n'}{n}=\frac{r}{\overline{Q'C}}$，于是$\triangle QCM \backsim \triangle MQ'C$，从而有

$$\frac{\overline{QM}}{\overline{MQ'}}=\frac{\overline{QC}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{QC}}{r}=\frac{n'}{n}$$

$$n\,\overline{QM}=n'\,\overline{MQ'}$$

Q，Q'间的光程为$n\,\overline{QM}-n'\overline{MQ'}=0$，即对于任意的 M 点，物像间都是等光程的。这样的一对物像点称作折射球面的一对齐明点。

同时，由于

$$\sin u=\frac{\overline{MH}}{\overline{QM}},\quad \sin u'=\frac{\overline{MH}}{\overline{MQ'}}$$

而

$$\frac{\sin u}{\sin u'}=\frac{\overline{MQ'}}{\overline{QM}}=\frac{n}{n'}$$

$$\frac{\overline{AQ'}}{\overline{AQ}}=\frac{r+\overline{CQ'}}{r+\overline{CQ}}=\frac{1+\frac{n}{n'}}{1+\frac{n'}{n}}=\frac{n}{n'}$$

设位于齐明点的物像高度分别为 y，y'，则横向放大率为$\frac{y'}{y}=\frac{n\,\overline{AQ'}}{n'\overline{QA}}=\frac{n^2}{n'^2}$，所以有

$$\frac{\sin u}{\sin u'}=\frac{\overline{AQ'}}{\overline{AQ}}=\frac{n'y'}{ny},\quad 即\quad ny\sin u=n'y'\sin u'$$

这正是阿贝正弦条件。

实际成像时，当然不可能将物置于玻璃球之内的齐明点处，而是采用“油浸物镜”。如图 6.119所示，将一滴折射率与玻璃相等的透明油滴在样品上，再将玻璃半球浸入油滴中，若样品位于球面的一个齐明点处，则成像于另一齐明点处。高倍的显微物镜的工作原理正是如此。

如图 6.120 所示的弯月形透镜是另一种齐明透镜。其中大球面 Σ_1 的球心为 C_1，位于 C_1 的物点 Q 经球面Σ_1 折射后仍成虚像于 C_1 点，而该虚像是小球面 Σ_2 的实物，处于折射率为 n 的介质中。如果 C_1 恰好是球面 Σ_2 的一个齐明点，则在另一齐明点处成像 Q'。

图 6.119　油浸物镜的齐明点

图 6.120　弯月形齐明透镜

6.7.3 齐明透镜组

齐明透镜主要用作高倍显微物镜。由于每个齐明透镜的齐明点的位置是确定的，而每次成像的横向放大率也是确定的，不可能很大，所以为了获得较高的放大倍数，往往要采用齐明透镜组，每个透镜所成的像都恰好位于下一个透镜的齐明点处，如图 6.121 所示。这样一方面也已获得较高的放大倍数，同时也可充分利用进入透镜的光通量，使像的亮度尽量高。由于齐明透镜每次成像都使像距进一步增大，光束的发散角进一步减小，所以，经过几个齐明透镜之后，成像光束已满足傍轴条件，后续的成像过程，用普通的球面透镜即可保证像的精度和亮度。

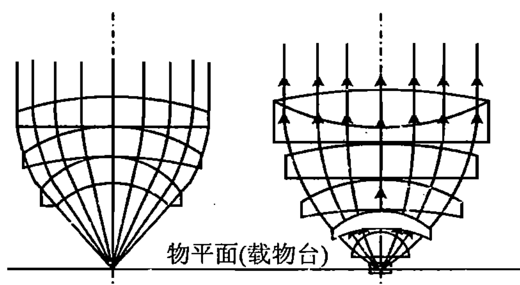


图 6.121　齐明透镜组的结构示意图

第 7 章　光学成像仪器

7.1 眼　　睛

7.1.1 眼睛的光学特性

眼睛的解剖学结构如图 7.1 所示，眼球的最外部是一层坚韧的包膜，前部是透明的角膜，其余不透明部分是巩膜。晶状体将眼球分为前后两个区域。前面的前房中充满水状液体，折射率为 1.336；之后是虹膜，虹膜的中心是瞳孔，孔径可在 1.4～8 mm 范围内调节。后面是黏性的玻璃体，折射率亦为 1.336；玻璃体之后是视网膜。视网膜上分布着视神经末梢，视神经细胞有圆柱状和圆锥状两种，圆柱细胞仅仅能分辨亮暗，而圆锥细胞则能分辨色彩和影像的细节。所有视神经集束后进入大脑，因而在视网膜上形成一个没有神经末梢的小区域，这是一个视觉盲区，称盲点或盲斑。图 7.2 是常用来验证盲点存在的图案。读者可闭上左眼，以右眼注视左侧的图形，并前后移动，则会在某一位置处发现右侧的图形消失，这是因为此时该图形恰成像于左眼的盲点处，同理可验证左眼盲点的存在。据此可以判断，右眼的盲点在晶状体光轴的左侧，左眼的盲点在光轴的右侧。

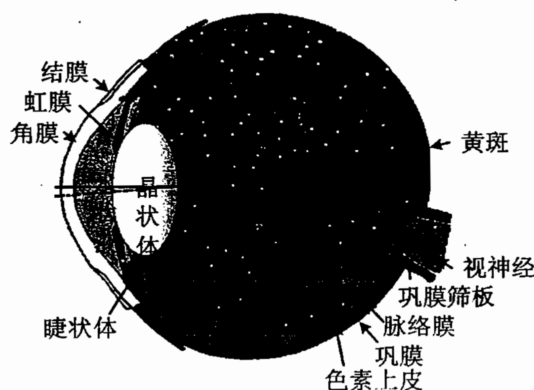


图 7.1　眼睛的结构



图 7.2　验证盲点存在的图案

盲点上方附近有一个黄色的扁圆斑，称作黄斑，黄斑中心有一个水平方向约 0.3 mm、竖直方向约 0.2 mm 的凹坑，称作中央凹。中央凹区域几乎全是圆锥细胞，因而是视觉最灵敏的区域。观察物体时，总是通过眼球的旋转，使像成在中央凹。因而，眼睛的光轴(解剖学对称轴)与视轴(通过中央凹与晶状体中心的轴线)是不重合的。

晶状体的外观犹如一个双凸透镜，是眼睛的成像元件，是由折射率不同的组织分层构成的，总的来说，晶状体的折射率约为 1.386。通过睫状体肌肉的伸缩，改变晶状体两侧球面的曲率

半径，从而可以将不同距离的物清晰地成像于视网膜上。因而晶状体等效于一个可变焦距的凸透镜。

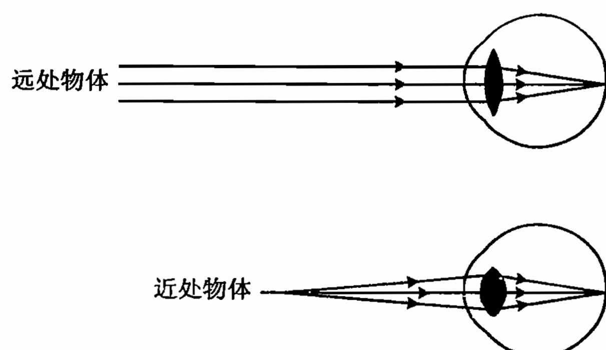


图.3　晶状体改变球面的曲率半径以观察不同距离的物体

晶状体的对称轴，即是眼睛的光轴。光轴的长度，即人眼的前后径约为 24.3 mm(成年人的平均值)。视网膜到光心的距离仅仅可以进行微小的调节。观察远处物体时，该距离最短，等于晶状体对无穷远处聚焦时像方的焦距；观察近处物体时，眼球的前后径略微增大。通常，人眼对物距为 25 cm 的物体很容易看清楚，所以该距离被称为**明视距离**，本书将明视距离记为 $s_0 = 25$ cm。

也可以用一个简单的光学系统表示人眼的结构，如图 7.4 所示，折射球面的曲率半径为 5.7 mm，物方焦距和像方焦距分别为 17.1 mm 和 22.8 mm。这种模型称作简化眼。

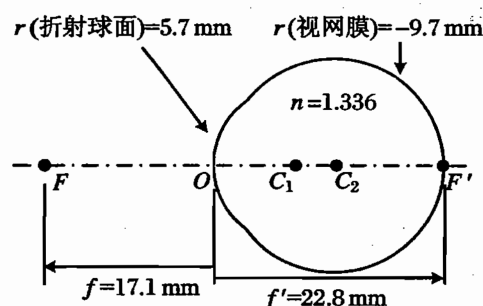


图 7.4　简化眼的光学参数

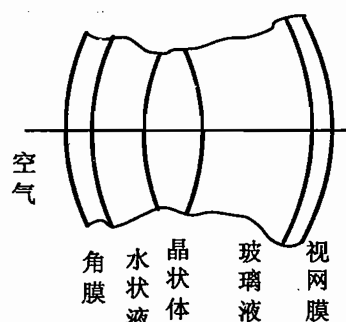


图 7.5　示意眼的光学参数

如果用更加准确的模型表示人眼，则其中应包括多个折射球面，如图 7.5 所示，这就是所谓的示意眼，示意眼的光学参数列在表 7.1 中。

表 7.1　示意眼的光学参数

<table>
<tr><th>名称</th><th>厚度 d(mm)</th><th>折射率</th><th>球面半径 r(mm)</th></tr>
<tr><td>角膜</td><td>0.5</td><td>1.376</td><td rowspan="4">7.7(空气-角膜)
6.8(角膜-水状液)
10.0(水状液-晶状体)
−6.0(晶状体-玻璃液)
−9.7(玻璃液-视网膜)</td></tr>
<tr><td>水状液</td><td>3.1</td><td>1.336</td></tr>
<tr><td>晶状体</td><td>3.6</td><td>1.386</td></tr>
<tr><td>玻璃液</td><td>17.2</td><td>1.336</td></tr>
</table>

7.1.2 视力的矫正

通过调节改变晶状体的焦距，正常的眼睛可以看清不同距离处的物体。以下定义远点和近点两个与视觉有关的参数。

1. 远点

当睫状肌松弛时，晶状体的曲率半径最大，焦距也最长，这时能够在视网膜上清晰成像的物体到眼睛的距离就是**远点**。

当物体在远点之外时，所成像的像距较短，如果眼睛的前后径较大，虽尽力调节，这时视网膜到晶状体的距离仍大于眼睛的焦距(就是这时的像距)，则视网膜上是模糊的像，因而远点之外的景物是难以分辨细节的，如图 7.6(a)所示。

医学上将远点在无限远处的眼睛作为正视眼，正视眼的像方焦点在视网膜上。

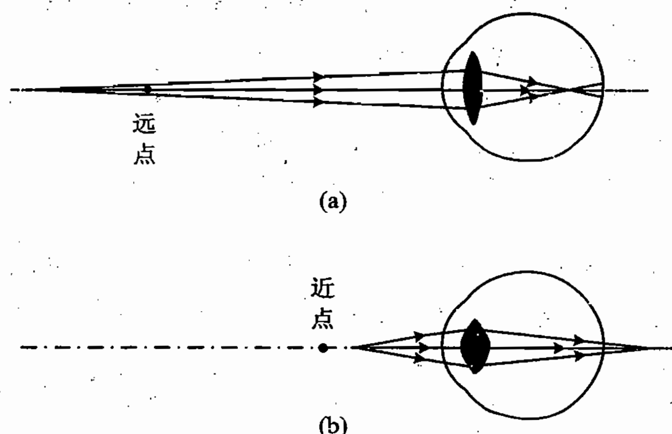


图 7.6　远点与近点

2. 近点

观察近处的物体，睫状肌收缩，压迫晶状体使其曲率半径变小，当肌肉收缩和晶体变形到达极限时，晶状体的曲率半径最小，焦距也最短，这时能够在视网膜上清晰成像的物体到眼睛的距离就是**近点**。

物体再移近，像距增大，超过眼睛最大的前后径，则所成的像在视网膜之外，难以看清，图 7.6(b)显示了物在近点之内成像的情形。

3. 近视及其矫正

所谓**近视**，就是眼球的径向变长，或角膜及晶状体的曲率半径变大，或眼内介质折射率异常。当物体较远时，所成的像在视网膜之前，如图 7.7 所示；只有物在有限远处，才能在视网膜上成像，即近视眼的远点不在无限远处。

要矫正近视，必须设法使无限远处的物移至该眼的远点处。为了做到这一点，可以在眼前加一个负透镜，使无限远处的物体在远点成一虚像即可。

例如，远点是 1 m 的近视眼，要戴焦距为 $f=-1\ \text{m}$ 的眼镜，其镜片的光焦度 $\Phi=-1\ \text{D}$，即须戴 100 度的近视镜。

4. 远视及其矫正

所谓远视，就是眼球的径向变短，或视网膜距晶状体太近。在睫状肌完全放松的状态下，无限远处的物体成像于视网膜之后，或者，要看清远处的物体，睫状肌也要收缩；在明视距离以内的物体，即使睫状肌收缩到极限，也成像于视网膜之后，愈加看不清楚，如图 7.8 所示。相比于正视眼，远视眼的近点太远。

要矫正远视，就必须设法将明视距离以内的物移至近点处。那就要在眼前加以个正透镜，使近处的物体在其近点成一虚像。

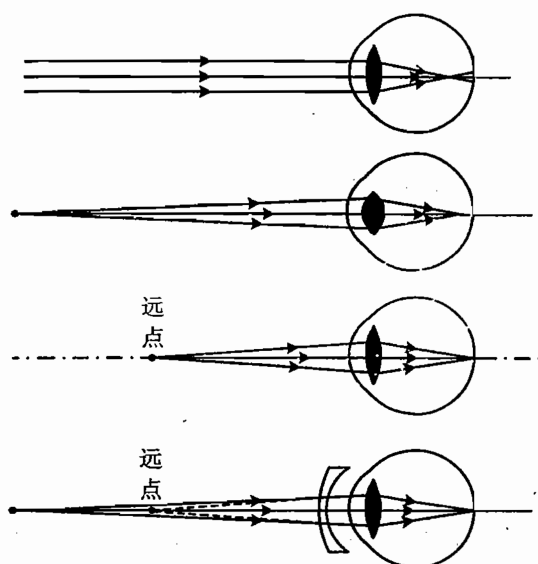


图 7.7 近视及其矫正

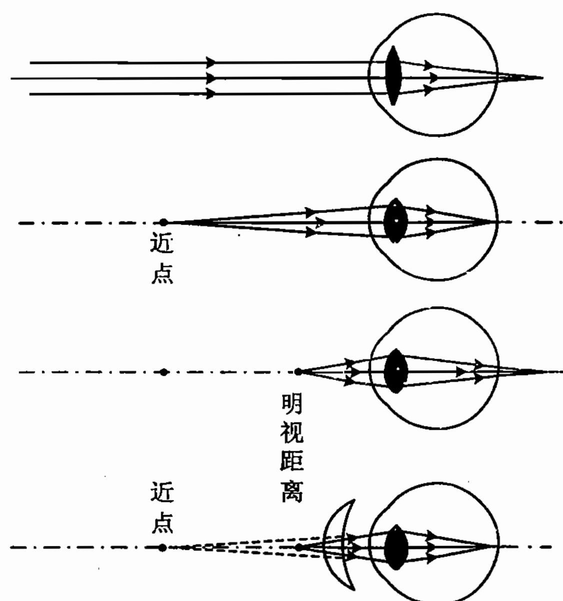


图 7.8 远视及其矫正

例如，对于近点是 2.5 m 的远视眼，只需将物距 $s = 0.25$ m 的物成虚像于 -2.5 m 即可，由此可算得透镜的焦距为

$$f = \frac{ss'}{s + s'} = \frac{-2.5 \times 0.25}{-2.5 + 0.25} = 0.278 \quad (\text{m})$$

镜片的光焦度 $\Phi = 3.6$ D，即须戴 360 度的远视镜。

7.2 目　　镜

目镜的作用是在明视距离处成一个虚像，便于眼睛观察，目镜的放大率大于 1。显微镜、望远镜的目镜通常有较复杂的结构，而放大镜则非常简单，往往只是一个双凸透镜。

7.2.1 放大镜

放大镜是一个凸透镜，当物位于放大镜的物方焦点之内时，可以成一个放大、正立的虚像，便于眼睛观察。当所成的虚像处在眼睛的明视距离处时，眼睛的观察效果较好。

如图 7.9 所示，眼睛直接观察高度为 y 的物体时，通常将其置于明视距离 s_0 处。此时物对眼的张角为

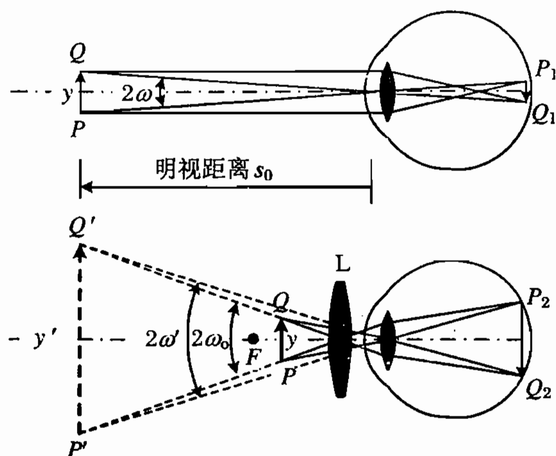


图 7.9　放大镜对物的成像

$$2\omega = \frac{y}{s_0}$$

放大镜就是一个凸透镜，用放大镜观察，则要求物在眼的明视距离处成一虚像。为了获得尽量大的放大率，常将物置于放大镜物方焦点的内侧靠近焦点处。物体在物方焦点内侧成一正立放大的虚像。此时物对透镜的张角和虚像对透镜的张角是同一个角，记作 $2\omega_0$，虚像对眼睛的张角记作 $2\omega'$，ω_0 与 ω' 是不相等的。但当物尽量靠近透镜的焦点，同时眼镜紧贴透镜时，像对眼睛的张角是最大的，这时 $2\omega_0$ 与 $2\omega'$ 基本相等（当然任何人都不可能以这种方式使用放大镜，所以 $2\omega'$ 只是用来作为--个指标，表示可能的最大张角）。虚像对眼的最大张角为

$$2\omega' = \frac{y}{s} \approx \frac{y}{f}$$

于是透镜的**角放大率**为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{s_0}{f} = \frac{25}{f} \tag{7.1}$$

短焦距透镜具有较大的放大率。但由于短焦距透镜的球面曲率半径较小，这类透镜往往无法满足傍轴条件，像差较大，同时孔径又很小，所以并不适用。单个透镜的放大率不能很大。可以用组合透镜，既可以使焦距很短，又没有像差，这类组合透镜称作**目镜**。

7.2.2　显微镜和望远镜中的目镜

在望远镜、显微镜等光学仪器中，整个光学系统通常可分为物镜和目镜两部分，它们的作用各不相同。使这两部分恰当地组合，才能得到良好的视觉效果。

物体通过物镜成一个实像，用眼睛直接观察实像是相当困难的。而且，如果物距很大，通常是成一个缩小的实像；物距很小，尽管可以成一个放大的实像，但往往放大倍数有限，所以还要使物镜所成的像经目镜再成一个正立放大的虚像。通过目镜观察物镜所成的像，与通过放大镜观察实物的原理是一样的。但目镜不是一个简单的放大镜，正如前面所指出的，单个放大镜的角放大率十分有限，而且会有像差。所以，实用的目镜都是经过专门设计的具有独特结构的透镜组。显微镜和望远镜的目镜的原理和结构都是一样的，下面就以各种显微目镜为例加以讨论。

这里介绍一下两种目镜——**惠更斯目镜和拉姆斯登目镜**。图 7.10 给出了其结构和主平面、焦平面的位置。

惠更斯目镜的焦点在目镜内部，因而只能用来观察物镜所成的位于目镜物方焦平面附近的实像。实际上，物镜所成的像对向场镜来说是虚物，该虚物经向场镜后成实像于接目镜的物方焦平面处，如图 7.11 所示。所以，如果要在惠更斯目镜的物平面上也放置叉丝或标尺，应当将

其放在接目镜的物方焦平面处。但是，由于叉丝或标尺仅仅经过接目镜成像，所以会有明显的色像差。

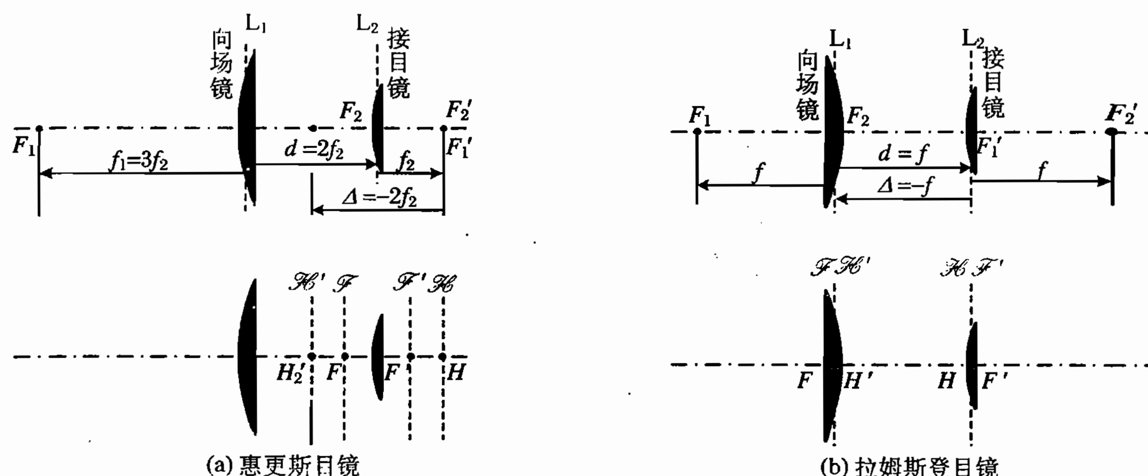


图 7.10　惠更斯目镜、拉姆斯登目镜的基平面

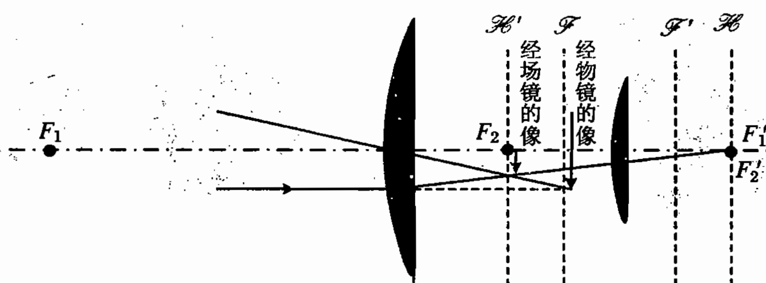


图 7.11　惠更斯目镜中的成像过程

拉姆斯登目镜的物方焦点在向场镜处，严格说来也只能观察像，但可以将其结构略作改变，使向场镜和接目镜的间距 $d=2f_2/3$，由此算得 $x_H=-2f_2/3, x'_H=-2f_2/3, f=f'=f_2$。这样目镜的物方焦点就前移到了向场镜之外 $2f/3$ 处，如图 7.12 所示，改进后的拉姆斯登目镜因而也可以直接观察实物。同时，为便于测量，可以在拉姆斯登目镜的物平面（即物方焦平面附近）上放置十字叉丝或标尺，观察时，叉丝或标尺与物镜所成的像一同放大，而不会像惠更斯目镜那样产生色像差。

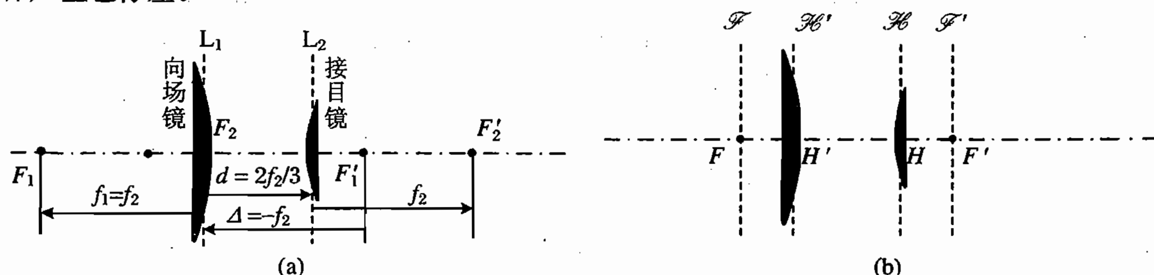


图 7.12　改进后的拉姆斯登目镜及其基平面

惠更斯目镜、拉姆斯登目镜是最简单的目镜。为了提高成像质量，高档目镜的结构要复杂得多。图 7.13 是惠更斯目镜和拉姆斯登目镜的简单改进型(称凯尔纳型)，接目镜由两片透镜组成，可以单独起到消色差的作用，使得惠更斯目镜中也可放置叉丝。

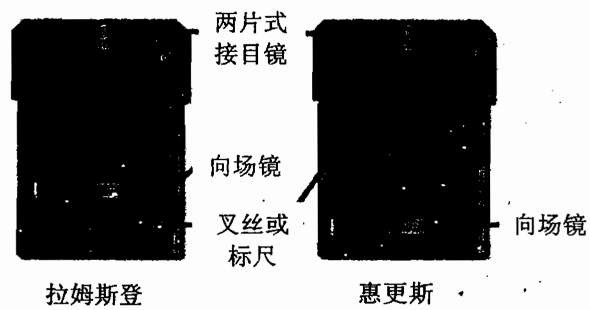


图 7.13 惠更斯目镜、拉姆斯登目镜的改进(凯尔纳型)

图 7.14 和图 7.15 中的目镜是三组式 Periplan 目镜，可以很好地消除各种像差和色差。

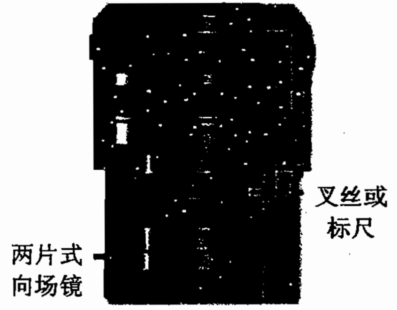


图 7.14 三组式 Periplan 目镜

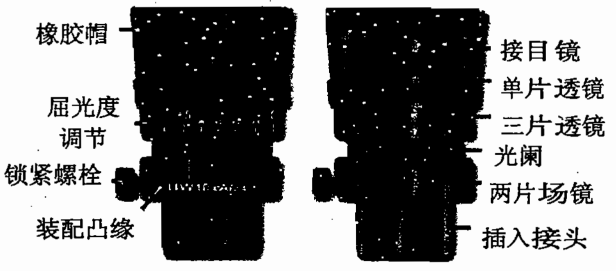


图 7.15 屈光度可调的 10× 消像差目镜

7.3 物　　镜

物镜用在照相机、望远镜、显微镜等光学仪器中，电影放映机和投影仪的镜头也是物镜。物镜的作用是成实像。

照相物镜对成像的清晰度和准确度要求最高，投影物镜的要求与照相物镜相同，而望远物镜则是简化的长焦距照相物镜。显微物镜则要求有尽量大的横向放大率，同时，由于是用来观察微小的对象，所以显微物镜的孔径都很小，尤其是高倍的显微物镜。

7.3.1 照相物镜

目前在照相机中使用的各类镜头有上百种，大多是精心设计、反复改进并经过长期应用的成熟产品，能够很好地消除各类像差和色差，并有尽可能大的光阑。图 7.16～7.23 列出了部分经典的照相物镜。

这些物镜有些是非对称式镜头，就是光圈前、后两方的光学结构彼此不对称。有些是对称式镜头，所谓对称式镜头，是指镜头中间设置光圈，在光圈前、后由相同的两组透镜以对称式结构组成。

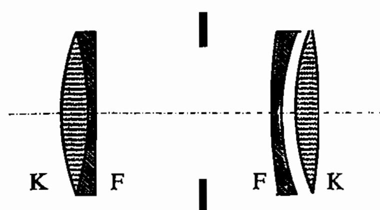
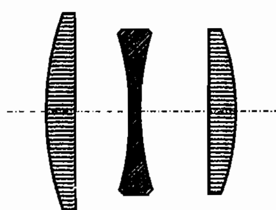


图 7.16　匹兹万物镜


图 7.17　柯克物镜

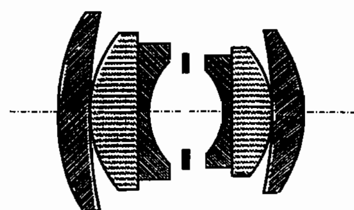
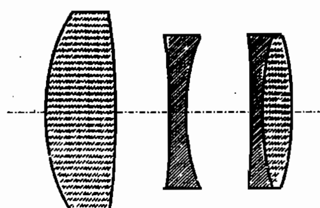
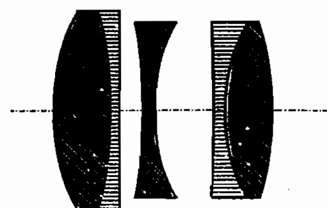
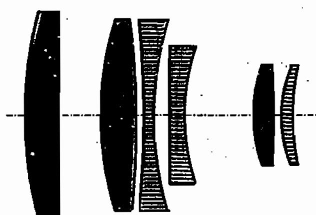
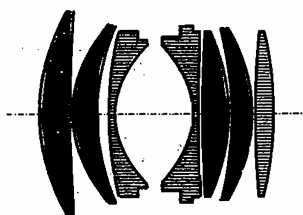

图 7.18　双高斯物镜


图7.19　六片式普兰纳物镜


图 7.20　天塞物镜


图 7.21　海利亚物镜


图 7.22　松纳物镜


图 7.23　七片式普兰纳物镜

其中非对称式镜头有：

匹兹万镜头，是匈牙利数学家匹兹万于 1841 年第一个用数学计算方法设计出来的，用于拍摄人像。该镜头系四片三组，第一组是凹、凸二透镜黏合而成为正光透镜，第二和第三组分别为单片凹透镜和单片凸透镜。在第一、第二组之间装有光圈。最大相对孔径为 1∶3.4，视角约为 25°。该镜头对球面像差和色差的校正很好，但却存在严重的像场弯曲现象。

柯克镜头，具有三片三组式的结构，是由英国的泰勒·哈勃森公司的泰勒于 1894 年设计的。该镜头由三片分立的透镜组成，前后两组均为单片凸透镜，由钡冕玻璃制成，中间一组为单片凹透镜，由火石玻璃制成。

三片三组式柯克镜头，属于正光摄影镜头。此镜头的光学结构是能够校正全部六种初级像差的最简单结构，但对像差的校正仍不完善。

天塞镜头，是由三片三组式的柯克镜头演变而成的，即将柯克镜头中最后一组的单片凸透镜变为凹、凸透镜各一片胶合而成的正透镜组，它是由德国卡尔·蔡司光学公司的鲁道夫于 1902 年设计的。

四片三组式天塞镜头，由于引入了胶合透镜，所以三片式柯克镜头剩余的高级像散和轴外球差得到了部分校正，从而成像质量得到改善。其视场角也稍为增大。天塞镜头问世后被世界

各国光学工厂广为仿制，并成为世界上最著名的镜头。我国部分普及型照相机的摄影镜头大多采用天塞型镜头结构。

海里亚镜头，具有五片三组式的结构，也是由三片式柯克镜头演变而来的。它将柯克镜头中前后两组单片凸透镜改为凹、凸透镜各一片胶合而成的正光摄影镜头。该镜头有较平直的像场，基本上克服了像散现象，与天塞镜头相比，成像质量有进一步的提高，视场角也进一步增大，所以在航空和人像摄影中应用较多。

松纳镜头，最早由德国卡尔·蔡司公司的别鲁泰列设计，属于非对称型结构的正光摄影镜头。它也是由三片式柯克镜头演变而成的，其结构上的最大特点是第二组特别厚，常由三片透镜胶合而成。

松纳镜头，对高级球差校正的效果较好，有效孔径也较大，而且有很大的视场。

对称式镜头有：

双高斯镜头，具有六片四组式的结构，1896 年由德国卡尔·蔡司公司的鲁道夫设计。该镜头属于对称型正光镜头，它由六片四组透镜组成，光圈位于第二、第三组之间。

该镜头的结构能同时增大像场，相对孔径很大，视角中等。它很容易对像差作校正，并且球差、像散、场曲、色差也得到了很好的校正，因而该镜头成像质量很高。由于镜头的上述特点，所以它被广泛应用于高、中档照相机及专业电影摄影机的摄影镜头上。

许多镜头都是从双高斯镜头演变而来的，如普兰纳物镜，具有更大的光圈。

上述物镜基本上都是焦距在 50 mm 附近的标准镜头，成像的效果与人眼观察的效果相似，可很好地用于人像摄影和近处景物的拍摄。除此之外，还有视场范围很大的广角镜和用于远摄的长焦镜。

图 7.24 是一个典型的对称式广角镜头，焦距很短。图 7.25 是另一种非对称式的广角镜头。图 7.26 是一种望远镜头。

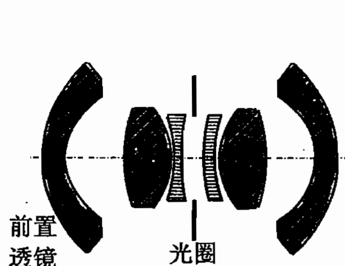


图 7.24　对称式广角镜头

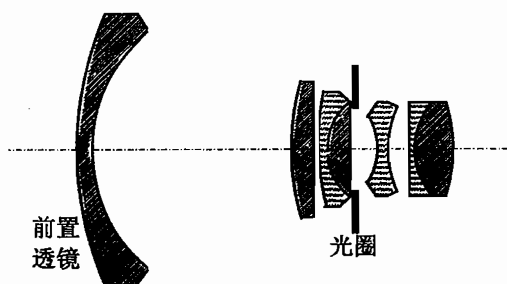


图 7.25　非对称式广角镜头

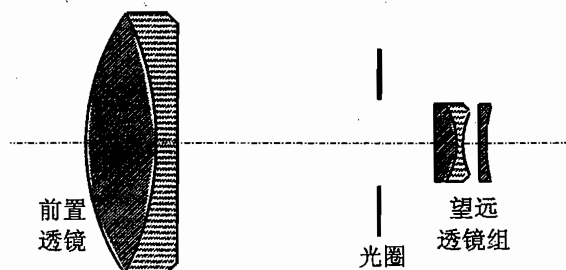


图 7.26　一种望远镜头

7.3.2 显微物镜

显微镜用来观察微小物体，通过物镜和目镜的组合使物体成一个放大且清晰的像。显微物镜的作用是成一个尽量大的实像，该实像通过目镜，再成为一个在眼睛明视距离处的虚像，便于观察。

显微物镜是透镜组，由于观察对象很小，所以显微物镜的孔径也很小。另外，为了获得大的横向放大率，要求物距尽量小，所以显微物镜的焦距很短。总的来说，显微物镜的光学结构比照相物镜的要简单。但是，为了消除各种像差，人们制定了一系列标准的设计。

7.4 显 微 镜

7.4.1 显微镜的结构

显微镜由物镜、镜筒和目镜组成，其光路和光学结构分别如图 7.27 和图 7.28 所示。由于显微镜的作用是得到放大倍数(或角放大率)尽量大的像，所以物镜的焦距很短，在使用时，应使物距尽量小，也就是使物在物镜的物方焦点外附近。这样，经物镜就可以成一放大倒立的实像，该实像位于目镜的物方焦点内侧附近。

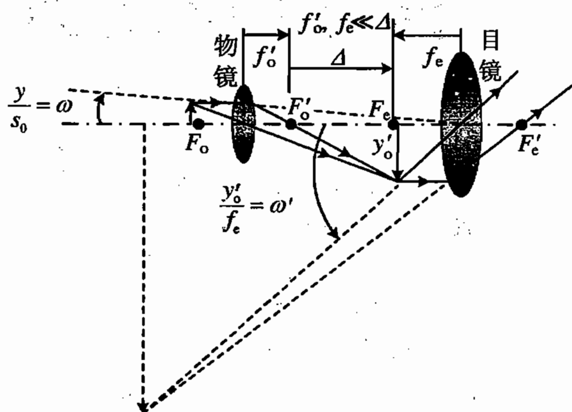


图 7.27 显微镜的光学原理



图 7.28 显微镜的光学结构

镜筒的长度为 $l = f'_o + \Delta + f_e$，其中 f'_o 为物镜的像方焦距(也等于其物方焦距)，f_e 为目镜的物方焦距(也等于其像方焦距)，$f'_o, f_e \ll \Delta$。那么对物镜而言，物距 $s_1 \approx f'_o$，像距 $s'_1 \approx \Delta + f'_o \approx \Delta$。记 y 为物高，则物镜所成的实像的高度为

$$y'_1 = -\frac{s'_1}{s_1} y \approx -\frac{\Delta}{f'_o} y \tag{7.2}$$

即物镜所成像的横向放大率为

$$V_o = -\frac{\Delta}{f'_o} \tag{7.3}$$

该实像位于目镜物方焦点的内侧，再经目镜成一放大虚像，该虚像位于人眼的明视距离处。眼

睛一般紧贴在目镜处观察，所以像对目镜光心的张角即等于对眼镜的张角。由此可得显微镜的角放大率为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{y'_o/f_e}{y/s_0} = \frac{y'_o}{y}\frac{s_0}{f_e} = V_o M_e \tag{7.4}$$

其中，$M_e = s_0/f_e$ 为目镜的角放大率。

7.4.2 显微镜的标志

每一台显微镜往往配有一组物镜和目镜，通过物镜与目镜的组合得到各种不同的放大倍数或角放大率。每一个镜头的特定参数都标在明显的位置。

显微目镜的参数主要有角放大率 M_e 和目视场直径 Φ（Φ 的单位是 mm），通常标志为 $M_e\times/\Phi$的形式，例如 10×/18，表示放大倍率为 10，视场为 18 mm。图 7.29 是一些显微目镜的实物。

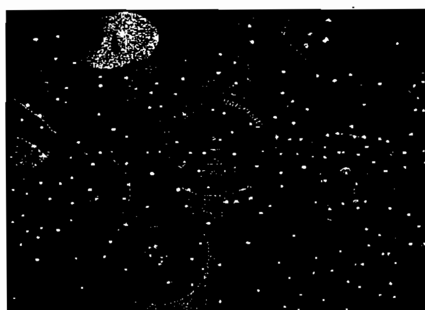


图 7.29 显微目镜

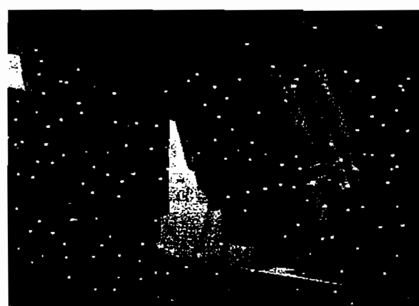


图 7.30 显微物镜

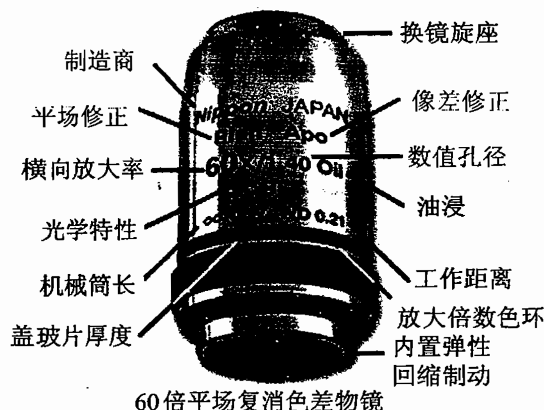


图 7.31 显微物镜的标志及其含义

图 7.30 和图 7.31 分别是显微物镜和它的标志及其含义，主要参数为透镜组的结构类型、横向放大率、数值孔径（NA）、机械筒长（mm）、盖玻片厚度等。例如，标志为 Apo 40/0.95 160/0.17，意味着这是复消色差物镜，放大倍数为 40，数值孔径为 0.95，机械筒长 160 mm，盖玻片厚度为 0.17 mm；Plan 10/0.25 Ph ∞/0.17，是指平场消色差物镜，放大倍数为 10，数值孔径为 0.25，机械筒长∞，盖玻片厚度为 0.17 mm。图 7.32 画出了不同类型物镜的数值孔径所对应的入射光束的张角（μ）。

除了上述标志之外，物镜上还有不同的色环（图 7.33），表示不同的放大倍数，如表 7.2 所示。

表 7.2 显微物镜色环的含义

倍率	1×	2×	4×	10×	20×	40×	60×	100×
色环	黑	茶	红	黄	绿	浅蓝	深蓝	白

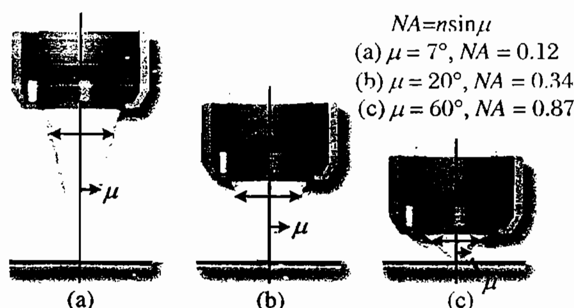


图 7.32　不同显微物镜的数值孔径



图 7.33　不同倍率的显微物镜及其色环

【例 7.1】 设一显微镜物镜的焦距为 5 cm，目镜的焦距为 20 cm，镜筒长 160 cm，现把其用作显微投影仪，将物成像于屏上。欲得像的放大率为 500，求目镜到屏的距离。

解　屏上所成的为实像。

使中间像成在目镜焦点外侧附近，则对于物镜，其像距为 160 − 20 = 140(cm)，物距为 $s = \frac{s'f}{s'-f} = 5.19$ (cm)；物镜的放大率为 27，目镜的放大率为 500/27 = 18.52。从而有

$$\frac{s_e'}{s_e} = 18.52$$

$$\frac{1}{18.52s_e} + \frac{1}{s_e} = \frac{19.52}{18.52s_e} = \frac{1}{f_e}$$

解得 $s_e' = 390$ cm。

7.5　望　远　镜

望远镜用以观察远处的物体，并使远处的物体在眼睛的明视距离处成一个虚像，便于眼睛观察。远处的物体往往很大，如天体、山脉等等，所以望远镜的作用并不是成一个放大的像。远处的物体对眼睛的张角 ω 很小，因此其细节不能被分辨，望远镜就是将光线相对于光轴的夹角放大。

最典型的两种望远镜的光学原理如图 7.34 和图 7.35 所示，其中物镜为一个长焦距的正透镜(往往是正透镜组)。由于物距往往很大，观察对象几乎可视作是在无限远处，所以物镜的焦距较长，使得物体经物镜后成一个尽量大的倒立实像，该实像几乎位于物镜的像方焦平面处。通过目镜将物镜的像进一步放大，得到一个虚像。所以，望远镜物镜的像方焦点与目镜的物方焦点几乎重合，镜筒的长度为 $L = f_o' + f_e$。

开普勒望远镜的目镜为正透镜，最后所成虚像为倒立的；伽利略望远镜的目镜是负透镜，物镜的像对目镜而言是虚物，最后经目镜所成的为正立的虚像。

由于物很远，所以物对眼睛的张角几乎等于对物镜的张角，也就是实像对物镜的张角，即

$$\omega = \frac{y_o'}{f_o'} \tag{7.5}$$

而由图 7.34 或图 7.35 可以看出，虚像对眼睛的张角等于物镜的像对目镜的张角，于是

$$\omega = \frac{y_o'}{f_e} \tag{7.6}$$

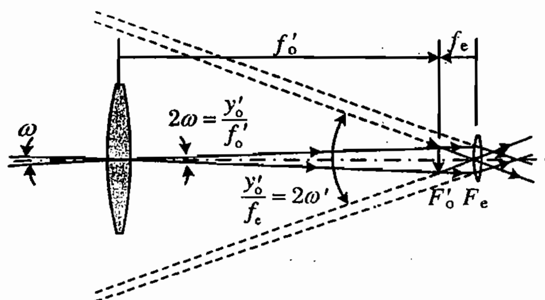


图 7.34 开普勒望远镜

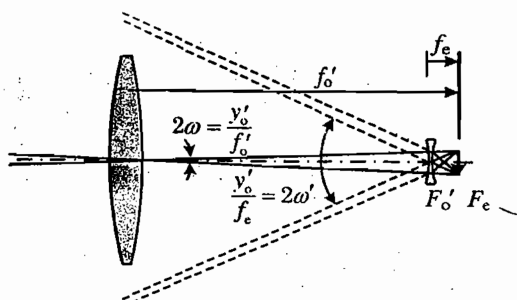


图 7.35 伽利略望远镜

则望远镜的角放大率为

$$M = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{-y_o'/f_e}{y_o'/f_o'} = -\frac{f_o'}{f_e} \tag{7.7}$$

因此，物镜的焦距比目镜的焦距大得越多，角放大率越大。所以，高倍数的望远镜的镜筒往往很长。

与显微镜不同，望远镜，尤其是便携式望远镜，其中物镜、目镜是不可更换的。望远镜的参数标志为 $M \times D$，其中 D 为物镜的孔径。例如 7×50 望远镜，系指角放大倍数为 7，物镜的孔径为 50 mm。

图 7.36 所示的双筒望远镜中有一对组合全反射三棱镜，即珀罗组合棱镜，该组合棱镜一方面将光路折返，相当于使镜筒增长；另一方面使倒像转为正像。带有珀罗组合棱镜的望远镜，从外观上看其目镜与物镜不共轴。还有另外一类便携式筒望远镜，其中采用阿贝-科尼组合棱镜，同样起到折叠光路和转正像的作用，但目镜和物镜是共轴的，如图 7.37 所示。

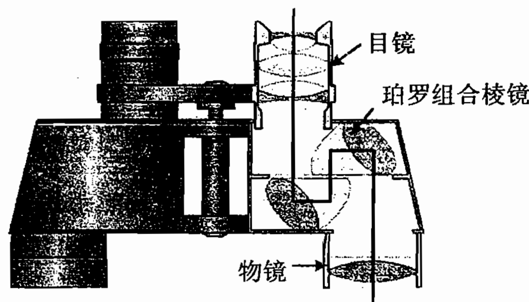


图 7.36 带有珀罗组合棱镜的望远镜

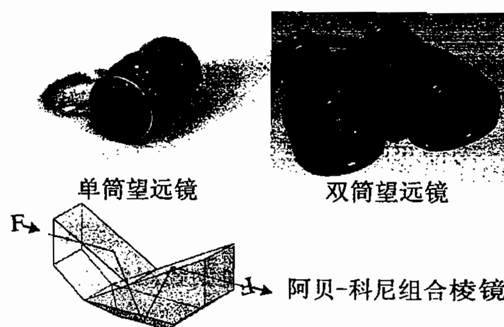


图 7.37 带有阿贝-科尼组合棱镜的望远镜

【例 7.2】 设折射式望远镜目镜的焦距为 1.2 cm，观察星体时，目镜和物镜的间距是 50 cm，观察高 10 m 的大树时，目镜向外移动 0.25 cm。求树到物镜的距离及由物镜所成像的大小。

解 由于望远镜观察无限远处物体时，物镜的像方焦点与目镜的物方焦点重合，可知此望远镜物镜的焦距为 48.8 cm。

观察大树时，物镜的像距为 48.8 + 0.25 = 49.05 (cm)，则物距为

$$s = \frac{s'f}{s' - f} = 9\,574.6\ \text{cm}$$

所成像的大小为

$$y' = -y\frac{s'}{s} = -1\,000 \times \frac{49.03}{9\,574.6} = 5.1 \quad (\text{cm})$$

7.6 照 相 机

照相机是让物体发出的光线经过镜头后在底片上成像的光学仪器。因为底片对光线感光并进行记录，所以不能记录虚像。因而要求物体经照相物镜(镜头)在底片上成一倒立实像。

高级照相机的镜头是很精密的光具组，为了消除各种像差，是由各种不同形状的透镜组合而成的。其作用相当于一个无像差的理想薄透镜。

为了获得清晰的图像与合适的构图，照相机都有对焦和取景功能。按照取景方式的不同，光学照相机主要有单镜头反光式(图 7.38)和傍轴取景式(图 7.39)两种。

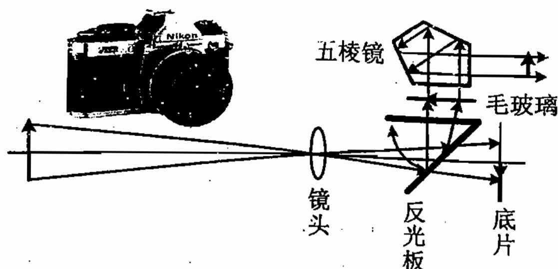


图 7.38 单镜头反光相机

单镜头反光式照相机的光路中有一块可以绕轴转动的反光板，取景对焦时，反光板处于 45°位置，像成在反光板上方的磨砂玻璃上，屋脊形五棱镜可以将磨砂玻璃上的像转过 90°，使眼睛通过取景窗看到正立的像。通过移动镜头就可以得到一个清晰的像。而照相底片的位置和磨砂玻璃是关于反光板对称的，如果升起反光板并同时开启遮挡在底片前的快门，则像就成在了底片上，照相过程就完成了。单反相机的成像光路与调焦(测距)光路合二为一，底片与毛玻璃相对于反光镜对称，毛玻璃上的像与底片上的像是一样的。这种照相机可以根据需要更换不同的镜头。

傍轴取景(或叫平视取景)器式照相机的成像光路与调焦光路相互独立。取景器包括一个半透半反的分光镜(图 7.39 所标的透反镜)和一个可以转动的反光镜。眼睛在取景窗观察时，可以同时看到直接透过分光镜射来的光和经过反光板再经过分光镜反射的光。一般来说，通过两条不同的光路进入眼睛的光线是不重合的，所以眼睛看到的是两个分开的像；如果这两条光线重合，则看到的两个像是重合的。当物体较远时，进入取景器的光线基本上是平行光，如果反光板和分光镜相互平行，这时，经过反光板反射到分光镜的光和直接透过分光镜的光是重合的。如果物移近，则两条光线不再平行，像也不重合，但转动反光板，可以使两个像重合。反光板的转动与成像镜头的前后移动是通过机械装置联动的。当取景器的两个像重合时，在底片上成的像也是清晰的。这种机械联动的成像机构是在照相机的设计中已设定好的。所以通过这种方式也可以获得清晰的照片。这种照相机由于取景光路与成像光路分离，而且取景窗处在镜头光

轴的侧边，所以称作傍轴取景式照相机。

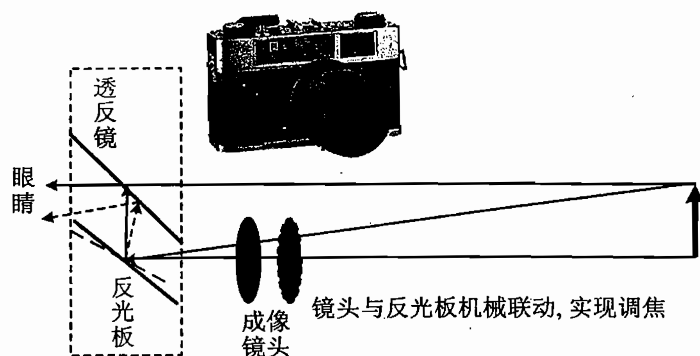


图 7.39　傍轴取景相机

与单镜头反光式相机相比，这种傍轴式相机结构简单，轻便耐用，但由于取景必须与固定的镜头联动，因而一般情况下镜头不能更换，而且由于取景窗位于镜头的傍轴，对较近物体拍摄时，取景会产生偏差。

现代数码相机的光路与传统相机相似，只是用 CCD(一种电荷耦合器件)取代感光胶片，并将 CCD 上的图像输出到显示屏上，观察显示屏上的像，即可准确判断取景和对焦的情况。除显示屏之外，数码相机也有与传统相机相似的光学取景窗。由于 CCD 不同于仅能一次曝光的感光胶片，所以取景时，相机的快门是处于开启状态的。

为了获得较好的效果，照相机的镜头结构都比较复杂，往往是由多片、多组共轴的凸透镜和凹透镜构成的，以达到消除色差、像差、畸变的效果，而且，每一片镜头上都要涂敷增透膜。

根据焦距的不同，镜头一般分为广角镜头(28 mm$<f<$50 mm)、标准镜头($f\approx$50 mm)、长焦镜头($f>$50 mm)，焦距更短的镜头($f\ll$28 mm)称作鱼眼镜头。

如图 7.40 所示，由于景物到相机的距离往往较大，所以像距基本与镜头的焦距相当，即镜头光心到底片的距离基本上等于像方焦距，因而焦距越长，像的横向放大率越大。

如图 7.41 所示，由于底片的大小是一定的，当像距短时，画面的张角较大，故短焦距镜头的视角较大。

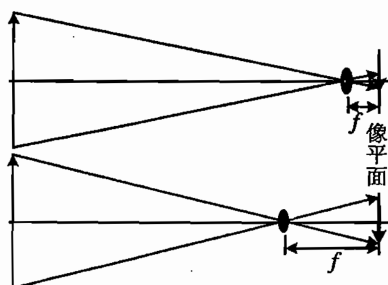


图 7.40　镜头的焦距与像的大小

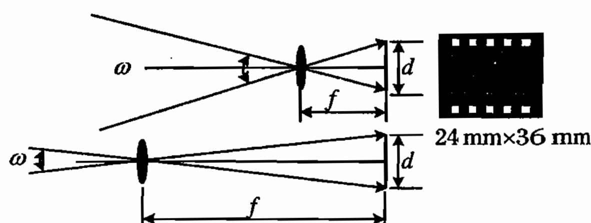


图 7.41　镜头的视野与焦距的大小

短焦距镜头的视角比长焦距镜头的视角要大，因为 $\omega=L/f'$(L 为胶片宽度)。对于35 mm 照相机，底片为 35 mm×24 mm，L 的范围为 24～42 mm，$f=50$ mm 时，$\omega=42/50\approx48^\circ$。

下面谈一下景深。对于固定的物距 s，像平面在像距 s'处。即对于理想镜头，像平面上是

同心光束的会聚点。但是，在像平面附近的一个很小的范围内，光线的发散范围不大，也可以认为像都是清晰的(图 7.42)，该范围 $\Delta s'$ 称为像方景深。同样，照相时，空间上前后分布的物在底片上不能同时清晰成像，如果物点在底片上所成的像点发散不大，也可以认为是清晰的，所以，在底片上能够清晰成像的物距范围称作物方景深，如图 7.43 所示。景深与镜头的焦距和光圈(光阑)有关。

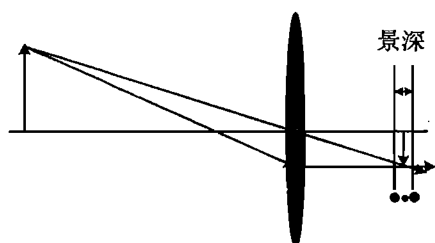


图 7.42　景深的含义

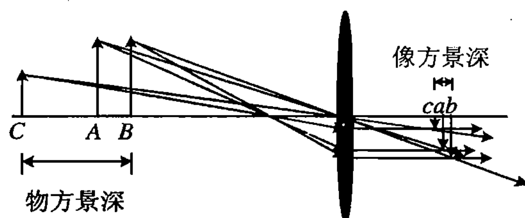


图 7.43　物方景深与像方景深

由 $\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}$，可得 $s=\frac{s'f}{s'-f}$。取微分，有

$$ds = \frac{f(s'-f)ds' - s'fds'}{(s'-f)^2} = -\frac{f^2 ds'}{f^2\left(\frac{s'}{f}-1\right)^2} = -\frac{ds'}{\left(\frac{s'}{f}-1\right)^2}$$

即 $\Delta s=\frac{\Delta s'}{(s'/f-1)^2}$，$\frac{s'}{f}\geqslant 1$。对于固定的 $\Delta s'$ 和 f，s 大，s' 小，Δs 越大，即物方景深越大。

$$ds' = \frac{f(s-f)ds - sfds}{(s-f)^2} = -\frac{f^2 ds}{f^2\left(\frac{s}{f}-1\right)^2} = -\frac{ds}{\left(\frac{s}{f}-1\right)^2}$$

即 $\Delta s'=\frac{\Delta s}{(s/f-1)^2}$。对于固定的 Δs 和 s，f 大，$\Delta s'$ 大，相同物距的物体的像距增大，相当于景深变小。

当光圈很小时，由于只有严格的近轴(傍轴)光线才能进入，所以可以获得较好的成像质量，相应地，像方景深也比较大；光圈较大时，近轴条件不能很好地得到满足，成像质量降低，景深也比较小。

照相机可以通过改变进光量(光阑)实现对底片的正确曝光(图 7.44)。

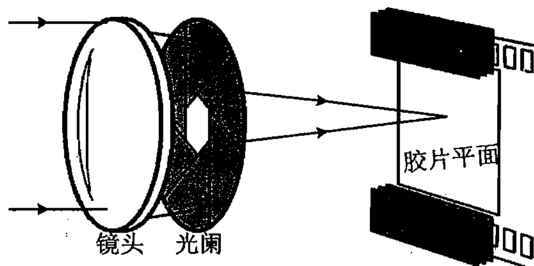


图 7.44　镜头的光阑(光圈)

易知，进光量∝光阑面积∝(镜头孔径)^2。

定义光圈数(也称作 F 数)：$F=f/D$。其中 f 为镜头的焦距，D 为镜头光瞳的直径。可见

进光量与F数的平方成反比。F数可取一系列值:22,16,11,8.5.6,4,2.8,2,1.4,…。相邻的F数的光圈的通光量相差1倍(图7.45)。

如前所述,不同的光圈有不同的景深。

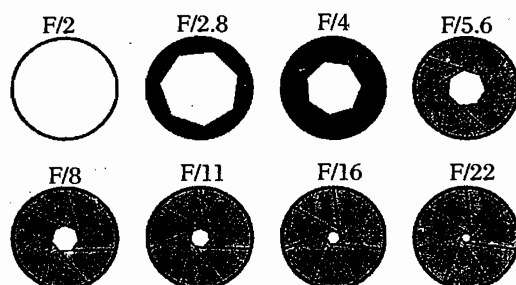


图7.45　不同F数的光阑大小

同时也可以通过设定和控制快门的速度,即快门打开的时间来控制曝光量。照相机上所标的快门速度等于快门曝光时间的倒数。

照相机的快门挡位分为B门(手控),1,2,4,8,16,30(32),60(64),125(128),250(256),500(512),1 000(1 024),2 000(2 048),4 000(4 096),8 000(8 192),…(单位为s^{-1})。

快门依构造分为中心式和帘幕式(横向布帘、纵向钢帘)。前者中心处曝光时间较边缘处长,后者的闪光同步摄影速度不是很高。

第8章　波动光学基础

1801年，托马斯·杨在光通过双孔的实验中，首次观察到了与水波的干涉现象相似的光的干涉现象，即光经过双孔后，由于干涉，光能量在空间重新分布，显示为明暗交错的条纹，这些条纹称作干涉条纹。这一实验称作杨氏干涉，杨氏干涉证明了光的波动性。

后来菲涅耳又观察到了光的衍射现象，由此建立了波动光学。

1865年，英国物理学家麦克斯韦总结出了关于电磁场规律的方程组，提出了电磁波理论。根据这一理论，可以得出电磁波的传播速度为 $v=1/\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}$，其中 μ_0 和 ε_0 分别是真空的磁导率和介电介数，μ_r 和 ε_r 是介质的相对磁导率和介电介数。当时，德国物理学家韦伯等人通过测量磁导率和介电常数，计算所得出的电磁波的速度竟然与已经测量到的光的速度一致。这就使得麦克斯韦推测光就是电磁波。1887年，德国卡尔斯鲁厄工学院教授赫兹利用自己发明的探测器和振荡器，研究了波长足够短的电磁波的反射、折射等物理性质，实验结果显示这些性质与光相同。麦克斯韦的推测被赫兹的实验所证实，而此时麦克斯韦已去世8年。

8.1　光　波　场

8.1.1　光是交变电磁场

光是电磁波，这是当今公认的结论，或者说，光是电磁辐射频谱的一段，如图8.1所示。我们所说的光，通常是指可见光，即波长在400～760 nm范围内的一段电磁辐射。在光学中，研究的范围通常还包括波长较长的红外光和波长较短的紫外光。

波反映了一些力学量（物理量）在空间的分布。例如，我们所熟悉的机械波，就是由机械振动在空间的传播所引起的波动；与空间各点振动相关的力学量，就是质点偏离平衡位置的位移、振幅、频率或周期、相位等等。这些物理量（力学量）在空间的分布可以用场的概念来描述。所以，波与场是等价的物理概念。或者说，我们既可以从振动的传播这一观点看待波，也可以从场，即物理量在空间的分布这一观点看待波。

从物理本质上看，光是电磁波，就是与电场和磁场有关的物理量在空间的分布，这些物理量包括电场矢量、磁感应矢量等等。而且，这些物理量的量值是随着时间变化的。所以，光或者光波，就是交变的电磁场。光波的物理特征以及光波与物质的相互作用，都可以用电磁理论描述。

从一般意义上看，光波与机械波或者普通的电磁波（即通常所说的无线电波）之间有许多共同的规律，因而，我们可以直接将力学或电磁学中的某些结论用于对光波的理解和描述。

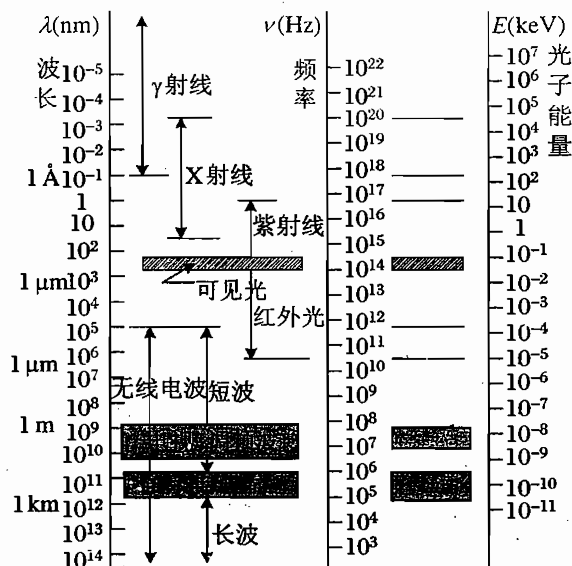


图 8.1　电磁辐射频谱

8.1.2　光波场的周期性

周期性是波动的基本特征，它所反映的就是物理量随时间的周期性变化或在空间的周期性分布。虽然我们常说波是由振动(机械振动、电磁振动等)所引起的，但波的周期性与振动的周期性是不同的。

1. 波的时间周期性

在波场中的每一点都有扰动。对机械波来说，这种扰动就是机械振动，即质点的位置($\boldsymbol{r}$)或位移($\Delta\boldsymbol{r}$)做周期性的变化；对于电磁波，这种扰动就是该点的电场强度(E，通常称作电场分量)、磁感应强度(B，通常称作磁场分量)做周期性的变化。这种变化是随时间的变化，可以用周期 T 或者频率 ν($\nu=1/T$)来表示。如果用坐标图表示，则横轴就是时间坐标，纵轴就是相应的物理量。这就是波场的时间周期性，即(波场中的每一点)振动的周期性。波场中的某一点 z 如果做简谐振动，则其时间的周期性可以用图 8.2 表示。

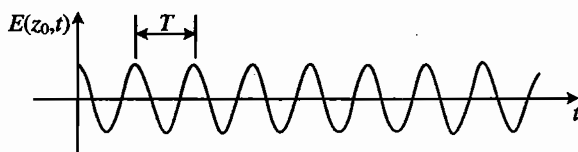


图 8.2　波的时间周期性

2. 波的空间周期性

对整个空间或整个波场而言，物理量是周期性分布的，即间隔一定空间距离的点，其位移(对于机械波)、电场强度、磁感应强度(对于电磁波)等物理量都有相同的量值。这种周期性就是空间的周期性，是反映波场特征的最基本的物理参数。反映这种周期性的物理量是波长 λ，或者波长的倒数，记作 $\tilde{\nu}$($\tilde{\nu}=1/\lambda$)，也就是空间周期性的频率。如果用坐标图表示，则横轴就是

空间的位置或距离，纵轴就是相应的物理量。正弦波（波场中各点都做同频率、同振幅的简谐振动）的空间周期性可以用图 8.3 表示。

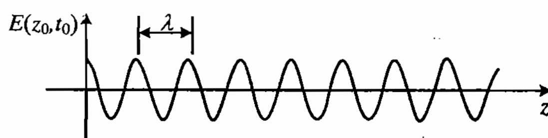


图 8.3　波的空间周期性

因此，光或者光波场，或者一般的波或波场，同时具有时间和空间两重周期性。而实际上，由于受表达方式的限制，上述图 8.2 和图 8.3 都是对波场特征的不完整描述，只是分别反映了波场中某一点（图 8.2）以及某一时刻（图 8.3）波场的特征。

由此也可以认识到，波的数学表达式必须能够同时反映这两重周期性。或者说，波的数学表达式必须是时间和空间的周期性函数。例如，沿 $+z$ 方向传播的余弦波，设在原点初相位为 φ_0，可以用余弦函数可表示为

$$E(z,t) = E_0(z)\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{z}{v} - t + \varphi_0\right) = E_0(z)\cos 2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \varphi_0\right) \tag{8.1}$$

式中，T 为波场中每一点随时间振动的周期，v 为波的传播速度，λ 为波长；或者表示为

$$E(z,t) = E_0(z)\cos(kz - \omega t + \varphi_0) \tag{8.2}$$

其中，φ_0 为这列波的初相位，即零时刻（$t=0$）、原点（$z=0$）的相位。

在式(8.2)中，

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{8.3}$$

$$\omega = 2\pi\nu \tag{8.4}$$

$\tilde{\nu}=1/\lambda$ 称作**波数**。由于波数表示的是波的空间频率，即波在单位空间长度内的周期数，所以，$k=2\pi/\lambda$ 表示的就是空间 2π 个单位长度内波的周期数，因而 k 也称作**圆波数**或**角波数**；频率 ν 表示单位时间内波振动的次数，则 $\omega=2\pi\nu$ 表示 2π 个单位时间内波振动的次数，所以 ω 也称作**圆频率**或**角频率**。

【例 8.1】　计算可见光的频率范围及其在真空中的波数。

解　在真空中，可见光波长 λ 的范围为 400～760 nm，光速 c 为 3×10^8 m/s，于是由 $\nu=c/\lambda$，可得

$$\nu_R = \frac{3\times10^8}{760\times10^{-9}} = 3.9\times10^{14}\quad(\text{Hz})$$

$$\nu_V = \frac{3\times10^8}{400\times10^{-9}} = 7.5\times10^{14}\quad(\text{Hz})$$

可见光的频率的量级为 10^{14} Hz，这是一个非常高的频率。波数为

$$\tilde{\nu}_R = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{760\times10^{-9}} = 1.32\times10^6(\text{m}^{-1}) = 1.32\times10^4(\text{cm}^{-1})$$

$$\tilde{\nu}_V = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{400\times10^{-9}} = 2.5\times10^6(\text{m}^{-1}) = 2.5\times10^4(\text{cm}^{-1})$$

习惯上，波数的单位常采用 cm^{-1}，1 cm^{-1} 表示波数为 1。

8.1.3 定态光波

一般的机械波或电磁波(包括光波)都是非常复杂的,这种复杂性可以从两方面来分析:

第一,波源的复杂性:来自不同扰动源的多列波在空间同时存在,各个波源的特征互不相同,而且通常每一个波源的扰动特征也非常复杂,从而使得整个波场的振动情况非常复杂;

第二,空间的复杂性:波场中的介质分布往往非常复杂,因而波与介质的相互作用也非常复杂,而且,即使是同一种介质,与不同波长、不同振幅的波也有不同的作用,从而也使得波场的特征变得非常复杂。

但是,从应用的角度看,人们总是设法避免上述复杂的情形,而设法在特定的条件下利用自然现象。因而,我们必须从中找出最具有典型特征同时又是最简单的波进行研究。

光学中研究的问题大多是无源场的问题,或者说是在自由空间中研究光的特征,波场中没有电荷或电流分布。而且总是在有限的时间和空间中对光进行研究。例如,光电探测器的响应时间可以达到纳秒(ns,10^{-9} s)、皮秒(ps,10^{-12} s),从而引出了定态光波的概念。

具有下述性质的波场称为定态波场:

(1) 波场空间中各点的扰动是同频率的简谐振动,即波场中各点具有相同的振动频率 ν。

(2) 波场中各点扰动的振幅不随时间变化,在空间中形成一个稳定的振幅分布,即波场中各点的振幅只与空间位置有关,而与时间无关。

如果光波电矢量(即电场矢量)的表达式为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$,对于定态光波,振幅与时间无关,则振幅可以写作$E_0(\boldsymbol{r})$或者$E_0(P)$,其中 $\boldsymbol{r}$ 为空间点P 的位矢。又由于波场中各点的振动频率相同,每一点都做简谐振动,于是每点的振动都可写成 $\cos[\varphi(P)-\omega t+\varphi_0]$的形式,其中$\varphi(P)$是相位中只与空间位置有关的部分,称作空间相位。那么,一个定态光波场的表达式可以写作

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0(P)\cos[\omega t - \varphi(P) + \varphi_0] \tag{8.5}$$

或者简单地写作

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\varphi(P),t) \tag{8.6}$$

满足上述要求的光波应当充满全空间,即空间中各点都做相同频率的简谐振动,这就是无限长的单色波列,而实际上这样的光波是无法得到的。但是,当波列的持续时间比其扰动周期长得多时,可将其当作无限长的波列来处理。

任何复杂的非单色波都可以分解为一系列单色波的叠加。

需要指出的是,正弦波是一种最简单的定态光波,但定态光波不仅仅限于正弦波,波场空间中各点的振幅可以不同。

8.1.4 光是矢量波

光是电磁波,因而是一种矢量波,电场分量、磁场分量、波的传播都是矢量。因此,应该用矢量描述光波的物理特征。

波的传播方可以用一个矢量表示,这就是**波矢**,如图 8.4 所示。波矢的定义如下:

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{s} \tag{8.7}$$

其中,λ 为光的波长,$\boldsymbol{s}$ 为光的传播方向上的单位矢量。即波矢的方向为波的传播方向,数值为 $2\pi/\lambda$,即式(8.3)所定义的 k。

光波是横波，在真空和各向同性介质中，电场矢量 E、磁感应矢量 B、波矢 k 是两两正交的，而且电场矢量 E、磁感应矢量 B 是同相位(即同步)的，如图 8.5 所示。

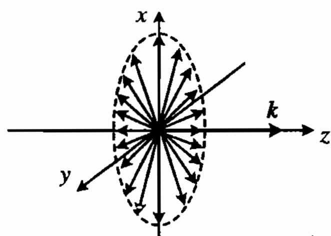


图 8.4　波矢

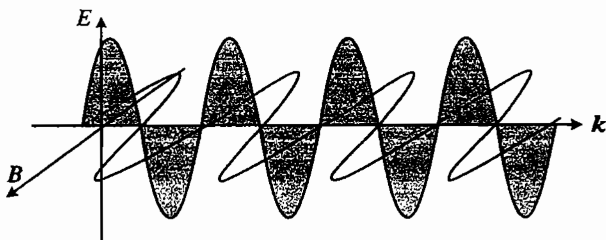


图 8.5　光波是横波

电场分量的振幅、磁场分量的振幅、波长、频率等是标量。

简单的平面波和球面波的矢量表达式分别如下：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0(\boldsymbol{r})\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_{E_0}) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = B_0(\boldsymbol{r})\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_{B_0}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{e_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\cos(k\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_{E_0}) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{b_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_{B_0}) \end{cases}$$

8.1.5　光强

电磁场具有能量，而且传输能量，电磁场的能量可以用能流密度描述。

单位时间内通过垂直于传播方向单位面积的能量称作能流密度。

由上述定义可以看出，能流密度实际上是一个矢量，其方向表示电磁场能量传输的方向。由电磁学理论，可以得到

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{8.8}$$

$\boldsymbol{S}$ 称为坡印廷矢量；也可以用电磁波的能量密度 w 和波的速度 $\boldsymbol{v}$ 表示为

$$\boldsymbol{S} = w\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)$$

由于光具有极高的时间频率(10^{14} Hz)，所以在实验中所测量到的实际上总是在一个时间内能流密度的平均值。光的强度(也称光强)是光波场平均能流密度的绝对值，也就是平均坡印廷矢量的绝对值，按照电磁理论，为

$$I = \langle|\boldsymbol{S}|\rangle = \langle|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}|\rangle \tag{8.9}$$

例如，对于各向同性无源介质中的简谐平面波，利用

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0(\boldsymbol{r})\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \varphi_0)$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = B_0(\boldsymbol{r})\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \varphi_0),\quad \boldsymbol{B} = \pm\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B} = \mu_r\mu_0\boldsymbol{H}$$

得到

$$I = \langle|\boldsymbol{S}|\rangle = \langle|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}|\rangle = \left\langle\left|\boldsymbol{E}\times\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_r\mu_0}\right|\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{k}{\omega\mu_r\mu_0}E^2\mathrm{d}t$$

而

$$\frac{k}{\omega} = \sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}$$

所以

$$\int_0^T \frac{k}{\omega\mu_r\mu_0}E^2\mathrm{d}t = \int_0^T \sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}E^2\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\int_0^T E_0^2\cos^2(\omega t \pm \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \varphi_0)\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\frac{T}{2}E_0^2$$

即

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}E_0^2 = \frac{1}{2\mu_r\mu_0}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r\mu_0\varepsilon_0}E_0^2 = \frac{n}{2c\mu_r\mu_0}E_0^2 \tag{8.10}$$

其中，n 是介质的折射率。在可见光范围内，一般情况下介质的相对磁导率 $\mu_r\approx 1$，故

$$I \approx \frac{n}{2c\mu_0}E_0^2 \tag{8.11}$$

如果不考虑光强的量纲，而只关心其相对数值，则可略去式中的物理学常数 c 和μ_0，得到

$$I \propto nE_0^2 \tag{8.12}$$

如果光只是在同一种介质中传播，通常取

$$I = E_0^2 \tag{8.13}$$

即可以用电场分量振幅的平方表示光强。这里需要指出的是，E_0^2 的量纲与光强的量纲不同，两者是不相同的。在光学中以振幅的平方 E_0^2 代表光强，这只反映了光强与振幅之间的关系，因而可以在相同的条件下比较光的相对强度。实际上应该用下式表示：

$$I \propto E_0^2$$

【例 8.2】 设一台 3 kW 的二氧化碳激光器发出的光束被聚焦成直径为 10 μm 的光斑，求在焦点处的光强 I 以及光场的振幅值E_0。（假设空气的折射率为 $n=1$，不计光束的损失。）

解 光强为

$$I = \frac{W}{\Delta S} = \frac{3}{\pi(10\div 2)^2} \approx 3.82\times 10^{13} \quad (\mathrm{J/(m^2\cdot s)})$$

由 $I=\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon/\mu}E_0^2$，得

$$E_0^2 = 2I\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 2\times 3.82\times 10^{13}\sqrt{\frac{4\pi\times 10^{-7}}{8.85\times 10^{-12}}} \approx 2.88\times 10^{16}$$

所以

$$E_0 = 1.70\times 10^8 \quad (\mathrm{V/m})$$

在可见光波段，多数透明介质的相对磁导率 $\mu_r\approx 1$，即电磁波的磁场分量通常不会导致介质物理性质的改变，因而，只要研究光波的电场分量即可，光的电场强度也称作光矢量。

8.1.6 光的传播

光的传播就是将光波场中物理量的振动从空间的一点传播到另一点。例如，正弦波 $E(z,t)=E_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\varphi_0)$，就是将其电场矢量 E（电场分量）从空间的某一点传播到另一点；在没有吸收等其他损耗的情况下，就是将该物理量以不变的量值传播。而该物理量的值

取决于波场的相位 $\varphi(z,t)=kz-\omega t+\varphi_0$，即波场的量值由相位决定，所以也可以说振动的传播其实就是相位的传播，在振动传播的过程中，相位保持不变。

例如，在 t 时刻，空间点 z 处的物理量 $E(z,t)$ 经过时间 Δt 后，传播到了空间另一点 $z'=z+\Delta z$，如图 8.6 所示，则振动传播的表达式可以写作

$$E(z',t')=E(z,t) \quad 或 \quad \varphi(\boldsymbol{r}',t')=\varphi(\boldsymbol{r},t)$$

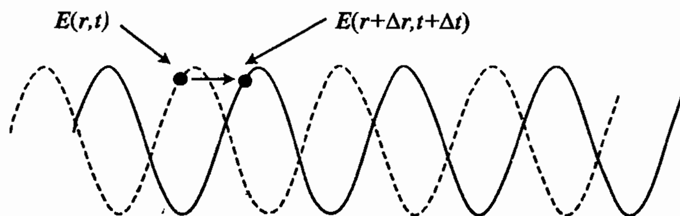


图 8.6　振动与相位的传播

即

$$z(z+\Delta z)-\omega(t+\Delta t)+\varphi_0=kz-\omega t+\varphi_0$$

整理后得到

$$k\Delta z-\omega\Delta t=0, \quad 即 \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\omega}{k}$$

而 $\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 就是物理量 $E(z,t)$ 在空间传播的速度或振动传播的速度，即波速。因此

$$v=\frac{\omega}{k} \tag{8.14}$$

表示沿 $+z$ 方向传播的正弦波的速度。由于上式反映了相位传播的速度，所以也称作相速度。

值得注意的是，如果波的表达式为 $E(z,t)=E_0\cos(kz+\omega t+\varphi_0)$，则得到

$$v=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\frac{\omega}{k} \tag{8.15}$$

这表示沿 $-z$ 方向传播的正弦波。

【例 8.3】　设两个一维简谐平面波的波函数分别为

$$E_1(z,t)=4\cos 2\pi(3t-0.2z), \quad E_2(z,t)=\frac{1}{2.5}\cos(3.5t+7z)$$

式中，位移以 cm 为单位，时间以 s 为单位，距离以 m 为单位，试分别求它们的(1) 振幅；(2) 频率；(3) 周期；(4) 波长；(5) 相速度；(6) 传播方向。

解　波的表达式为 $E(z,t)=A\cos(\omega t\pm kz+\varphi_0)$。

对于 $E_1(z,t)=4\cos 2\pi(3t-0.2z)$，有：

(1) $A=4\ \mathrm{cm}$；

(2) $\nu=3\ \mathrm{Hz}$；

(3) $T=1/\nu=0.33\ \mathrm{s}$；

(4) $\lambda=2\pi/k=1/0.2=5\ \mathrm{m}$；

(5) $v_{\mathrm{P}}=\omega/k=3/0.2=15\ \mathrm{m/s}$；

(6) $+z$。

同样，对于 $E_2(z,t)=\frac{1}{2.5}\cos(3.5t+7z)$，有

(1) $A=0.4\ \text{cm}$；

(2) $\nu=0.557\ \text{Hz}$；

(3) $T=2\pi/\omega=1.80\ \text{s}$；

(4) $\lambda=2\pi/k=0.9\ \text{m}$；

(5) $v_P=\omega/k=0.5\ \text{m/s}$；

(6) $-z$。

8.2 定态光波的数学表示

8.2.1 矢量表示与标量表示

光是矢量波，电场分量、磁场分量、波的传播（波矢）都是矢量，应该用矢量描述光波的物理特征，则有

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t),\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$$

但是，用矢量描述光波给数学上的计算和推导都带来了许多不便。事实上，由于光源的发光机制，在多数情况下，尤其是在真空和各向同性介质中，光波电矢量在横向，即垂直于波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向上是均匀和对称的，所以在上述波矢垂直的平面中任意选定一个方向之后，电矢量在这一方向的特征与其他方向并没有区别，所以只需要用标量对波的特征进行描述即可。即使电矢量的分布是非对称的，通常也可以采用正交分解的方法，得到 $\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z$，对于各个分量 E_x，E_y 和 E_z，都可以用标量表示，如图 8.7 所示。

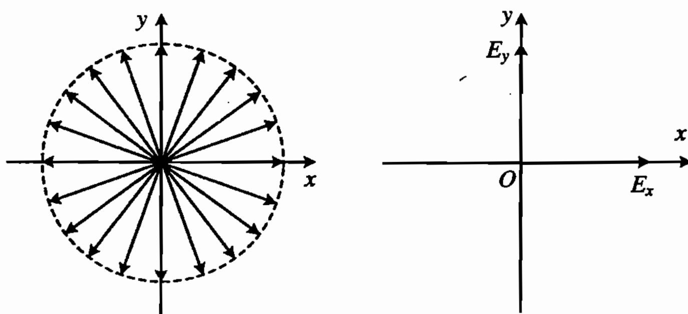


图 8.7　光波振动矢量的对称性和正交分解

因此，在光学中，用标量方法处理矢量波是一种常用的手段。当采用标量表达式处理光波时，有时也将研究对象称作“**标量波**”。

8.2.2 定态光波的描述

对于符合上述条件的定态光波，如果不考虑其偏振性，即假设在过空间某一点 P、垂直于波

矢 k 的平面内,其电场分量在各个方向上都是相同的,则通常用标量表达式描述。这样做,其实是在一个取定的平面内描述定态光波在某一方向上的振动。其标量式可以用余弦函数表示为

$$E(P,t) = E_0(P)\cos[\varphi(P) - \omega t] \tag{8.16}$$

其中,P 表示空间中的任一点,则 $E_0(P)$是振幅的空间分布,$\varphi(P)$是相位的空间分布。均与时间 t 无关。由于余弦函数是偶函数,所以式(8.16)也可以表示为

$$E(P,t) = E_0(P)\cos[\omega t - \varphi(P)] \tag{8.17}$$

在光学中,所讨论的对象通常是光的电场分量,即光矢量,所以在表达式中,应当记作 $\boldsymbol{E}$(电场强度),E_0(电场强度的振幅)等等,但由于习惯,在许多文献中,往往用 U,ψ 等符号表示电场分量,用 A,U_0,ψ_0 等符号表示振幅。

8.2.3 定态光波按波面的分类

光波场是三维分布的空间场,在时刻 t,其电场强度可以用矢量式表示为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z,t)$,空间任意点 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 处,有一个确定的电场强度;或者,对于定态光波,可以用电场强度表示为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0(P)\cos[\varphi(P)-\omega t+\varphi_0]$。可以看出,在某一时刻 t,电场的特征由空间相位 $\varphi(P)$决定,即空间相位相等的地方,电场强度即电矢量值和变化趋势相同。因而引入了波面的概念。

对于定态光波场,空间中相位 $\varphi(P)$在相同的点所组成的平面或曲面,称作波面或波阵面,这是光波的等相位面。

可根据波面的形状将定态光波作简单的分类。

具有相同相位的空间点应满足下述方程(在相同时刻):

$$\varphi(P) = \text{const}$$

其中,场点 P 可以用直角坐标表示为 $P(x,y,z)=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$;或者用球坐标表示为 $P(r,\theta,\varphi)$;或者用柱坐标表示为 $P(r,z,\varphi)$。

1. 平面波

波面是平面。平面波具有下列特征:

(a) 振幅 $A(P)$为常数;

(b) 空间相位 $\varphi(P)$为直角坐标的线性函数,即

$$\varphi(P) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \varphi_0 = k_x x + k_y y + k_z z + \varphi_0 \tag{8.18}$$

其中,常数 φ_0 为初相位,即时刻 $t=0$ 时原点的相位。

波的余弦表达式为

$$E(\boldsymbol{r},t) = E_0(\boldsymbol{r})\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0) \tag{8.19}$$

波面的条件为 $\varphi(P)=\text{const}$,即

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \text{const}$$

该式表示与波矢垂直的一系列平面,如图 8.8 所示。

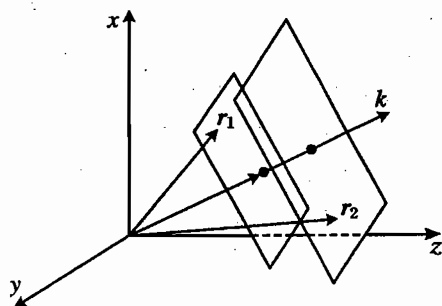


图 8.8 平面波

在数学中常用方向余弦表示矢量的方向,即用矢量与坐标轴间的夹角的余弦表示。

波矢的方向可以表示为(α,β,γ),其中 α,β,γ 分别是波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 x,y,z 轴的夹角,则波矢可以用矢量式

表示为

$$\boldsymbol{k} = k(\cos\alpha\,\boldsymbol{e}_x + \cos\beta\,\boldsymbol{e}_y + \cos\gamma\,\boldsymbol{e}_z) \tag{8.20}$$

在光学中,我们习惯上用上述三个角的余角表示波矢的方向,即 $\theta_1 = \pi/2 - \alpha$, $\theta_2 = \pi/2 - \beta$, $\theta_3 = \pi/2 - \gamma$,则($\theta_1$, θ_2, θ_3)就分别是波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 yOz、xOz 和 xOy 三个坐标平面的夹角(图 8.9 和图 8.10)。从而上述波矢的表达式(8.20)变为

$$\boldsymbol{k} = k(\sin\theta_1\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta_2\,\boldsymbol{e}_y + \sin\theta_3\,\boldsymbol{e}_z) \tag{8.21}$$

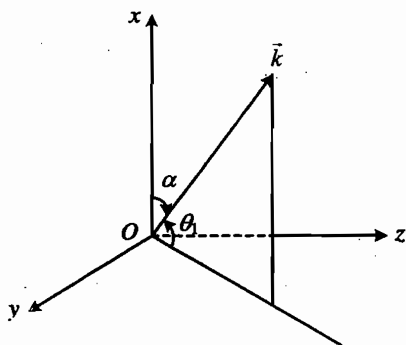


图 8.9 用方向余弦角或与平面间的角表示波矢

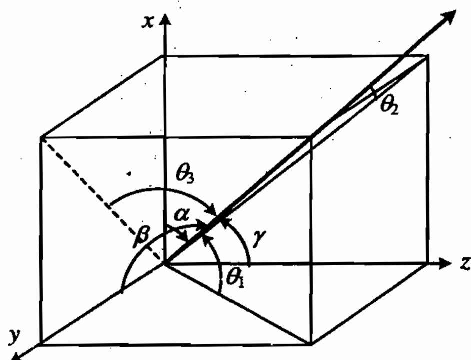


图 8.10 波矢的方向表示

空间点 $P(x,y,z)$处的相位为

$$\varphi(x,y,z) = k(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2 + z\sin\theta_3) + \varphi_0 \tag{8.22}$$

由于光学中的探测器或接收屏往往是一个平面,所以通常总是研究波场中一个平面上的电场分量分布或者相位分布。可以取该平面位于坐标系中 $z=0$ 处,如图8.11所示,则该平面上的相位分布为

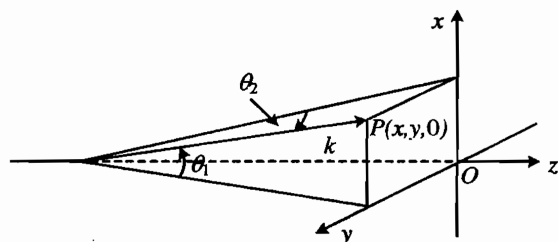


图 8.11 平面上的相位

$$\varphi(x,y,0) = k(x\sin\theta_1 + y\sin\theta_2) + \varphi_0 \tag{8.23}$$

可以根据需要取定坐标系。例如,通常将波矢的方向取作 $+z$ 方向,即平面波沿着 $+z$ 方向传播,其波面垂直于 z 轴。如果在 t 时刻,坐标轴上某一点 z 处波面的相位为 $\varphi(t,z) = kz - \omega t + \varphi_0$,则波面传播的速度为 $v = \omega/k$,该速度即为波面传播的速度,也即相位传播的速度或相速度。

如果波面的表达式为 $\varphi(z) = -kz - \omega t + \varphi_0$,或者 $\varphi(z) = kz + \omega t + \varphi_0$,则相速度为 $v = -\omega/k$,向 $-z$ 方向传播。

【例 8.4】 设一列平面波在 xOz 平面传播,并以 θ 角入射到 xOy 平面上,其反射波沿 $-\theta$ 方向,如图 8.12 所示,写出这两列波在 xOy 平面上的相位表达式。

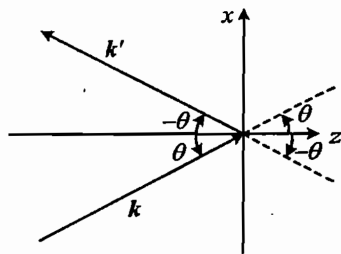


图 8.12 例 8.4 中的平面波

解 入射波的波矢为 $\boldsymbol{k} = k(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z)$;反射波的波矢为 $\boldsymbol{k}' = k(-\sin\theta\,\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z)$。

xOy 平面上任一点(x,y)的位置矢量(即所谓的位矢)为

$$r = xe_x + ye_y$$

在 xOy 平面上，由于 $z=0$，所以相位分别为

$$\varphi(x,y) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = kx\sin\theta \quad 和 \quad \varphi'(x,y) = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r} = -kx\sin\theta$$

【例 8.5】 设一平面波的波函数为 $E(P,t)=A\cos[5t-(2x-3y+4z)]$，式中 x,y,z 的单位为 m，t 的单位为 s。试求：(1) 时间频率；(2) 波长；(3) 空间频率矢量的大小和方向。

解 (1) 时间频率 $\nu=\dfrac{\omega}{2\pi}=0.796\ \text{Hz}$；

(2) 波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}=1.17\ \text{cm}$；

(3) 空间频率 $\tilde{\nu}=\dfrac{1}{\lambda}=0.86\ \text{cm}^{-1}$，方向为$\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}=\dfrac{2\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{29}}$。

2. 球面波

波面是球面。球面波有以下两个主要特征：

(a) 场点 P 处的振幅

$$A(P) = \frac{a}{r} \tag{8.24}$$

与该点到波源的距离成反比，即振幅随着 r 的增大而衰减。

(b) 空间相位是球面对称的：

$$\varphi(P) = kr + \varphi_0 \tag{8.25}$$

球面波的余弦表达式为

$$E(r,t) = E_0(r)\cos(kr - \omega t + \varphi_0) \tag{8.26}$$

波面 $\varphi(P)=kr+\varphi_0=\text{const}$，即 $r=$常数，代表一个球面。

球面光可以看作是从某一点光源发出的(图 8.13)，或者是向某一点会聚的(图 8.14)。

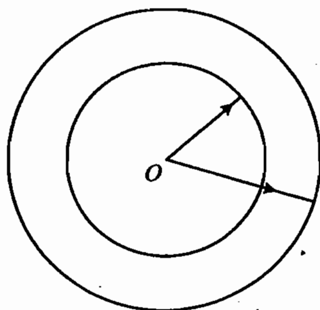


图 8.13　发散球面波

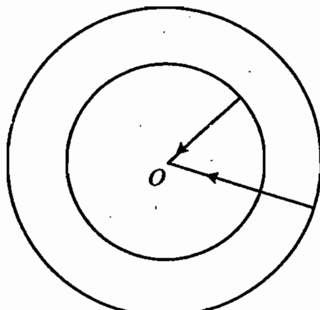


图 8.14　会聚球面波

例如，如果波源为 $O(0,0,0)$，波面的相位为 $\varphi(P)=kr-\omega t+\varphi_0$，沿在球面的任一法线方向，在波面传播中，有

$$kr - \omega t + \varphi_0 = k(r + \mathrm{d}r) - \omega(t + \mathrm{d}t) + \varphi_0$$

波面的传播速度为 $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\omega}{k}$，故这为从原点发出的发散球面波。

如波面表达式为 $\varphi(P)=-kr-\omega t+\varphi_0$，或 $\varphi(P)=kr+\omega t+\varphi_0$，则波面的传播速度为 $v=-\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\omega}{k}$，故这为向中心传播的球面波。

【例 8.6】 比较从$(0,0,-z_0)$和$(0,0,z_0)$处发出的和向$(0,0,-z_0)$和$(0,0,z_0)$会聚的球面波在 $z=0$ 平面上的振动表达式(图 8.15 和图 8.16)。

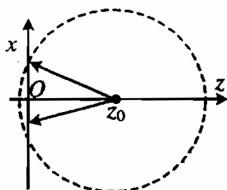


图 8.15 从$(0,0,z_0)$处发出

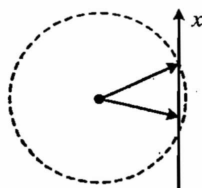


图 8.16 从$(0,0,-z_0)$处发出

解 从$(0,0,z_0)$发出的球面波在$(x,y,0)$平面上的振动为

$$U_+(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\cos\left(k\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0\right)$$

从$(0,0,-z_0)$发出的球面波在$(x,y,0)$平面上的振动亦为

$$U_-(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\cos\left(k\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0\right)$$

向$(0,0,z_0)$点会聚的球面波为

$$U_+^*(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\cos\left(-k\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0\right)$$

向$(0,0,-z_0)$点会聚的球面波为

$$U_-^*(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}}\cos\left(-k\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0\right)$$

【例 8.7】 比较从$(x_0,y_0,-z_0)$和(x_0,y_0,z_0)处发出的和向$(x_0,y_0,-z_0)$和(x_0,y_0,z_0)会聚的球面波在$(x,y,0)$平面上的振动表达式(图 8.17 和图 8.18)。

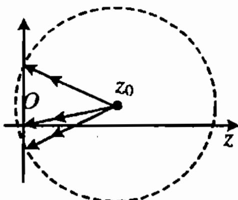


图 8.17 从(x_0,y_0,z_0)处发出

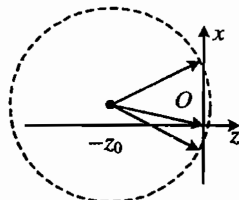


图 8.18 从$(x_0,y_0,-z_0)$处发出

解 如果点光源在$(x_0,y_0,\pm z_0)$,则发出和会聚的球面波分别为

$$U_\pm(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}}\cdot\cos\left[k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0\right]$$

$$U_\pm^*(x,y,0)=\frac{A}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}}\cdot\cos\left[-k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}-\omega t+\varphi_0\right]$$

对于球面波,其在某点的振幅和相位只与该点到源点的距离 r 有关,而与场点相对于源点的方位无关,所以在球面波的表达式化简和变换的过程中,应该注意这一点。

3. 柱面波

波面为圆柱面，如图 8.19 所示。柱面波有以下两个主要特征

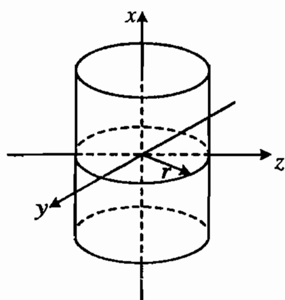


图 8.19 柱面波

(a) 振幅

$$A(P) = \frac{a}{\sqrt{r}} \quad (r\ 为圆柱面的半径) \tag{8.27}$$

随着$\sqrt{r}$的增大而减少。

(b) 相位

$$\varphi(P) = kr + \varphi_0 \tag{8.28}$$

振动表达式为

$$E(r,t) = \frac{a}{\sqrt{r}}\cos(kr - \omega t + \varphi_0) \tag{8.29}$$

柱面波可以看作是无限长的线光源发出的光在各向同性空间中所形成的光波场。

4. 高斯光束

在实际中，并没有非常简单的平面波、球面波或柱面波，而遇到的常常是非常复杂的非均匀的光波场。例如，在激光器的谐振腔中，稳定的光波可以用高斯型函数表示，即振幅和相位在横向(x,y)的分布都是高斯型函数，如图 8.20 所示。高斯光束的振幅和相位如下：

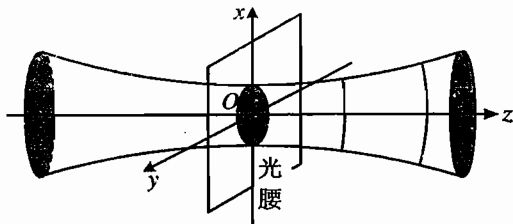


图 8.20 高斯光束

(a) 振幅

$$A(P) = \frac{A_0}{\omega(z)}\exp\left[\frac{x^2+y^2}{\omega^2(z)}\right] \tag{8.30}$$

(b) 相位

$$\varphi(P) = k\left[z + \frac{x^2+y^2}{2r(z)}\right] + \varphi_0 \tag{8.31}$$

在原点处，波面为平面，此处称作“光腰”，振幅和相位分别为

$$A(x,y,0) = \frac{A_0}{\omega(0)}\exp\left[\frac{x^2+y^2}{\omega^2(0)}\right] \tag{8.32}$$

$$\varphi(x,y,0) = \varphi_0 \tag{8.33}$$

在光腰之外，波面都是球面，但各处球面的曲率不等，越远处曲率越大。

8.2.4 有关光波的几个概念

除了波面之外，光学中还常常用下述物理概念描述光波场。

(1) 波前　即光波场中的任一平面或曲面。实际上，波前有时也称作波阵面，波阵面一词来自 wave front，这一名称最初的含义是指一列波最靠前的波面，在空气动力学中仍然使用这一概念，但光学中，这一名词的含义已发生了变化。

由于光学器件的接收面往往是平面，如照相机的底片、探测器的窗口等，所以在光学中，波前更多情况下指的是光波场中的一个平面。

(2) 波前函数　即光波场中某一个波前(往往是接收平面)上的振动表达式或复振幅表达式。通常选取坐标系，使得波前就是 $z=0$ 平面，这种情况下，波前函数的表达式比较简单。

(3) 等幅面　即振幅相等的空间点构成的曲面。

(4) 波线　即与波面垂直的直线，表示波的传播方向。

波线与波矢的方向是相同的。波线就是几何光学中的光线。

8.3　光程与相位

8.3.1　光程

虽然"光程"这一概念并不是在光的波动理论中最先被提出来的，但却是波动光学中极为重要的一个概念。例如，对于平面波，其空间相位表示为 $\varphi(P)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\varphi_0=k_x x+k_y y+k_z z+\varphi_0$，而波矢的大小为

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi n}{\lambda_0} \tag{8.34}$$

式中，λ_0 为真空中的波长，n 为介质的折射率。在折射率不同的介质中，光经过一个振动周期所传过的距离不同，即光的波长不同。表 8.1 给出了钠黄光在不同介质中的折射率。

表 8.1　钠黄光(589.3 nm)在不同介质中的折射率

介质	空气	水	各种玻璃	金刚石
n	1.000 28	1.333	1.5～2.0	2.417

以沿着 z 方向传播的一维平面波为例，并设初相位 $\varphi_0=0$，则其相位为

$$\varphi(z)=kz=\frac{2\pi}{\lambda_0}nz=\frac{2\pi}{\lambda_0}ns \tag{8.35}$$

其中，$nz=ns$ 称作介质中光波的光程，即光走过的路径（路程）与介质折射率的乘积。由式(8.35)，可见相位由光程决定。即对于定态光波，在同一时刻，空间中光程相同的点的相位也相同，因而振动也相同。或者说，光程相等的空间点所构成的面即等光程面，就是等相位面，即波面。

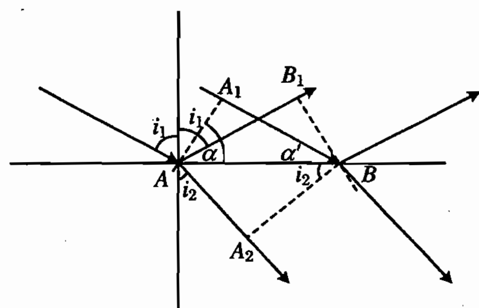


图 8.21　平面波的反射和折射

波的反射、折射都可以用光程与波面的关系解释。下面以平面波为例说明。

如图 8.21 所示，设入射光的波面为 AA_1，反射光的波面为 BB_1。由于两个波面上的各个点之间必须保持等光程，于是有 $\overline{AB_1}=\overline{BA_1}$，即 $\alpha'=\alpha$，入射角等于反射角，就是几何光学中的反射定律。对折射波而言，要求 $n_2\,\overline{AA_2}=n_1\,\overline{AB_1}$，即 $n_2\,\overline{AB}\sin i_2=n_1\,\overline{AB}\sin i_1$，化简得 $n_2\sin i_2=n_1\sin i_1$，就是几何光学中的折射定律。

平面波通过棱镜或透镜将发生折射。折射后，光的方向和波面都会发生改变。棱镜、透镜的光学原理都可以从光程的变化进行解释。

例如，在图 8.22 中，设平面波正射入棱镜之前，波面为 ABC，从棱镜的另一个面上的不同点射出时，经过的光程分别为 $n'\overline{AA_1}$，$n'\overline{BB_1}$，$n'\overline{CC_1}$等等，各不相同，这时的波面即等相位面，必须处于 $A'B'C'$ 的方位，才能使得 $n'\overline{AA_1}+\overline{A_1A'}=n'\overline{BB_1}+\overline{B_1B'}=n'\overline{CC'}$。从 C 处入射的光到达棱镜的另一侧表面上 C' 点时，从 C 点以上 x 处的 A 点入射的光应该到达距离另一侧表面上的出射点 A_1 为 $nx\tan\alpha$ 的球面上。由于出射后波面到棱镜的距离是 x 的线性函数，故波面仍是平面。由图可以看出，在波面 $A'B'C'$ 处，光程为

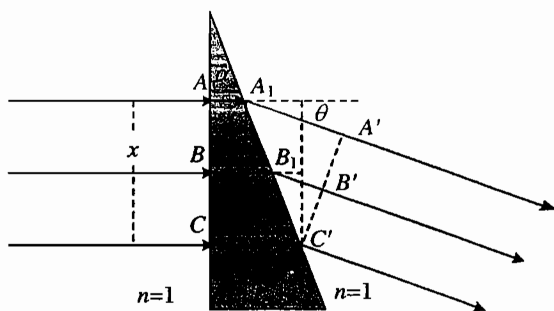


图 8.22　棱镜的折射

$$\overline{A_1A'}=\frac{x}{\cos\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\theta\right)$$

而经 C'点的光程为 $n'\overline{C_0C'}=n'x\tan\alpha$。由 $\overline{A_1A'}=n'\overline{C_0C'}$，即得 $n'\sin\alpha=\sin(\alpha+\theta)$，注意到 α 是入射角，而 $\alpha+\theta$ 是折射角，这就是折射定律。

对于球面透镜，由于球面的形状是二次曲面的形式，所以平面波经过透镜后，波面的形状发生改变。经过中央厚、边缘薄的凸透镜，其波面如图 8.23 所示；而经过边缘厚、中央薄的凹透镜，薄面则变为图 8.24 所示的形状。可以证明，在满足近轴条件时，上述光波变为会聚或者发散的球面波。

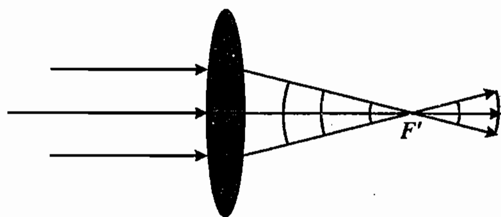


图 8.23　凸透镜的折射

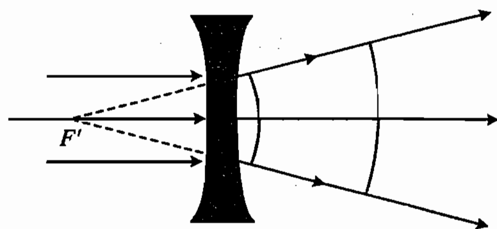


图 8.24　凹透镜的折射

对于平面波，如果空间两点的光程差 $\Delta=j2\pi$，则其振动是相同的。设想在平凸透镜中，如果将其分成一系列厚度为波长或波长整倍数的薄片，则在各个薄片的相应位置上，平面波的振动完全相同。所以，矩形薄片除了增加光程之外对折射并无贡献。可以将其去掉，只保留各个薄片两端上带有球面的部分，然后将它们放在同一个平面上，经过该透镜的平面光即平行光束仍将会聚到原来的像方焦点上。根据这一原理做成的透镜称为菲涅耳透镜，如图 8.25 所示。

【例 8.8】 如图 8.26 所示，在一薄透镜的物方焦平面上有三个点光源 O,A,B，试分别写出由它们发出的光波经透镜折射后，在像方焦平面上产生的复振幅分布函数。（设三列波的波长均为 λ。）

解　设在物方焦平面上的物点具有相同的相位，根据凸透镜的性质，物方焦平面上各点发出的光到像方焦点的光程相等，于是，三个点光源发出的球面波经过透镜后变为平面波，而且三列波在像方焦点处具有相等的相位，不妨将光波在像方焦点 O'处的相位设为 φ_0。

平面波的振动表达式为

$$U(P) = A\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0)$$

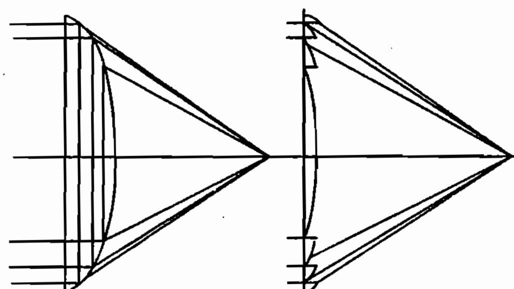


图 8.25 菲涅耳透镜

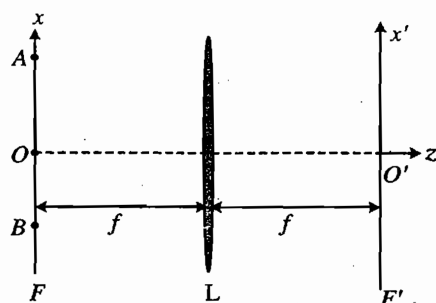


图 8.26 例 8.8 中的光波

其中三列波的波矢分别为

$$\boldsymbol{k}_O = \frac{2\pi}{\lambda}(0,0,1) \quad (\text{平行于光轴方向})$$

$$\boldsymbol{k}_A = \frac{2\pi}{\lambda}(\sin\alpha_1, 0, \cos\alpha_1) \quad \left(\sin\alpha_1 = -\frac{a}{\sqrt{a^2+f^2}}, \cos\alpha_1 = \frac{f}{\sqrt{a^2+f^2}}\right)$$

$$\boldsymbol{k}_B = \frac{2\pi}{\lambda}(\sin\alpha_2, 0, \cos\alpha_2) \quad \left(\sin\alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{b^2+f^2}}, \cos\alpha_2 = \frac{f}{\sqrt{b^2+f^2}}\right)$$

其中，α_1,α_2 为平面波的方向，即平面波的波矢与水平面 yOz 间的夹角。而对于屏上任一点的位矢 $\boldsymbol{r} = x'\boldsymbol{e}_x + y'\boldsymbol{e}_y + 0\,\boldsymbol{e}_z$，有

$$\tilde{U}_O(P) = A_O\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0)$$

$$U_A(P) = A_A\cos(\boldsymbol{k}_A\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0) = A_A\cos\left(-\frac{2\pi a x'}{\lambda\sqrt{a^2+f^2}} - \omega t + \varphi_A\right)$$

$$\tilde{U}_B(P) = A_B\cos(\boldsymbol{k}_B\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \varphi_0) = A_A\cos\left(\frac{2\pi b x'}{\lambda\sqrt{b^2+f^2}} - \omega t + \varphi_B\right)$$

由于在(0,0,0)处上述三列波的相位均为 φ_0，故可得

$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_0$$

各列球面波传播到光心处时，振幅为

$$A_A = \frac{A}{\sqrt{a^2+f^2}}, \quad A_O = \frac{A}{f}, \quad A_B = \frac{A}{\sqrt{b^2+f^2}}$$

8.3.2 相位的超前与滞后

在光学中，时常要用到诸如“相位超前”、“相位滞后”等说法，这种超前或滞后的含义是什么？下面通过例子来说明。

1. 同一波场中不同空间点之间的相位

如图 8.27 所示，一维平面波沿着 z 方向传播，z 轴上有 P,O 两点，P 点在 O 点的右侧。P 点的振动是由原点 O 传播过来的，即 P 点的振动比 O 点的滞后。

设原点的振动用 $U(O,t) = A(O)\cos(\varphi_0 - \omega t)$描述，$P$ 点比 O 点延迟的时间为 Δt($\Delta t =$

$\overline{OP}/v = z/v$)。如果不考虑振幅的变化,即设 $A(O)=A(P)$,则 t 时刻 P 点的振动应当为 $t-\Delta t$ 时刻 O 点的振动,即

$$\begin{aligned}U(P,t) &= U(O,t-\Delta t)\\ &= A(P)\cos[\varphi_0 - \omega(t - z/v)]\\ &= A(P)\cos[\varphi_0 - \omega t + (\omega/v)z]\\ &= A(P)\cos[\varphi_0 - \omega t + (2\pi/\lambda)z]\\ &= A(P)\cos(kz + \varphi_0 - \omega t) = A(P)\cos[\varphi(P) - \omega t]\end{aligned}$$

其中,$\varphi(P)-\omega t = kz+\varphi_0-\omega t$ 为 P 点的相位,与 O 点的相位相比,增大了 kz。P 点的相位比 O 点滞后了 kz,在上述表达式中,相位大的滞后。即在复数表达式或复振幅表达式中,相位数值大表示滞后。这可以理解为,空间相位 φ 与光程成正比,光程大,则要落后。

但是,在有些著作中,由于习惯,定态波的表达式往往写作如下形式:

$$U(P,t) = A(P)\cos[\omega t - \varphi(P) + \varphi_0]$$

在这种表达式中,情况则正好相反,相位的数值大表示超前。

2. 不同波在同一空间点

设有两列波,在原点 O 具有相同的相位,假设从 O 点开始沿着相同的方向传播,设第一列波的速度较慢。经过时间 t 后,由于波的速度不同,两列波分别到达了 P_1 和 P_2 点,如图 8.28 所示。即波列 1 比波列 2 滞后;或者,在相同的位置 P,波列 2 的相位为 $\varphi_2 = k_2 z - \omega t = \frac{2\pi}{\lambda_2}z - \omega t$,而波列 1 的相位为 $\varphi_1 = k_1 z - \omega t = \frac{2\pi}{\lambda_1}z - \omega t$。显然,由于 $\lambda_1 < \lambda_2$,故 $\varphi_1 > \varphi_2$。相位小表示超前,与第一种情况在表达方式上是相同的。

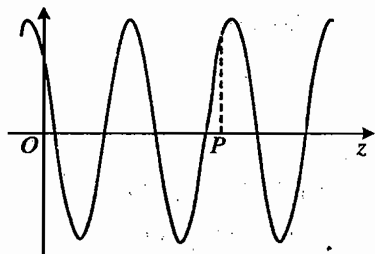


图 8.27 P 点的振动比 O 点的滞后

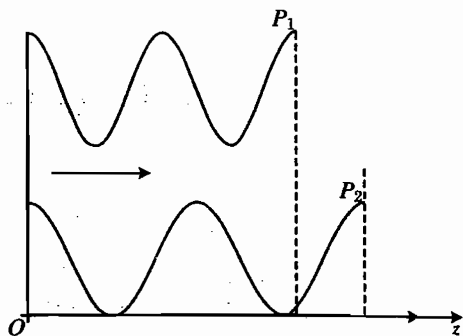


图 8.28 波列 1 比波列 2 滞后

【例 8.9】 设光波的频率为 6×10^{14} Hz,相速度大小为 3×10^8 m/s,问在传播方向上相位差为 60°的任意两点之间的最短距离是多少?

解 由相位的表达式,可以得到

$$\Delta z = \frac{\Delta\varphi}{k} = \frac{\Delta\varphi v_P}{\omega} = \frac{\Delta\varphi v_P}{2\pi\nu}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{3}\times 3\times10^8}{2\pi\times6\times10^{14}} = 8.33\times10^{-8}(\mathrm{m}) = 83.3\,(\mathrm{nm})$$

【例 8.10】 将一厚度为 d、折射率为 n 的平板玻璃片,使其法线与平行光线成 i 角插入光

线中，试比较插入前后光线的相位改变。

解 在这种情况下，只需要比较一下空间的同一波面在插入前后的相位差即可。

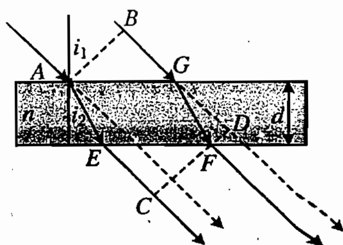


图 8.29 例 8.10 中的光路

如图 8.29 所示，插入前，波面 CD 与 AB 间的光程差为 $\overline{BD}$。插入后，$\overline{GF}=d/\cos i_2$，两波面间的光程差为 $\overline{BG}+n\overline{GF}$，而

$$\overline{GD}=\overline{GF}\cos(i_1-i_2)=d\,\frac{\cos(i_1-i_2)}{\cos i_2}$$

插入前后的光程差改变为

$$\begin{aligned}\Delta L &= n\,\overline{GF}-\overline{GD}=n\,\frac{d}{\cos i_2}-d\,\frac{\cos(i_1-i_2)}{\cos i_2}\\ &=\frac{d}{\cos i_2}[n-\cos(i_1-i_2)]=d\,\frac{n-\cos i_1\cos i_2-\sin i_1\sin i_2}{\cos i_2}\\ &=d\left(\frac{n}{\cos i_2}-\cos i_1-\frac{\sin i_1\sin i_1}{n\cos i_2}\right)=d\left(-\cos i_1+\frac{n^2-\sin^2 i_1}{n\cos i_2}\right)\\ &=d\left(-\cos i_1+\frac{n^2\cos^2 i_2}{n\cos i_2}\right)=d(-\cos i_1+n\cos i_2)\\ &=d(n\sqrt{1-\sin^2 i_2}-\cos i_1)=d(\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}-\cos i_1)\end{aligned}$$

因此，插入后 CD 波面相位的改变为

$$\Delta\varphi=k\Delta L=\frac{2\pi d}{\lambda}(\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}-\cos i_1)$$

比插入前滞后。

8.4 傍轴条件与远场条件

实际中往往需要知道光波在一个平面波前上的光强、振动以及相位的分布，即平面上的波前函数，例如成像平面（照相底版）或者探测器表面。这时，如果是平面波，则表达式非常简单。但在实际中，遇到的往往是球面波，如图 8.30 所示。在一个平面上，球面波的相位并不相同，波前函数的表达式相当复杂，因而往往需要在一定条件下，将球面波近似为平面波处理。

以下仅讨论轴上物点的傍轴条件和远场条件。

如图 8.31 所示，发光的物点在 $Oxyz$ 坐标平面的原点，接收屏 $x'O'y'$ 与物平面 xOy 的距离为 z，对于接收屏上的任一点 P，记 $\overline{O'P}=\rho$，$\overline{OP}=r$，则有

$$\rho=\sqrt{x'^2+y'^2}\,,\quad r=\sqrt{z^2+\rho^2}$$

球面波在接收屏上 P 点的振幅为

$$A(P)=\frac{a_0}{\sqrt{z^2+\rho^2}}=\frac{a_0}{|z|\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{z}\right)^2}}=\frac{a_0}{|z|\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\rho}{z}\right)^2+\cdots\right]}$$

如果满足

$$\rho^2 \ll z^2 \tag{8.36}$$

则$(\rho/z)^2$以及高次项可以忽略,从而有

$$A(P) = \frac{a_0}{|z|} \tag{8.37}$$

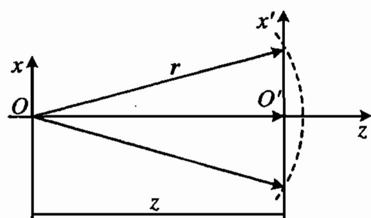


图 8.30 平面波前上的球面波

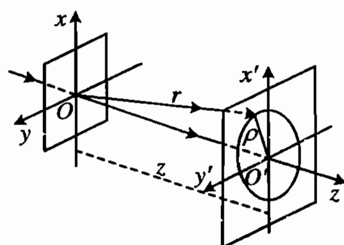


图 8.31 轴上物点的傍轴条件与远场条件

即在平面波前 $x'O'y'$上,各点的振幅均相等。

$\rho^2 \ll z^2$ 称为**傍(近)轴条件**,上述近似称作**傍轴近似**。

球面波在接收屏 $x'O'y'$上的相位为

$$\varphi(P) = k\sqrt{z^2+\rho^2} = k\left(|z| + \frac{\rho^2}{2|z|} + \cdots\right)$$

如果

$$|z| \gg \frac{\rho^2}{\lambda} \tag{8.38}$$

则$\frac{\rho^2}{|z|} \ll \lambda$,即$\frac{k\rho^2}{2|z|} \ll k\lambda/2 = \pi$,所以$\frac{\rho^2}{2|z|}$可以忽略。此时

$$\varphi(P) = kz \tag{8.39}$$

即在平面波前 $x'O'y'$上,各点的相位均相等。

$|z| \gg \rho^2/\lambda$ 称为**远场条件**。上述近似称作**远场近似**。

由于实际中光波的波长总是很小,即 $\lambda \ll |z|$ 总可满足,所以由远场条件,可得

$$\rho^2 \ll \lambda|z| \ll |z||z| = z^2$$

这就是近轴条件式(8.36),即远场条件必然包含近轴条件。

近轴条件下,轴上物点发出的球面波可以简化为

$$U(x',y',0) = \frac{E_0}{|z|}\cos\left[k\left(z + \frac{x'^2+y'^2}{2z}\right) - \omega t + \varphi_0\right] \tag{8.40}$$

远场条件下,轴上物点发出的球面波可以进一步简化为

$$U(x',y',0) = \frac{E_0}{|z|}\cos(kz - \omega t + \varphi_0) \tag{8.41}$$

满足远场条件时,在接收屏上,球面波可以作为平面波处理。

例如,设单色点光源发出的球面波的波长 λ 为 500 nm,波前的横向宽度 ρ 为 1 mm,实际情况下,只要按 10～100 倍的数量级估算即可。由式(8.36),傍轴条件为 $\rho^2 \ll z^2$,取 $z^2 = 50\rho^2$,可得 $z_1 = 7$ mm 即满足傍轴条件。由式(8.38),远场条件为$|z| \gg \rho^2/\lambda$,取 $z = 50\rho^2/\lambda$,可得 $z_2 = 100$ m 即满足远场条件。

8.5 光波的叠加

8.5.1 光波的叠加原理

光波场中各点的电场强度都做周期性变化，这种变化称作光矢量的振动，可以用周期性的函数来描述。虽然电磁场的振动与机械波的振动机制不同，但是它们所遵循的规律是相同的。

1. 光波的独立传播定律

如果两个实物粒子发生碰撞，则它们的运动状态都将改变，都会偏离原来的运动方向。但是，如果两列波相遇，情况将有所不同。例如，两列水波相遇时，尽管在相互重叠的区域波的状态会有明显的改变，但相遇之后，则还能保持各自的状态不变；夜空中的两探照灯的光束相遇后，并没有改变各自光束的方向和强度；在交响乐演奏中，我们仍能分辨出乐队中各种乐器发出的不同音调；等等。所有这些事实都告诉我们，波在相遇的过程中和相遇之后，并没有因为彼此之间的相互作用而改变其固有的特征。这就是波的独立传播定律：*从不同振源（扰动源）发出的波在空间相遇时，如果振动不十分强烈，各个波将保持各自的特性不变而继续传播，相互之间没有影响。*

波的独立传播定律是波动的最基本定律之一，无论对于机械波或电磁波，含义都是相同的。不同的波之间，只要在振动不十分强烈的情况下，就不会相互影响，这一点与我们在力学中所熟悉的实物粒子间的相互作用是不同的。

2. 光波的叠加原理

不同的波列，在相遇的区域振动将互相叠加。对于机械波，机械振动的叠加遵循力学定律；对于电磁波，是电场、磁感应场的叠加，其叠加的过程将遵循电磁学原理。这种叠加过程可以用波的叠加原理描述。

光波的叠加原理　*几列波在相遇点所引起的合振动是各个波独自在该点所引起的振动的矢量叠加。*

机械波、电磁波（包括光波）的叠加都遵循相同的原理，因为机械波、电磁波都是矢量，都按矢量合成的方法进行叠加。

但波的叠加原理只有在一定的条件下才能成立。

波的叠加原理成立的条件为：在线性介质中，而且振动不是十分强烈。在振动很强烈时，线性介质会变为非线性的。

应当注意，波的叠加，不是强度的叠加，也不是振幅的简单相加，而是振动矢量的叠加。

需要指出的是，虽然上述波的叠加原理阐述的是一般性的原理，适用于普遍的情况，但是在光学中往往用来处理分立、有限的几个波列，或无限但可数的波列叠加的情况。

8.5.2 光波的叠加方法

1. 代数法（瞬时值法）

光的叠加就是振动的叠加，即各列光波的电场矢量的叠加。对于没有偏振特性的光波，可

以用标量的方法处理其叠加问题。

如果仅从叠加原理看，光波与机械波和普通电磁波并没有区别，所以，可以直接应用以前的结论讨论光的叠加。

首先讨论同频率、同振动方向的单色光间的叠加。这是一种最简单，也是光学中最常见的情况，可以用一维表达式描述叠加的情况。

设两列波在相遇点的振动表达式为

$$\psi_1 = A_1\cos(\varphi_1 - \omega t) \quad 和 \quad \psi_2 = A_2\cos(\varphi_2 - \omega t)$$

从数学上可知，这样的两个振动相加后，仍为简谐振动，即有

$$\begin{aligned}\psi = \psi_1 + \psi_2 &= A_1\cos(\varphi_1 - \omega t) + A_2\cos(\varphi_2 - \omega t)\\ &= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t\\ &= A(\cos\varphi\cos\omega t + \sin\varphi\sin\omega t)\\ &= A\cos(\varphi - \omega t)\end{aligned}$$

即合振动为

$$\psi = A\cos(\varphi - \omega t)$$

其中

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{8.42}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \tag{8.43}$$

2. 振幅矢量法

从式(8.42)和(8.43)可以看出，两列同频率定态光波合振动的振幅 A 与 A_1，A_2 正好构成一个三角形，其中 A_1 和 A_2 的夹角就是两列波 ψ_1 和 ψ_2 的相位差 $\Delta\varphi$，如图 8.32 所示。这样一来，求解两列同频率光波叠加所形成的合振动的振幅问题，就成了求解矢量叠加的问题。可以用矢量 $\tilde{U}_1$ 表示波 ψ_1，用矢量 $\tilde{U}_2$ 表示波 ψ_2，问题就变成求 $\tilde{U}_1$，$\tilde{U}_2$ 两个矢量的和，即得 $\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$。

上述 $\tilde{U}_1$ 和 $\tilde{U}_2$ 就是波的**振幅矢量**，而 $\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$ 就是**振幅矢量法**。

这种方法比较直观，特别是对于多列波的叠加，处理起来更加方便。如果求

$$\tilde{U} = \sum_{j=1}^{n}\tilde{U}_j$$

其中，$\tilde{U}_j$ 就是第 j 列波的振幅矢量，可以让各个矢量依次首尾相接，相邻两矢量 $\tilde{U}_j$，$\tilde{U}_{j+1}$ 之间的夹角就是它们之间的相位差 $\Delta\varphi_{j+1,j} = \varphi_{j+1} - \varphi_j$，如图 8.33 所示。合振幅 $\tilde{U}$ 所对应的矢量从第一矢量的起点指向最后一个矢量的终点。

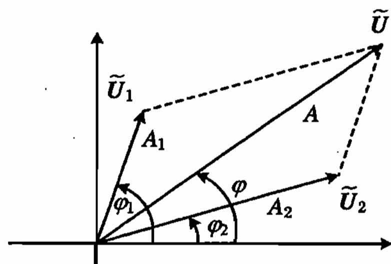


图 8.32　两个振幅矢量相加

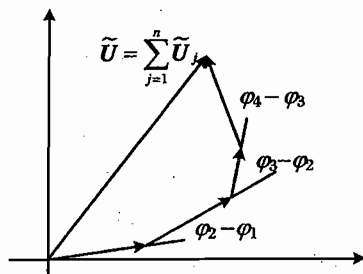


图 8.33　多个振幅矢量相加

8.5.3　光波的叠加强度

1．光波叠加的特点

光波的数学表达式和光波的叠加方法与其他类型的矢量波并没有区别，但是，叠加的结果却大不相同。例如，一般的机械波或电磁波叠加时，很容易观察到由叠加引起的干涉现象。即在一列波的波峰与另一列波的波谷相遇的地方，振动相互抵消，在这一点合振动的振幅最小；而在两列波的波峰（或波谷）相遇处，振动加强，合振动的振幅最大。叠加的结果使得波场中某些地方的振动增强（即合振动的振幅增大），而某些地方振动减弱（即合振动的振幅减小），波场的能量由于波的叠加而重新分布，这就是所谓的波的干涉。

我们可以用肉眼直接观察到机械波的波动过程以及它们之间的干涉，例如水波的干涉。对于无线电波，也可以借助简单的仪器观察到电磁振荡及其相互干涉的过程。例如，在示波器上可以观察到交流电信号的波形，以及由它们叠加所产生的各种物理图像，这就是利萨如图形。从波动的角度看，虽然光与机械波和普通电磁振荡没有本质的区别，但是，却几乎无法观察到普通光源之间的干涉，例如，无论是两盏灯发出的光，或是两只蜡烛发出的光，都没有明显的干涉。

也就是说，第一，我们无法直接观察或测量光波电矢量周期性变化的情况；第二，普通的光也无法产生干涉。这到底是为什么呢？

对于第一点，是比较容易理解的。光的波长在 400～760 nm 范围，其频率约为 10^{14} Hz，这样短的变化周期不仅比人眼的响应时间要短得多，也比普通电子仪器的响应时间短得多，所以，我们无法直接感受到光的振动情况，即光矢量周期变化的情况。

对于第二点，干涉的结果表现为叠加后波场振幅的变化：两列波在相遇点，如果相位是相同或相近的，则引起的合振动的振幅就大，因而强度增大；如果相位相反，则合振动的振幅就要减小，因而强度也要变弱。普通的光不能产生干涉，说明光波之间的相位有着某种特殊性。下面就对这一点进行讨论。

能够产生干涉现象的波是相干的。普通的光源之间不能产生干涉，说明它们之间是不相干的。

2．光波的叠加强度

正如前面所指出的，由于测量仪器的响应时间比光波的振动周期大许多，光强的测量值实际上是光波的能流密度在一定时间内（即仪器响应时间内）积累强度的平均值。设观察时间或仪器响应时间为 $\tau(\tau \gg T)$，则光强为

$$I = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2 \mathrm{d}t \tag{8.44}$$

而根据前面推导的结果，再按照光的叠加原理，两列振动方向相同、频率相同的单色光

$$\psi_1 = A_1 \cos(\varphi_1 - \omega t), \quad \psi_2 = A_2 \cos(\varphi_2 - \omega t)$$

所引起的合振动为

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A\cos(\varphi - \omega t)$$

合振动的振幅由以下关系确定：

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

则上述两列光叠加后的强度为

$$I = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)]\mathrm{d}t \tag{8.45}$$

3. 光波的相干叠加与非相干叠加

由于 ψ_1,ψ_2 的振幅 A_1,A_2 是常数，故式(8.45)变为

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\frac{1}{\tau}\int\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\mathrm{d}t$$

记 $\Delta\varphi(P) = \varphi_2(P) - \varphi_1(P)$，称之为两列波在相遇点 P 的相位差。以下针对相位差的不同特点，分别进行讨论。

(1) 相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 在观察时间内不是稳定值，而是随时间做无规、随机的改变。

在这种情况下，由于 $\cos\Delta\varphi$ 在$(-1,+1)$范围内随机取值，则有

$$\int_0^\tau \cos\Delta\varphi\mathrm{d}t = 0$$

于是得到

$$I = A_1{}^2 + A_2^2 = I_1 + I_2 \tag{8.46}$$

这是两列光的强度的简单相加。相加的结果使得光波重叠的区域具有相等、均匀的强度，就是我们通常观察到的现象。在这种情况下，两列光之间是没有干涉的。或者说，由于这两列光波之间的相位是没有关联的，所以它们是非相干光。

(2) 相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 在观察时间内不随时间改变，而是一个稳定的数值。

这种情况下，有

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos\Delta\varphi\mathrm{d}t = \cos\Delta\varphi$$

从而有

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi \tag{8.47}$$

对式(8.47)而言，一般情况下，$I \neq I_1 + I_2$。

实际上，对定态光波而言，相位差 $\Delta\varphi(P) = \varphi_2(P) - \varphi_1(P)$是由空间的位置决定的。在空间不同的位置，两列波有不同的相位差，叠加后，由于 $2A_1A_2\cos\Delta\varphi$ 取不同的值，将会有不同的强度。即在光波的重叠区域，光强变得不均匀了，有些地方光强增大，比其中每一列光单独产生的强度的和还要大；而另一些地方光强减弱。因而光场中出现了明暗交错的情况，即出现干涉现象。这就是干涉图样，或称作干涉花样。而

$$2A_1A_2\cos\Delta\varphi \tag{8.48}$$

称为**干涉项**。

如果每一列光都是定态光波，$\varphi_1(P)$，$\varphi_2(P)$是它们的空间相位，即只与空间位置有关，则相位差 $\Delta\varphi(P) = \varphi_2(P) - \varphi_1(P)$也只与空间位置有关，即不同的空间点具有不同的相位差，因而有不同的干涉项的数值，而且干涉项由于与时间无关，所以干涉图样是稳定的。

(a) 当 $\Delta\varphi = 2j\pi$ 时，$\cos\Delta\varphi = 1$，

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2 > I_1 + I_2 \tag{8.49}$$

光强取最大值，称作**相长干涉**。

(b) 当 $\Delta\varphi = (2j+1)\pi$ 时，$\cos\Delta\varphi = -1$，

$$I = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 = (A_1 - A_2)^2 < I_1 + I_2 \tag{8.50}$$

光强取最小值，称作**相消干涉**。

即两列波在空间相遇，如果有固定的相位差，便会出现干涉现象，使得光的能量重新分布。能够产生干涉的光，是由于两列光波的相位是相互关联的，故称为相干光。

4. 振动方向相互垂直的光波的叠加

若光波的振动，即电矢量$\boldsymbol{\psi}_1$，$\boldsymbol{\psi}_2$ 相互垂直，则可以直接应用矢量叠加的方法，得到合振动矢量，如图 8.34 所示。

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2$$

要得到叠加的强度，就要算出合振动的振幅，即 $\boldsymbol{\psi}$ 的振幅。由于上式表示 $\boldsymbol{\psi}$，$\boldsymbol{\psi}_1$，$\boldsymbol{\psi}_2$ 实际上构成一个直角三角形，于是有

$$|\boldsymbol{\psi}|^2 = |\boldsymbol{\psi}_1|^2 + |\boldsymbol{\psi}_2|^2$$

即

$$I = I_1 + I_2 \tag{8.51}$$

在这种情况下，两列波叠加后的光强就是它们各自光强的简单相加，不会出现干涉现象，因而可以说，振动方向相互垂直的光是非相干的。

如果两列波的振动既不平行，也不垂直，则可将其中一列波的振动矢量（电矢量）正交分解，分解后的两个分量分别平行和垂直于另一个振动矢量，如图 8.35 所示，然后再进行叠加。设振动矢量$\boldsymbol{\psi}_1$ 沿 y 方向，将$\boldsymbol{\psi}_2$ 正交分解，即得到

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\psi}_2 = (\psi_1 + \psi_{2y})\boldsymbol{e}_y + \psi_{2x}\boldsymbol{e}_x$$

光强为

$$I = A_1^2 + A_{2y}^2 + 2A_1A_{2y}\cos\Delta\varphi + A_{2x}^2 = I_1 + I_2 + 2A_1A_2\cos\alpha\cos\Delta\varphi$$

其中，α 为两列波振动方向间的夹角，$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 为两列波的相位差。由于干涉项 $2A_1A_2\cos\alpha \cdot \cos\Delta\varphi$ 的存在，这两列光波也能产生干涉。

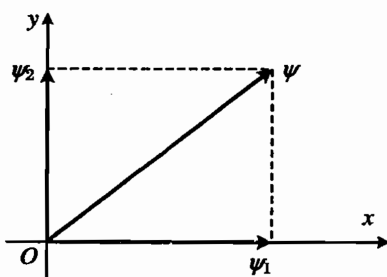


图 8.34 相互垂直的电矢量的叠加

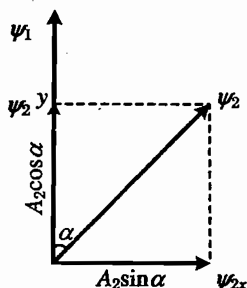


图 8.35 电矢量的正交分解与叠加

5. 两列不同频率单色光波的叠加

从数学上看，频率不同的两余弦函数相加的结果不能化简为一个简谐函数，即两列不同频率的单色波（定态光波）的叠加，其结果不再是定态光波。下面以一个简单的例子说明这一点。

考虑振动方向相同、传播方向相同、振幅相同、频率不同的两列波，即

$$\psi_1 = A_0\cos(k_1z - \omega_1t) \quad 和 \quad \psi_2 = A_0\cos(k_2z - \omega_2t)$$

合振动为

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A_0\cos\frac{(k_1+k_2)z-(\omega_1+\omega_2)t}{2}\cos\frac{(k_1-k_2)z-(\omega_1-\omega_2)t}{2}$$

$$= 2A_0\cos(k_mz - \omega_mt)\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)$$

其中

$$\bar{k}=\frac{k_1+k_2}{2},\quad \bar{\omega}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2},\quad k_m=\frac{k_1-k_2}{2},\quad \omega_m=\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$$

显然，$k_m<\bar{k}$，$\omega_m<\bar{\omega}$，即因子 $\cos(k_m z-\omega_m t)$随时间和空间的变化都比 $\cos(\bar{k}z-\bar{\omega}t)$慢。

如果将 $2A_0\cos(k_m z-\omega_m t)$看作是简谐部分 $\cos(\bar{k}z-\bar{\omega}t)$的振幅，则由于该振幅将随时间振荡，所以合成后的光波场不再是定态的，如图 8.36 所示。

但是，如果这两列波的频率(波长)相差不大，即 $\bar{\omega}\approx\omega_1\approx\omega_2$，$\bar{k}\approx k_1\approx k_2$，则 $\omega_m\ll\bar{\omega}$，$k_m\ll\bar{k}$，于是，波场 $2A_0\cos(k_m z-\omega_m t)\cos(\bar{k}z-\bar{\omega}t)$就相当于缓慢变化的因子 $\cos(k_m z-\omega_m t)$对 $\cos(\bar{k}z-\bar{\omega}t)$的振幅起调制作用，或者频率为 $\bar{\omega}$ 的波的振幅较缓慢地随时间变化，如图 8.37 所示。

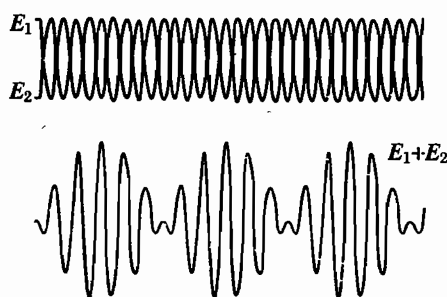


图 8.36　不同频率的光波的叠加

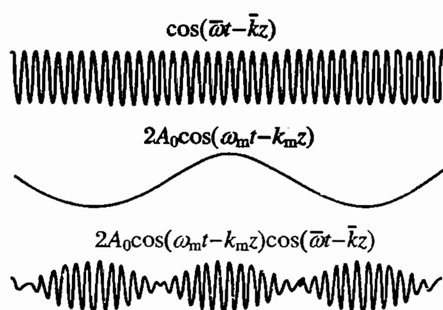


图 8.37　振幅调制

由于 ω_m，k_m 很小，故测量光强时，可以得到光强数值随时间的变化。根据上面的分析，可得到光强为

$$I=4A_0^2\cos^2(\omega_m t-k_m z)=2A_0^2[1+\cos 2(\omega_m t-k_m z)] \tag{8.52}$$

叠加之后，光波场在空间的强度分布随时间变化，并不是一个稳定的干涉场，这就是光学拍。拍频为 $2\omega_m=\omega_1-\omega_2$，即波场中某一点光强变化的时间频率。

可以得到以下结论：

(1) 不同频率的光是不相干的；

(2) 频率相近的单色光叠加形成光学拍；

(3) 不同频率的定态光波叠加得到非定态光。

6. 光的相干条件

结合前面讨论的结果，我们知道，只有满足下列条件的光才是相干光：

(1) $\Delta\varphi$ 稳定；

(2) ω 相同；

(3) 存在相互平行的振动分量。

上述三个条件，称作相干条件。

重新考察图 8.35 的例子，当两列波在叠加时，如果振动矢量间有一夹角，则叠加后的振动为

$$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}_1+\boldsymbol{\psi}_2=(\psi_1+\psi_{2y})\boldsymbol{e}_y+\psi_{2x}\boldsymbol{e}_x$$

光强为

$$I=A_1^2+A_{2y}^2+2A_1A_{2y}\cos\Delta\varphi+A_{2x}^2=I_1+I_2+2A_1A_2\cos\alpha\cos\Delta\varphi$$

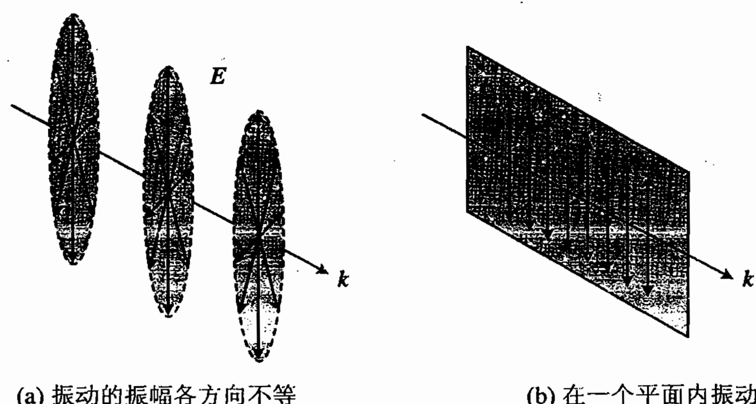
由于光强表达式中含有干涉项 $2A_1A_2\cos\alpha\cos\Delta\varphi$，这两列波也是相干的。实际上，上式中 ψ_1 与 ψ_{2y} 进行相干叠加，ψ_2 在 x 方向的分量 ψ_{2y} 没有参与干涉，这一部分的强度 A_{2x}^2 只是作为干涉后的背景出现在总的强度中。

8.6 光的偏振特性

8.6.1 横波的偏振性

光是电磁波，其电场分量 $\boldsymbol{E}$、磁场分量 $\boldsymbol{B}$ 都与光的传播方向（用波矢 $\boldsymbol{k}$ 表示）垂直，所以光波是横波。在可见光波段的电磁波不会引起大多数介质磁性的变化，即 $\mu_r=1$，所以只考虑其电矢量（光矢量）。

由于横波的振动方向与传播方向垂直，所以往往会表现出偏振特性。所谓偏振，是指振动方向相对于传播方向的不对称性。如图 8.38 所示，虽然在与传播方向垂直的各个方向都有振动，但不同方向的振幅却各不相同（图 8.38(a)）；或者，电矢量只在一个平面内有振动（图 8.38(b)）。



(a) 振动的振幅各方向不等　　(b) 在一个平面内振动

图 8.38　光的偏振性

其实，早在麦克斯韦电磁波理论建立之前，人们就已经通过实验观察意识到了光是横波。光的双散射实验装置如图 8.39 所示，一束光经散射体后，散射光向各个方向传播。如果设光是横波，即振动方向始终与传播方向垂直，则第一次散射后，在各个方向仍有光。但在与入射光垂直的方向上传播的光，其振动只有单一的方向。再经过第二次散射后，在与振动平行的方向上，则没有光，而其他方向上仍可以测到光强。实验事实验证了上述假设。

马吕斯通过另一种实验证实了光是横波，并研究了光的偏振特性（1809 年）。他通过电气石晶体观察由其他物体表面反射的光，结果发现，将电气石晶体绕着光束转动时，透过晶体的光的强度会发生改变；晶体转动一周，重新回到原来的位置时，透过晶体的光强也回到原来的数值。这说明光是横波，而且，从介质表面反射的光的振动矢量相对于传播方向的分布是不对称的。电气石晶体是一种二向色性晶体，这类晶体有一个特殊的方向，凡是从晶体中透射出来的光，其振动矢量（电场矢量）都沿着该方向，这个特殊的方向称作晶体的**透振方向**，也叫**透光轴**，

如图 8.40 所示。或者说，只有振动方向与透振方向平行的光才能从晶体透射；振动方向与透振方向垂直的光是无法透过该晶体的。除电气石晶体之外，硫酸碘奎宁晶体也是一种典型的二向色性晶体。

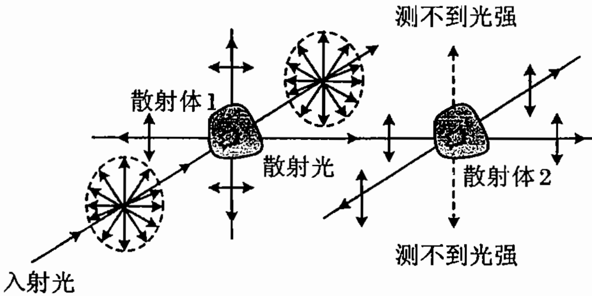


图 8.39　光的双散射实验

除了用天然的二向色性晶体获得或检验光的横波性和偏振特性外，还可以采用人工的方法。

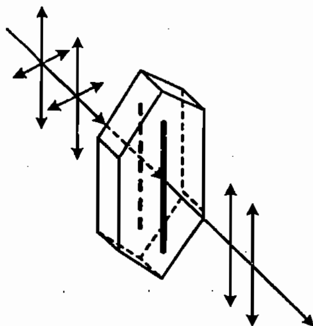


图 8.40　光通过二向色性晶体

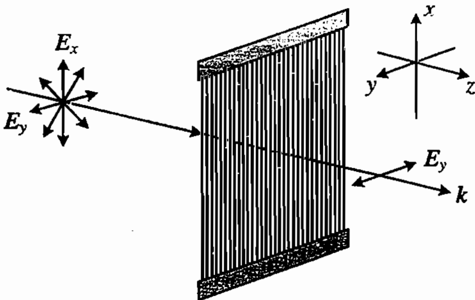


图 8.41　金质线栅

最初的器件是用拉直的细导线做成的密排线栅（例如图 8.40 中的金质线栅，金线间隔 $d = 5.08\times10^{-4}$ mm）。光通过这种线栅时，金线中的电子由于吸收了电磁场的能量而做相应的振动，这种振动由于受到金线尺度的限制，而只能沿着金线进行。因而，与导线（金线）平行的电场分量将被吸收，如图 8.42 所示。由于与导线同方向的电场被吸收，只有电矢量振动方向与导线垂直的光可以从线栅透过。

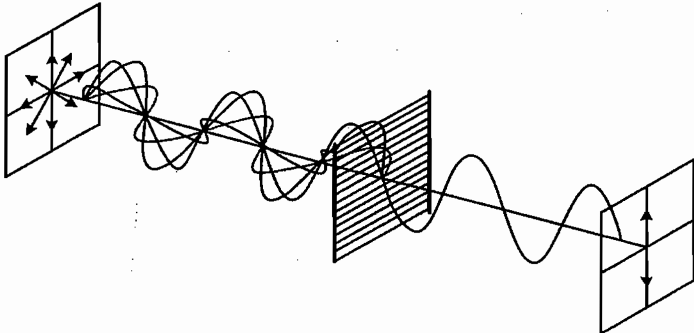


图 8.42　光通过金质线栅后光矢量振动的变化

1928年,美国哈佛大学的学生兰德发明了一种人造偏振片。将聚乙烯醇薄膜在碘溶液中浸一段时间,然后从碘液中提出,并沿着聚乙烯醇分子链的方向拉伸。由于碘原子吸附在聚乙烯醇的分子链上,拉伸后,碘原子就沿着被拉直的分子链整齐而密集地排列起来。碘原子中的电子较容易脱离其束缚成为自由电子,因此,在外电场的作用下,电子就可以沿着分子链自由运动。这样就用有机分子链制成了导电的线栅,而分子链的间隔比导线做成的密排线栅要小得多,因而,浸碘的聚乙烯醇膜对光的振动的吸收更加充分。这就是J型偏振片。到1938年,兰德又发明了H型偏振片,原理与J型偏振片的相同。

8.6.2 起偏与检偏

在偏振光中,有几个重要而常见的概念,例如起偏、检偏、起偏器、检偏器等等,以下作简单的定义和解释。

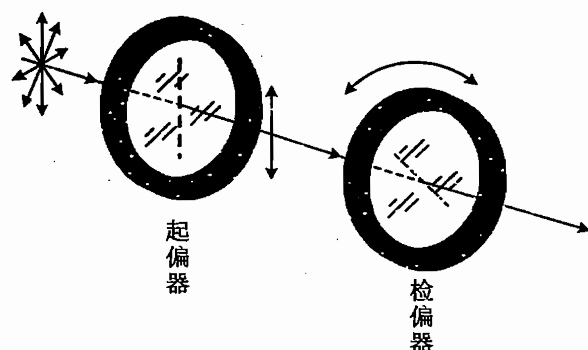


图8.43 起偏器与检偏器

起偏 通过某种方法或使用某种光学元件,使光变得具有偏振特性。

检偏 通过某种方法或使用某种光学元件,检验光的偏振特性。

透振方向 从偏振器件通过的光的电矢量的振动方向。例如,上述金属线栅中垂直于金属丝的方向就是透振方向。

用来起偏或检偏的光学元件称作起偏器或检偏器。图8.43表示光经过第一个偏振元件(起偏器)后,再用另一个偏振元件(检偏器)观察其偏振特性。

8.7 光的各种偏振态

8.7.1 普通光源的发光机制

光是电磁波。从前面的讨论,我们似乎得到了这样的结论:在考虑光的传播、叠加等物理过程时,光波与普通的电磁波没有什么区别,甚至可以将机械波的各种结论直接应用到光波之中。但是,如果稍加留意的话,我们将会发现光波具有非常明显的独立特征。

第一,从物理特征看,光波的频率非常高,对于可见光,频率基本上是10^{14} Hz。对于一般的机械波,由于其都是由机械振动产生的,所以时间频率都不高,以最常见的声波为例,人耳可听见的声波频率在20 Hz到20 kHz之间,频率高于20 kHz的机械振动称作超声波。而普通的电磁波,其波长范围通常为μm到m的量级,甚至可以达到几km的量级,所以,其频率一般低于10^7 Hz。可见,光波的频率远远大于普通的电磁波和机械波的频率。对于较低频率的振动,可以用机械或电子装置观察或记录其振动过程,例如,我们可以在示波器上看到低频振动的过程;但对于高达10^{14} Hz的振动,其远远大于电子的固有振动频率,无法用电子仪器直接观察或记

录其瞬时过程。

第二，从产生的机制看，机械波由机械振动产生。例如音叉的振动、弦的振动、簧片的振动、声带的振动等等，由于振动的过程是可控的，所以，由此而产生的机械波是可控的，即波的传播方向、振动方向、振幅、频率、相位都是可控的。电磁波由电磁振荡产生，而电磁振荡也是可以通过电路的参数控制的，所以，普通的电磁波也是可控的。

但是，光波产生的机制是完全不同的。

按照波尔的辐射理论，光是由原子或离子在跃迁过程中产生的。由量子理论，原子可以处于一系列不同的能量状态，这些状态往往是分立的、不连续的，称之为能级。当原子不受外界因素干扰或激发时，其状态是稳定的，这一稳定的状态具有最低的能量，称作"基态"。当原子受到干扰，例如从外界吸收能量后，就具有较高的能量，其状态发生变化，跃迁到某一高能量状态（高能级），这就是某个激发态，如图 8.44 所示。但激发态往往是不稳定的，经过或长或短的一段时间后，原子将会重新跃迁到基态，在跃迁过程中，将会以某种方式将自身具有的能量释放一部分。这一部分能量往往会以电磁波（光波）的形式释放，用爱因斯坦的辐射关系式可表示为

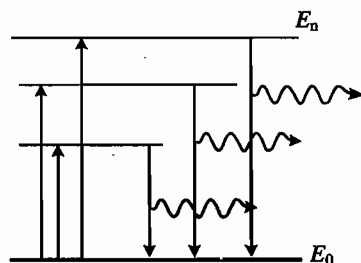


图 8.44　原子的辐射跃迁

$$\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu$$

式中，E_2，E_1 为跃迁前（激发态）和跃迁后（基态）的能量，ΔE 为跃迁前后的能量差，也就是发出的电磁辐射，即光子的能量 $h\nu$。

因此，发光是原子或离子在不同的能量状态（能级）之间跃迁的结果。

光源总是包含大量的原子，例如对固态物质而言，原子的数密度约为 10^{23} 个/cm^3，假设其中发光的原子占 0.1%～1%，则发光中心的数密度约为 10^{20} 个/cm^3，数目非常多。所以，总是有大量的原子同时发光，即在每一个任意小的时间间隔内，总是有大量的原子进行辐射跃迁，这种辐射跃迁往往是自发的，即各个发光原子之间是没有任何关联的，因此，这种辐射跃迁过程是随机的。不同原子所发的光波都有随机的传播方向、振动方向、初相位和频率。因此，不同原子在同一时刻所发出的光波是没有关联的；同一原子在不同时刻所发出的光波也是没有关联的。即普通光源所发的光都是没有关联的。

8.7.2　自然光

如前所述，普通光源的自发辐射过程是不受控制和干扰的随机过程，因而，尽管在极短的时间内，有大量光波由于原子的跃迁而发射，但是，这些光波之间没有任何关联。也就是说，这些光波的传播方向、电矢量的振动方向、相位等物理量都是随机的，相互之间没有固定的关系。

如果采用透镜或反射镜等相应的光学装置，可以将这些光波变成沿着相同方向传播的平行波列。但是，在这些大量的随机波列中，各列波的振动方向是随机的，在各个方向是均等的，因而总的来看，电矢量是相对于波矢对称分布的；同时，由于各个波列之间的相位差是随机的，所以是不相干的，光波叠加的结果是各个波列的强度相加。这种光就是自然光，日光、灯光、热辐射光等任何自发辐射光源所发出的光都是自然光。

自然光是大量原子同时发出的光波的集合。其中的每一列是由一个原子发出的，有一个偏

振方向和相位，但光波之间是没有任何关系的。因而，它们的集合就是在各个方向振动相等、相位差随机的自然光。自然光电矢量（光矢量）的分布如图 8.45 所示。

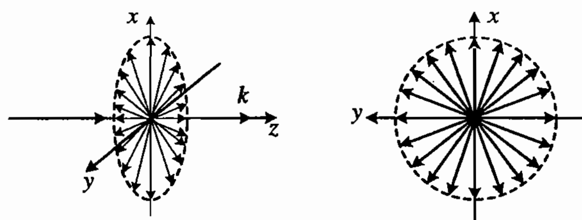


图 8.45　自然光的电矢量

实验表明，让一束强度为 I_0 的自然光通过吸收可以忽略的起偏器，如图 8.46 所示，不论起偏器的透振方向怎样旋转，透射光的光强都不发生改变，经起偏器后的光强变为

$$I = \frac{1}{2}I_0 \tag{8.53}$$

由上述实验观察到的结果可以很容易从理论上证明。设自然光沿着 z 轴方向传播，其在任一方向的振幅都等于 A_0，其中任一列光的振动方向与 x 轴的夹角为 θ，则该振动在 x 方向振动分量的振幅为 $A_x^\theta = A_0\cos\theta$，如图 8.47 所示。由于自然光中的各个波列是不相干的，可按强度进行叠加，故有

$$I_x = \int_0^{2\pi}(A_x^\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}A_0^2\cos^2\theta \mathrm{d}\theta = \pi A_0^2$$

同理，有

$$I_y = \pi A_0^2$$

而总光强

$$I = \int_0^{2\pi}A_0^2 \mathrm{d}\theta = 2\pi A_0^2$$

因此

$$I_x = I_y = I_0/2$$

即自然光通过起偏器后，如果不考虑起偏器对光强的吸收，则透射光强为入射光强的 1/2。

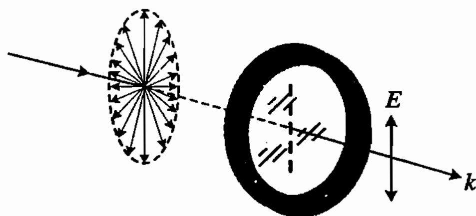


图 8.46　自然光经过偏振片后光矢量的改变

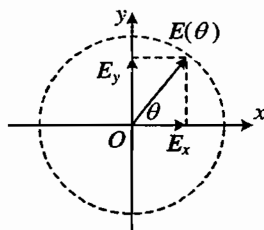


图 8.47　光矢量的正交分解

8.7.3　平面偏振光(线偏振光)

自然光经过起偏器（如二向色性晶体、偏振片等）后，由于只有平行于起偏器透振方向的电矢量能够通过，故透射光只包含单一振动方向的电矢量。这种电矢量始终在一个平面内振动的光，或者电矢量振动的投影是一条直线的光，就是平面偏振光或线偏振光。

设平面偏振光垂直地射向偏振片，且该偏振片的透振方向与入射光的偏振平面之间的夹角为 θ，如图 8.48 所示。这时可以将电矢量 $\boldsymbol{E}_0$ 正交分解为平行于偏振片透振方向的矢量 $\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 和垂直于偏振片透振方向的矢量 $\boldsymbol{E}_\perp$，而只有 $\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 可以通过，因而透射光的光强为

$$I_\theta = \langle|\boldsymbol{E}_{/\!/}|^2\rangle = \langle|\boldsymbol{E}_0|^2\rangle\cos^2\theta = I_0\cos^2\theta \tag{8.54}$$

这就是马吕斯定律。

任何一个平面偏振光，都可以分解为两个振动面相互正交的平面偏振光，如图 8.49 所示，在直角坐标系中，可以将任意方向的振动矢量 $E = A\cos(kz-\omega t)$ 分解为 E_x, E_y，即

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_x + \boldsymbol{E}_y = E_x\boldsymbol{e}_x + E_y\boldsymbol{e}_y$$

其中

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos(kz-\omega t) \\ E_y = A_y\cos(kz-\omega t) \end{cases} \tag{8.55}$$

或者

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos(kz-\omega t) \\ E_y = -A_y\cos(kz-\omega t) = A_y\cos(kz-\omega t+\pi) \end{cases} \tag{8.56}$$

而 $A_x = A\cos\theta, A_y = A\sin\theta$。式(8.55)中，两个正交分量是等相位的(同相)，表示光矢量在第一、第三象限，式(8.56)中的两个正交分量的相位差是 π(反相)，表示光矢量在第二、第四象限。

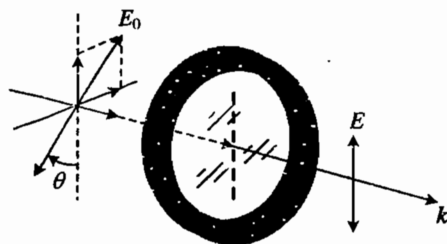


图 8.48 平面偏振光通过偏振片

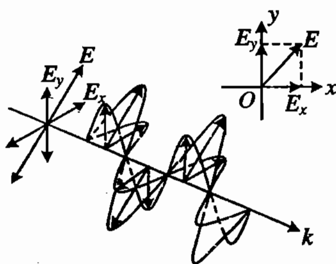


图 8.49 平面偏振光的分解

用偏振片可以获得平面偏振光。

可以用消光比来衡量偏振仪器(起偏器)的起偏效果，其定义为

$$\text{消光比} = \frac{\text{最小透射光强}}{\text{最大透射光强}}$$

【例 8.11】 设两偏振片的透振方向成 30°夹角，自然光入射，此时透过的光强为 I_1。若其他条件不变而使上述夹角变为 45°，问透射光强如何变化？

解 已知入射光为自然光，光强为 I_0，则

$$I_1 = \frac{1}{2}I_0\cos^2 30° = \frac{3}{8}I_0$$

如果上述夹角变为 45°，则

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0\cos^2 45° = \frac{1}{4}I_0 = \frac{2}{3}I_1$$

【例 8.12】 欲使一平面偏振光的振动面旋转 90°，(1) 只用两块理想的偏振片，怎样做到这一点？(2) 如果用两个理想偏振片使平面偏振光的振动面旋转了 90°，问最大的光强为原来的多少倍？

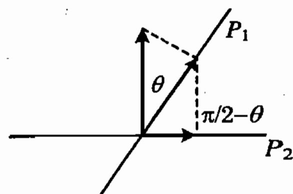


图 8.50 例 8.12 中的光路

解 (1) 使第二片的透振方向与平面偏振光的振动方向保持垂直，同时第一片的透振方向与平面偏振光的振动方向不垂直即可。

(2) 如果第一片与平面偏振光的振动方向夹角为 θ，则

$$I = I_0 \cos^2\theta \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \xlongequal{\theta = \pi/4} \frac{1}{4} I_0$$

8.7.4 部分偏振光

如果光的偏振特性介于自然光和线偏光之间，则称作部分偏振光，如图 8.51 所示。这种偏振光的电矢量的振幅在不同的方向有不同的大小，其中有两个相互垂直的方向，在这两个方向上，电矢量的振幅分别取最大值 A_{max} 和最小值 A_{min}。用偏振片检验透过的光强，在某个方向，透射光强最大，记为 I_{max}，在与其垂直的方向，透射光强最小，记为 I_{min}，则部分偏振光的偏振度定义为

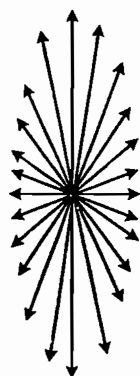


图 8.51 部分偏振光

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{8.57}$$

易知，$0 \leqslant P \leqslant 1$。如果 $I_{max} = I_{min}$，就是自然光，偏振度 $P = 0$；如果 $I_{min} = 0$，就是平面偏振光，偏振度 $P = 1$。

【例 8.13】 设一束自然光和平面偏振光的混合光通过一个可旋转的理想偏振片后，光强随着偏振片的取向可以有 5 倍的改变。求混合光中各个成分光强的比例。

解 自然光透过偏振片后，光强变为原来的 1/2；偏振光有一个可以消光的位置。因此，

$$\frac{1}{2} I_1 + I_2 = 5 \times \frac{1}{2} I_1$$

解得 $I_2 = 2I_1$，即自然光占 33.3%，偏振光占 66.7%。

8.7.5 圆偏振光

在一个与光的波矢垂直的平面内观察其电矢量，如果光的电矢量不是在一个固定的平面内振动，而是绕着传播的方向匀速旋转，且旋转中电矢量的大小保持不变，则其端点轨迹为圆（图 8.52），这就是圆偏振光。

由波的矢量叠加可以判断，圆偏振光可以分解为两个振幅相等的相互垂直的平面偏振光，这两个平面偏振光具有 $\pi/2$ 的相位差，如图 8.53 所示，即有

$$\begin{cases} E_x(z,t) = A\cos(kz - \omega t) \\ E_y(z,t) = A\cos\left(kz - \omega t \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{8.58}$$

式中，$\pm\pi/2$ 是光矢量的 y 方向分量与 x 分量的相位差，$+\pi/2$ 表示 $E_y(z,t)$ 比 $E_x(z,t)$ 滞后，$-\pi/2$ 表示 $E_y(z,t)$ 比 $E_x(z,t)$ 超前。

由于上述两分量总是在同一个空间点 z 处进行合成，而且，合成之后光的偏振特性取决于两个分量之间的相位差，所以，在不引起混淆的前提下，上式中的 kz 通常略去不写。式(8.58)可以简写为

$$\begin{cases} E_x(z,t) = A\cos\omega t \\ E_y(z,t) = A\cos\left(\omega t \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{8.59}$$

或者

$$\begin{cases} E_x(z,t) = A\cos\omega t \\ E_y(z,t) = A\cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{cases} \tag{8.60}$$

其中，$\Delta\varphi = \pm\pi/2$。这时，式(8.59)中的 $\Delta\varphi$ 表示 $E_y(z,t)$ 比 $E_x(z,t)$ 超前，要注意与式(8.58)中的相位差的含义有区别。

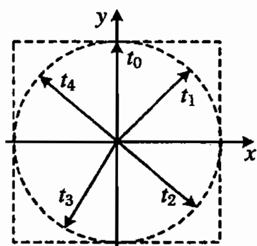


图 8.52 圆偏振光

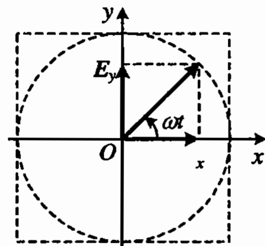


图 8.53 圆偏振光的正交分解

迎着光的传播方向观察，如果电矢量是顺时针方向旋转的，则称为右旋圆偏振光；如果电矢量按逆时针方向旋转，则称为左旋圆偏振光。容易从圆偏振光的分量表达式判断出电矢量的旋转方向，如 $\Delta\varphi = -\pi/2$，则可以得到 $t=0$，$t=\pi/(4\omega)$，$t=\pi/(2\omega)$，$t=3\pi/(4\omega)$ 等时刻光矢量的位置，如图 8.54 所示，从而判断这是一个左旋的圆偏光。即

$$\begin{cases} \Delta\varphi = +\dfrac{\pi}{2} \quad (\text{右旋}) \\ \Delta\varphi = -\dfrac{\pi}{2} \quad (\text{左旋}) \end{cases} \tag{8.61}$$

圆偏振光正确的物理图像应该这样描述：在一个与波矢垂直的固定平面内，其光矢量（电矢量）以固定的角速度绕波矢旋转。但实际上，这一现象是无法直接观测的，因为电矢量旋转的周期 $T=2\pi/\omega$ 就是其正交分量简谐振动的周期，是一个非常小的数值，约为 10^{-14} s，这么小的周期，是难以测量的。

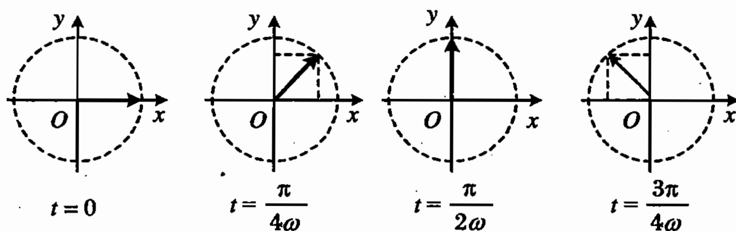


图 8.54 $\Delta\varphi=-\pi/2$ 时圆偏振光电矢量的旋转方向

用偏振片检验，圆偏光与自然光相同，即无论偏振片的透振方向如何，出射光的强度总是相等的。

8.7.6 椭圆偏振光

光矢量绕传播方向旋转，但其数值做周期性变化，矢量端点的轨迹为椭圆，如图 8.55 所示，这就是椭圆偏振光。

如图 8.56 所示，椭圆偏振光的电矢量可正交分解为

$$E = E_x e_x + E_y e_y = A_x\cos(kz - \omega t) e_x + A_y\cos(kz - \omega t + \Delta\varphi_0) e_y \tag{8.62}$$

即

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos(kz - \omega t) \\ E_y = A_y\cos(kz - \omega t + \Delta\varphi_0) \end{cases} \tag{8.63}$$

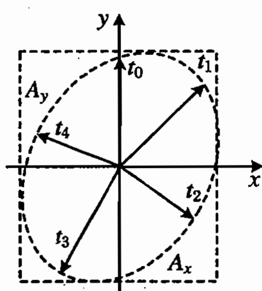


图 8.55　椭圆偏振光

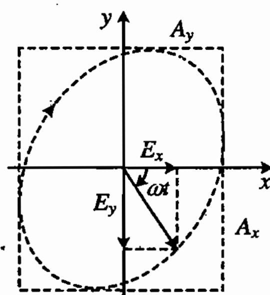


图 8.56　椭圆偏振光电矢量的正交分解

同样略去相位中的空间部分 kz，或者使 $z=0$，则得到

$$\begin{cases} E_x = A_x\cos \omega t \\ E_y = A_y\cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{cases} \tag{8.64}$$

其中，$\Delta\varphi = -\Delta\varphi_0$。

式(8.63)中，$\Delta\varphi_0$ 表示 $E_y(z,t)$ 比 $E_x(z,t)$ 的相位滞后，而在式(8.64)中，$\Delta\varphi$ 则表示 $E_y(z,t)$ 比 $E_x(z,t)$ 的相位超前。

式(8.64)中，可以消去参量 t，而得到两正交分量 E_x, E_y 的方程。将式(8.64)化为

$$\begin{cases} \dfrac{E_x}{A_x} = \cos \omega t \\ \dfrac{E_y}{A_y} = \cos \omega t\cos \Delta\varphi + \sin \omega t\sin \Delta\varphi \end{cases}$$

则得到

$$\begin{cases} \dfrac{E_x}{A_x} = \cos \omega t \\ \dfrac{1}{\sin \Delta\varphi}\left(\dfrac{E_y}{A_y} - \cos \omega t\cos \Delta\varphi\right) = \sin \omega t \end{cases}$$

将第二式中的 $\cos \omega t$ 以 E_x/A_x 替换，即可在上述方程中消去参量 t，从而有

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left[\frac{1}{\sin \Delta\varphi}\left(\frac{E_y}{A_y} - \frac{E_x}{A_x}\cos \Delta\varphi\right)\right]^2 = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

最后得到

$$\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - \frac{2E_xE_y}{A_xA_y}\cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi \tag{8.65}$$

这是一个 xOy 平面中的椭圆方程。上述公式中的电场分量 E_x, E_y 就是直角坐标系 xOy 中的坐标值。

椭圆长轴或短轴与坐标轴的夹角满足

$$\tan 2\alpha = \frac{2A_xA_y}{A_x^2 - A_y^2}\cos \Delta\varphi$$

在一个与波矢垂直的平面内观察时，椭圆偏振光的电矢量也是绕波矢旋转的，也有左旋和右旋两种情况，如图 8.57 所示。

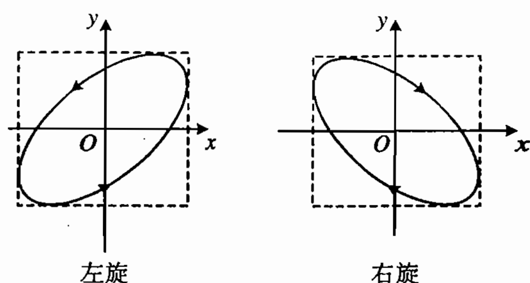


图 8.57　左旋和右旋椭圆偏振光

电矢量的椭圆的长、短轴的取向以及旋转方向是由相位差 $\Delta\varphi$ 决定的。例如，当 $\Delta\varphi=\pi/4$，处于第一象限时，分别在 $t=0$，$t=\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\Delta\varphi}{\omega}$，$t=\frac{\pi}{2\omega}$，$t=\frac{\pi}{\omega}-\frac{\Delta\varphi}{\omega}$ 等时刻作出电矢量的位置，即可看出它是右旋的(图 8.58)。同样，如果 $\Delta\varphi=7\pi/4$，或 $\Delta\varphi=-\pi/4$，即处于第四象限，画出在 $t=0$，$t=\frac{\pi}{2\omega}$，$t=\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\Delta\varphi}{\omega}$，$t=\frac{\pi}{\omega}$ 等时刻电矢量的位置，可看出它是左旋的(图 8.59)。

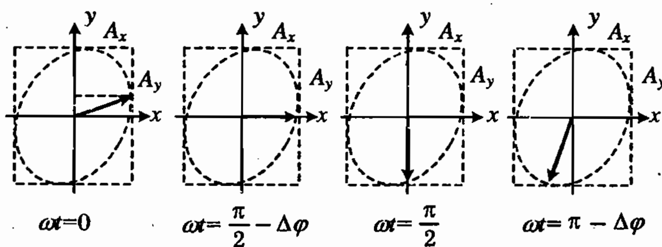


图 8.58　$\Delta\varphi=\pi/4$ 时电矢量的旋转方向(右旋)

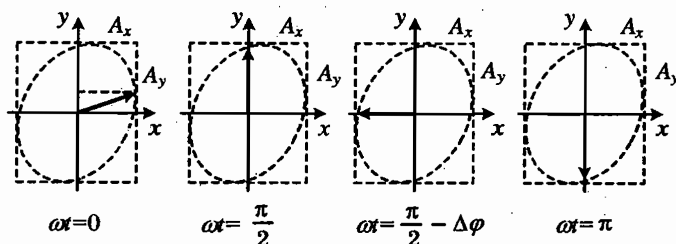


图 8.59　$\Delta\varphi=-\pi/4$ 时电矢量的旋转方向(左旋)

容易得到电矢量的旋转方向与两正交分量相位差之间的关系，即

$$\begin{cases}\Delta\varphi\ \text{在第一、第二象限，右旋}\\ \Delta\varphi\ \text{在第三、第四象限，左旋}\end{cases}\tag{8.66}$$

相位差 $\Delta\varphi$ 的取值范围还决定了椭圆长短轴的取向。例如，画出一个四边形，其边长分别为两正交分量的振幅 A_x，A_y，则椭圆与其相切。当 $\Delta\varphi$ 处于第二象限时，从 $t=0$ 时刻开始，电矢量的椭圆与四边形相切的时刻依次为 $\omega t=0$，$\omega t=\pi-\Delta\varphi$，$\omega t=\pi$，$\omega t=2\pi-\Delta\varphi$，在这些切点处，两分量的取值如下：

$$\begin{cases}E_x\xlongequal{\omega t=0}A_x>0\\ E_y=A_y\cos\Delta\varphi<0\end{cases}\quad\text{(切点在第四象限)}$$

$$\begin{cases} E_x \xlongequal{\omega t = \pi - \Delta\varphi} A_x \cos(\pi - \Delta\varphi) > 0 \\ E_y = -A_y < 0 \end{cases} \quad \text{（切点在第四象限）}$$

$$\begin{cases} E_x \xlongequal{\omega t = \pi} -A_x < 0 \\ E_y = A_y \cos(\pi + \Delta\varphi) > 0 \end{cases} \quad \text{（切点在第二象限）}$$

$$\begin{cases} E_x \xlongequal{\omega t = 2\pi - \Delta\varphi} A_x \cos\Delta\varphi < 0 \\ E_y = A_y > 0 \end{cases} \quad \text{（切点在第二象限）}$$

分别就 $A_x > A_y$，$A_x < A_y$ 画出图 8.60 所示的椭圆，可见其长轴总是在第二、第四象限。

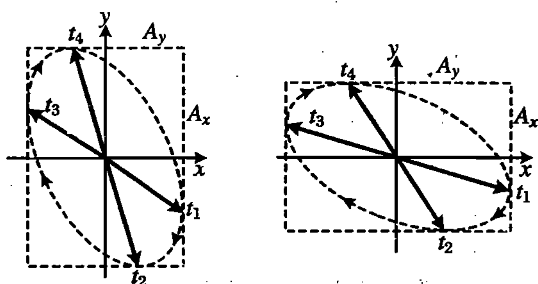


图 8.60　$\Delta\varphi$ 处于第二象限时椭圆长轴的取向

椭圆偏振光的旋转方向、长轴取向与相位差间的关系可用图 8.61 表示。

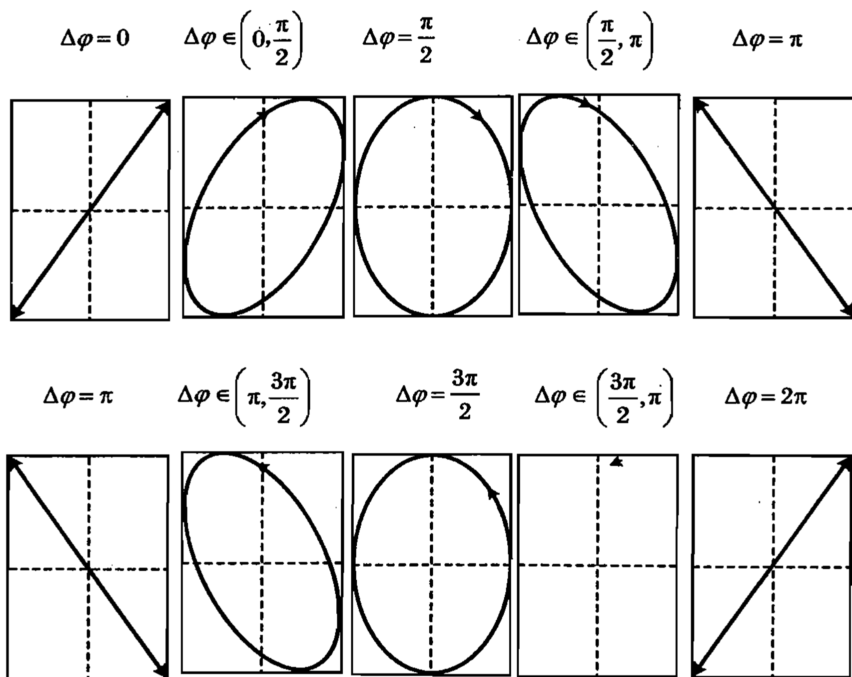


图 8.61　椭圆偏振光的旋转方向、长轴取向与相位差间的关系

当 $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ 时，椭圆的长短轴沿坐标的方向，是所谓的正椭圆。当 $A_y = A_x$ 时，正椭圆演化为圆。

通过上面的讨论，可以看出，平面偏振、圆偏振和椭圆偏振的光矢量都可以看作是两个正交分量的叠加。分量的一般形式的表达式为

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos \omega t \\ E_y = A_y \cos(\omega t + \Delta\varphi) \end{cases}$$

当 $\Delta\varphi = 0, \pi$ 时，为平面偏振光；当 $\Delta\varphi = \pm\pi/2$ 且 $A_y = A_x$ 时，为圆偏振光；当 $\Delta\varphi \neq 0, \pi$ 时，为椭圆偏振光。所以，椭圆偏振光可以看作是最一般的偏振态，在一定条件下，可以演变为圆偏振或平面偏振。正如图 8.61 所示。

【例 8.14】 一束椭圆偏振光通过一偏振片，透射光的强度将随着偏振片的透振方向的转动而变化。若测得最大的透射光强和最小的透射光强分别为 I_{max} 和 I_{min}，问当透射方向与光强最大透射方向间的夹角为 θ 时，透射光强为多少？

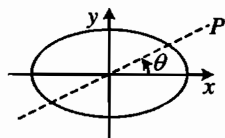


图 8.62　例 8.14 中的坐标系

解　如图 8.62 所示，取坐标系，x 轴沿椭圆长轴方向，y 轴沿椭圆短轴方向，则上述椭偏光可用分量表示为

$$\begin{cases} E_x = \sqrt{I_{max}} \cos \omega t \\ E_y = \sqrt{I_{min}} \cos\left(\omega t \pm \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

当透射方向与光强最大透射方向间的夹角为 θ 时，透射光的振幅

$$\begin{aligned} E_\theta &= E_x \cos\theta + E_y \sin\theta \\ &= \sqrt{I_{max}} \cos\theta \cos\omega t + \sqrt{I_{min}} \sin\theta \cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

这是两列相位差为 $\pm\pi/2$ 的平面偏振光的相干叠加，强度为

$$I_\theta = I_{max} \cos^2\theta + I_{min} \sin^2\theta$$

【例 8.15】 设一束椭圆偏振光与自然光的混合光沿 z 轴方向传播，通过一偏振片。当偏振片的透振方向沿 x 轴时，透射光的强度最大，为 $1.5I_0$；透振方向沿 y 轴时，透射光的强度最小，为 I_0。问：当透振方向与 x 轴成 θ 角时，透射光强是多少？与入射光中的无偏振部分相关吗？

解　椭圆的长轴沿 x 方向。设自然光的光强为 I_1，而椭偏光的分量振幅为 A_x, A_y，则

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}I_1 + A_x^2 = 1.5I_0 \\ \dfrac{1}{2}I_1 + A_y^2 = I_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A_x^2 = 1.5I_0 - \dfrac{1}{2}I_1 \\ A_y^2 = I_0 - \dfrac{1}{2}I_1 \end{cases}$$

P 与 x 轴成 θ 角，解得透射光强为

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \frac{1}{2}I_1 + A_x^2 \cos^2\theta + A_y^2 \sin^2\theta \\ &= \frac{1}{2}I_1 + \left(1.5I_0 - \frac{1}{2}I_1\right)\cos^2\theta + \left(I_0 - \frac{1}{2}I_1\right)\sin^2\theta \\ &= 1.5I_0 \cos^2\theta + I_0 \sin^2\theta \\ &= I_0(1 + 0.5\cos^2\theta) \end{aligned}$$

可见，透射光强与入射光中的无偏振部分即自然光的光强 I_1 无关。

8.8　光与物质的相互作用

光与物质的相互作用，从微观机制上看，是入射的电磁波与介质中的带电粒子之间的相互作用，表现为光的吸收、色散、散射，还有其他非线性效应等等。

8.8.1　光的吸收

1. 吸收的实验规律(线性吸收)

实验研究表明，当光强不是很大时，在透明介质中，被吸收的光强与吸收体的厚度成正比。

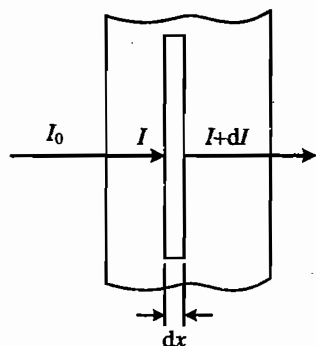


图 8.63　线性吸收

如图 8.63 所示，在各向同性均匀介质中取一薄层，厚度为 dx，光射入薄层前的强度记为 I，从薄层射出后，强度为 $I+dI$，dI 为负值，则有

$$-dI = \alpha I dx$$

解得

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \tag{8.67}$$

其中，α 为与介质有关的常数，称为吸收系数。这一规律称作布格尔定律或朗伯定律。

在溶液中，上述吸收定律依然成立，但是，吸收系数与溶液的浓度成正比，即

$$\alpha = AC$$

因而

$$I = I_0 e^{-ACx}$$

其中，A 是与溶液(溶质、溶剂等)有关的常数，C 为溶液的浓度。这一定律称作比尔定律。

2. 吸收系数与波长的关系

实验研究表明，同一种介质对不同的波长往往有不同程度的吸收，也就是吸收系数与波长有关。大体可以分为下述两种情况：

(a) 普遍吸收：吸收系数与波长无关，吸收后所有成分的光强都有相同的改变。

例如，不含杂质的玻璃对于可见光的各个波长成分都有几乎相同的吸收系数，白光通过后，所有的成分的光强都将减弱。但是，对所有波段的光波都普遍吸收的介质是不存在的。例如玻璃，对紫外和更短波长的光有较强的吸收能力。空气也是如此，其中的臭氧分子对波长小于 300 nm 的紫外线有强烈的吸收能力，因而保护了地球上的生命不受强紫外线的照射。对于红外光，大气层只是在一些狭窄的波段是透明的，这些对红外光吸收较小的波段称作“大气窗口”。

(b) 选择吸收：介质的吸收系数与光的波长有关，即介质只强烈地吸某些波长成分的光。

这是由于介质中原子的能级差正好与入射光中的某些波长的能量对应，而强烈地吸收这些波长成分。这种吸收也称作共振吸收，与吸收波长对应的光谱线称作共振线。

3. 吸收光谱

白光(连续波长)入射后，被吸收的光显示为光谱中的暗线。吸收光谱是吸收物质中的原子

吸收入射光能量的结果，因而可作成分分析。

吸收光谱都是采用透射方式测量的，所以有时也称透射光谱。

图 8.64 所示的为吸收光谱的实验装置示意图，图 8.65 为钠的吸收光谱，其中 589.59 nm 和 588.99 nm 的两条黄色光谱线就是钠光谱的 D 线。

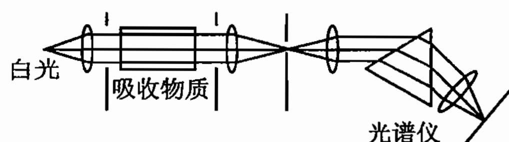


图 8.64　测量吸收光谱的实验装置

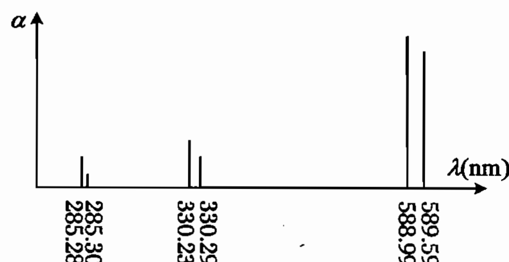


图 8.65　钠蒸气的吸收光谱

物体由于对光的吸收不同，而呈现出不同的颜色。

例如，金子是黄色的，那是由于其中的金原子对其他成分的光波吸收较强，由其表面反射的光只剩下黄色的成分。这是体色，也称表面色。但是，如果将其打制成极薄的金箔，则其反射光仍是黄色的，但透射光却是绿色的。这是由于金箔厚度极小，故对光的吸收很小，因而，除了反射黄色之外，其他颜色的光将从金箔透射，这些不同颜色的透射光混合的结果对于眼睛呈现绿色。

发光体由于辐射波长范围的不同，也呈现出不同的颜色。

例如，纯的Al_2O_3 是无色透明的，这就是刚玉或白宝石，但含有其他杂质的Al_2O_3 则有其他颜色，如：Al_2O_3 掺入 Cr^{3+} 呈红色，Al_2O_3 掺入 Fe^{3+} 和 Ti^{3+} 呈蓝色，Al_2O_3 掺入 Fe^{3+} 和 Ni^{3+} 呈黄色。

8.8.2　光的色散

1．色散现象

白光通过透明介质后，不同颜色的光会以不同的角度射出，从而在空间分开，这是牛顿最先发现的。由于不同颜色的光在空间散开了，所以这种现象称作光的色散。

这当然是由于不同波长的光具有不同的折射率，即

$$n = n(\lambda)$$

图 8.66 是一些介质的折射率与波长的关系。

光在介质中的传播速度也会随波长而改变，因而色散也可表示为

$$v = v(\lambda)$$

通常用色散率 $dn/d\lambda$ 表示折射率随波长变化的幅度。

2．色散规律

可以用牛顿正交棱镜实验非常形象地显示介质的色散规律，如图 8.67 所示，透过狭缝的白光经过透镜后，平行地射向第一块棱镜，经该棱镜色散后，不同波长的光沿水平方向散开，红光在外侧，蓝光靠里侧。这些光再射入第二块棱镜，由于第二块棱镜与第一块棱镜的棱相互垂直，所以，在第二块棱镜中，色散出现在竖直方向上，里侧的蓝光折射率大，从下方射出，而外侧的红

光由于折射率小，从上方射出，因而在屏幕上自然形成一条彩色的曲线，得到折射率 n 随波长 λ 的分布。图 8.68 是测量气态原子色散的装置。

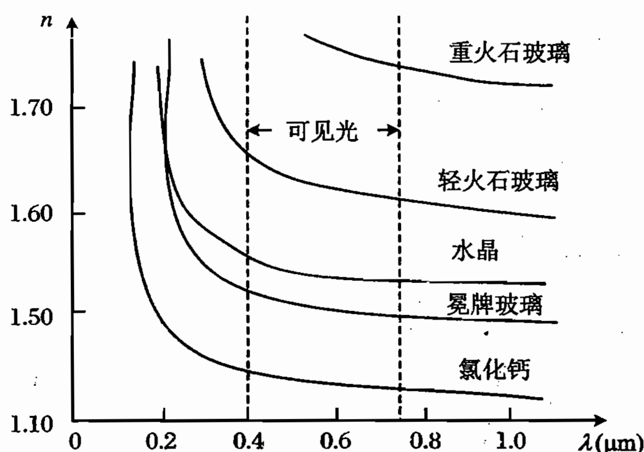


图 8.66 介质的色散曲线

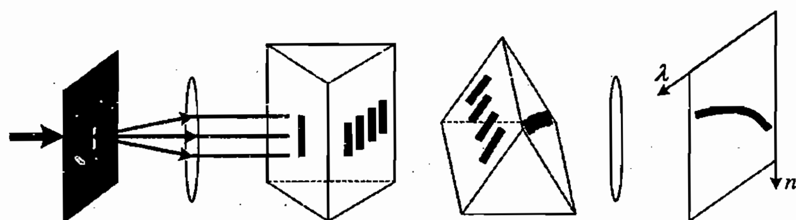


图 8.67 牛顿正交棱镜实验装置

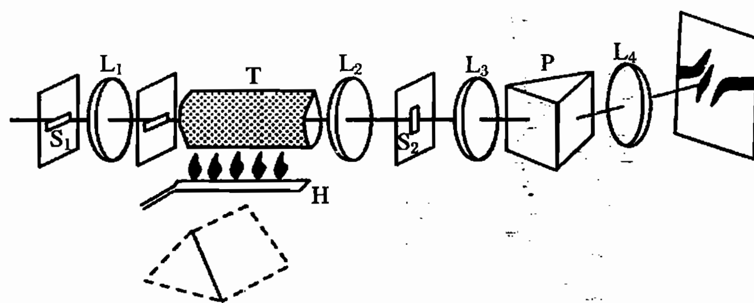


图 8.68 气态原子色散的牛顿正交棱镜实验装置

实验研究表明，折射率 n 随波长 λ 的增大而减小，而且在波长小的地方减小得快。

根据实验测得的数据，可以得到正常色散的柯西公式

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \tag{8.68}$$

其中，A，B，C 是与介质有关的常数，需要由实验测定。柯西公式是一个经验公式，在波长范围不是很大时，可以只取前两项，即

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \tag{8.69}$$

但是，实验表明，一般情况下，物质存在一个吸收带，也就是在某一个波长范围内，光由于被介质强烈吸收，而不能通过介质，所以无法测量这一波长范围内介质的折射率，光的色散在这一区域的表现称为反常色散，如图 8.69 所示。

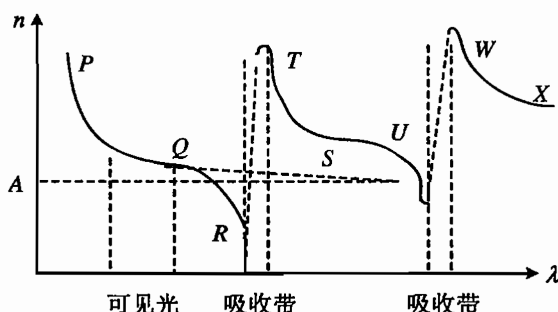


图 8.69 正常色散与反常色散

8.8.3 光的散射

1. 散射现象

入射光与介质中的带电粒子相互作用，带电粒子在入射光的激发下做受迫振动，发出电磁波，这是有真实扰动源的光波，有时也称作次波，但与惠更斯所引入的次波是不同的。如果介质是均匀的，则所发出的电磁波经叠加后，总是有确定的方向，即除沿着入射光原来的方向有光继续传播之外，其他方向是没有光的；但如果介质是不均匀的，则从介质中发出的次波在其间其他方向不能完全抵消，可以向任意方向传播，这就是散射，所以，光在密度不均匀的介质中总能产生散射。

根据散射机制的不同，主要有：

(a) 悬浮质点的散射：由均匀分布或悬浮在介质中的质点，例如空气中的尘埃、溶液中的胶体等产生的散射。

(b) 分子散射：虽然介质是均匀的，但是，由于分子的热运动，会在其中产生密度的起伏，从而产生散射。

2. 散射定律

(1) 瑞利散射

当散射体的尺寸小于波长时，入射光中不同波长成分的光有不同的散射，实验和理论研究表明，散射光强与入射光波长的 4 次方成反比，即 $I \propto \lambda^{-4}$。

例如，大气中的分子以及其中细小的尘埃颗粒会对日光产生明显的散射。如果没有大气，空中没有散射光，则天空的背景应当是黑的，这就是宇航员在大气层外和月球上所见到的景象。我们在白昼之所以看得见明亮的天空，就是由于日光受到大气的散射，而这些被散射后的光从四面八方进入我们的眼睛。晴朗的天空呈现蓝色，是因为白光中的短波成分散射较强，因而，在偏离太阳直射的方向，总是蓝紫色的成分要比红黄色的成分多。而旭日和落日之所以是红彤彤的，那是由于早晚太阳斜射向地面，所经历的大气层的厚度要比正午时分厚得多，因而日光中的短波被大量散射，沿着原来方向前进的主要是其中长波成分的光。相比较而言，正午时分，太阳

直射地面，阳光所经过的大气层的厚度比较薄，对短波的散射没有早晚强烈，因而太阳是耀眼的白色。

(2) 德拜散射

当散射体颗粒度大于波长时，散射光强对波长的依赖性不强，各个波长成分的散射光强差别不大。

云雾由水滴组成，这些水滴的直径可以与光的波长相比，因而对光的散射不再遵循瑞利散射定律，而要服从德拜散射规律，所以我们看到的云是白色的。当空气中的悬浮颗粒较多时，德拜散射起的作用也比较大，这时也看不见湛蓝的天空了，而是白蒙蒙的。注意观察吸烟者，会发现从烟头处冒出的是缕缕青烟(蓝色)，而从吸烟者的口鼻出来的则是白烟。这是因为烟头冒出的烟中所含的多是燃烧后的分子，从而引起瑞利散射；而从口鼻出来的烟中则含有大量的水汽，从而导致德拜散射。

散射光强与波长以及散射物大小的关系可用图 8.70 表示，其中 a 为散射体的线度。

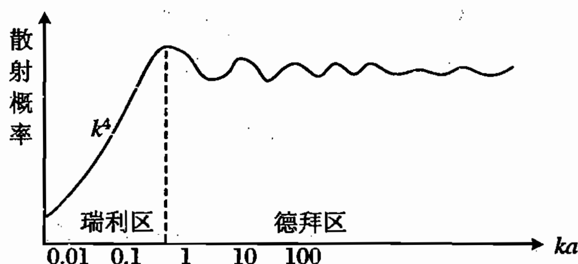


图 8.70　瑞利散射与德拜散射

当 $a<0.3\frac{\lambda}{2\pi}$时，$\frac{2\pi}{\lambda}a=ka<0.3$，发生瑞利散射。

当 $a>0.3\frac{\lambda}{2\pi}$时，$ka>0.3$，发生德拜散射。

第9章 光的干涉

9.1 杨氏干涉与相干光的获得

对于机械波和无线电波，很容易实现相干，而光波的相干却只有采用特殊的装置才能实现。因此光的相干性是一个非常重要的概念。1801年，托马斯·杨首次观察到了光的干涉，从而证明了光的波动性。我们无法知道是怎样的灵感驱使他实现了光的相干，但是，通过对他的实验装置的分析，我们可以对光的相干性的物理本质有深刻的了解。

人们不禁要问，惠更斯、牛顿、胡克等等都是取得代巨大成就的物理学家，而光的双缝干涉实验的装置和方法又是如此简单，为什么在经历了百年之久才得以实现呢？

这是由光的特性和光源的发光机制所决定的。

9.1.1 普通光源的相位

正如前一章所指出的，当原子从较高的能量状态跃迁到较低的能量状态时，可以通过发光的形式释放能量，即发光是原子在不同的能量状态之间跃迁的结果。

光源中总是包含大量的原子，总是有大量的原子同时发光，不同原子所发的光波都有随意的传播方向、振动方向、相位和频率。虽然所有的原子都在相同的能级之间跃迁发光，以及所发出的光具有相同的频率，但它们的相位却是无关的。这种情况下，虽然其中的任意两列光波叠加(图9.1)之后，强度总可以表示为

$$I_{ij} = A_i^2 + A_j^2 + 2A_iA_j\cos\Delta\varphi_{ij}$$

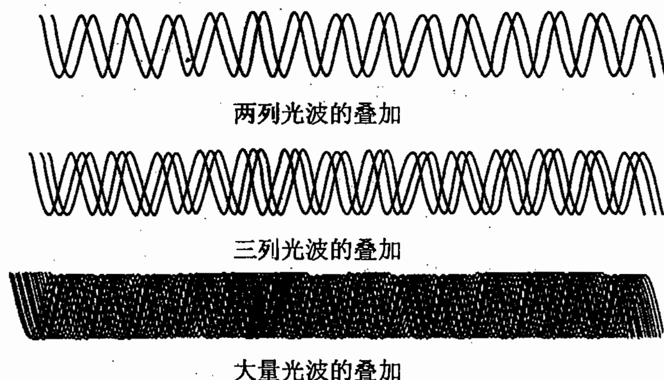


图9.1 实际光源发出的光波及其相位特征

但对大量的光波而言，任意两列波的相位差 φ_{ij} 却是随机的，因此，$\cos\Delta\varphi_{ij}$ 就在$(-1,+1)$间随机取值，最后，会相互抵消，即大量随机的、相位无关联的光波叠加之后，干涉项的平均值等于零。总的光强就等于各列光波的强度之和。这就是非相干叠加，或者说，实际光源所发出的光波都是不相干的，叠加之后，不会出现干涉现象。

光源中大量不同原子在同一时刻所发出的大量的光波之间，由于相位差都是随机的，所以是不相干的；同一原子在不同时刻所发出的光波也是不相干的。即普通光源所发的光都是不相干的。因此，在通常情况下看不到光的干涉。即普通光源所发的光在相遇时总是强度相加，不会由于干涉而出现光强的重新分布。

9.1.2 相干光的获得

对于普通的光源，要想得到相干光，只有一种方法，就是采用分光波的装置，设法将同一个原子在同一时刻所发出的一列光波分为几部分，这几部分光波由于来自同一列光波，所以具有相同的频率、固定的相位差，而且存在相互平行的振动分量，从而就是相干的，这就是干涉的物理本质。所以，也可以说，干涉是一列光波自己和自己的干涉，也只有自己和自己之间才有可能发生干涉。

9.1.3 杨氏干涉

杨氏干涉实验装置可以用图 9.2 表示，普通光源如日光、灯光，甚至烛光等等，先经过一个不透光挡板的狭缝，再经过一个不透光挡板的双狭缝，则在双缝之后的接收屏上就可以观察到明暗交错的干涉条纹。

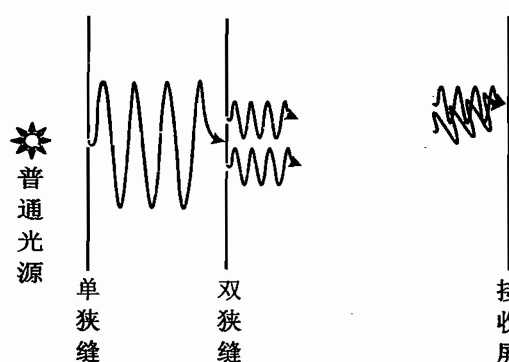


图 9.2　杨氏干涉实验中分光波示意图

可以将单狭缝看作是很细的缝光源或线光源，发出的一列光波到达双缝，则被分成两部分，或者，双缝可以看作是两个新的线光源。但是，由于这两个光源所发出的光波都是从一列光波中分出来的，所以是相干的，即双缝是两个相干的光源。

杨氏干涉的物理过程可以这样描述：光源所发出的大量光波中的每一列经过上述装置后，便为两列相干光，进行相干叠加，形成一个干涉花样，即形成一个光强的分布。这是第一个过程，可以用数学表达式表示如下：

在时刻 t，光源中第 i 个原子跃迁发出的波记为 U_i，该列波经分光装置后分为 U_{i1}，U_{i2} 两部分。这两部分到达场点 P 时振幅分别为 A_{i1}，A_{i2}，相位差为 $\Delta\varphi_i$，这两个相干的波列在 P 点的干涉强度为 $I_i=A_{i1}^2+A_{i2}^2+2A_{i1}A_{i2}\cos\Delta\varphi_i$。但是，同一时间总是有大量的原子跃迁，并发出大量的互不相干的波列。每一个波列到达场点 P 都经历一个自我干涉的过程。

不同的光波之间，由于是不相干的，故直接进行光强相加，这是第二个过程，即 $I=\sum_{i=1}^{N}I_i$。

由干涉装置可以看出，式中的相位差 $\Delta\varphi_i$ 取决于单缝、双缝、场点 P 的相对位置，所以，在同一个干涉装置中，对于所有波列，上述的 $\Delta\varphi_i$ 都是相同的，即可表示为 $\Delta\varphi_i=\Delta\varphi$。所有原子

发出的光波在 P 点形成的总的干涉强度为

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} (A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + 2A_{i1}A_{i2}\cos\Delta\varphi_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (A_{i1}^2 + A_{i2}^2) + 2\cos\Delta\varphi \sum_{i=1}^{N} A_{i1}A_{i2}$$

这就是各自干涉后所形成的干涉花样的强度的叠加。

9.1.4 干涉的特点

在对上述杨氏干涉过程的分析中，我们将屏上的每一个小孔(或狭缝)看作是一个新的点光源(或线光源)，即认为每一个孔(或狭缝)是足够小的，其中只有一个光源，发出一列光波。由此也可以得出以下结论：

干涉是一列一列分立的光波之间的相干叠加；

干涉是一列光波自己和自己的干涉；

干涉的结果使得光的能量在空间重新分布，形成一系列明暗交错的干涉条纹；

干涉之后的光波场仍然是定态波场。

9.2 两列相干光的干涉花样

9.2.1 两个点光源的干涉

设有两个相干的点光源 S_1, S_2，例如杨氏干涉中的双孔，各自发出球面波，在场点(即观察点)P 相遇，如图 9.3 所示，则在 P 点两列波各自的振动为

$$\psi_1(P) = A_1(P)\cos(k_1 r_1 - \omega t + \varphi_{01})$$

$$= A_1(P)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_1 r_1 - \omega t + \varphi_{01}\right)$$

$$\psi_2(P) = A_2(P)\cos(k_2 r_2 - \omega t + \varphi_{02})$$

$$= A_2(P)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_2 r_2 - \omega t + \varphi_{02}\right)$$

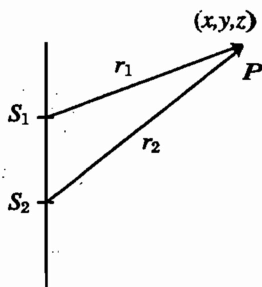


图 9.3 点光源到场点 P 的光程

其中，λ 为真空中的波长。可设初相位均为零，则相位差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_2 r_2 - n_1 r_1) \qquad (9.1)$$

其中，$n_2 r_2, n_1 r_1$ 为光程，那么 $n_2 r_2 - n_1 r_1$ 就是两列光波的光程差，记作

$$\Delta L = n_2 r_2 - n_1 r_1 \qquad (9.2)$$

如果是在真空中，$n_2 = n_1 = 1$，则

$$\Delta L = r_2 - r_1, \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

由式(8.49)，得干涉的光强为

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right]$$

由于空间各处的光程差不等，故在干涉场中会出现明暗交错的干涉条纹。

在满足$(2\pi/\lambda)(r_2 - r_1) = 2j\pi$处，干涉相长，出现亮条纹，即

$$\Delta L = r_2 - r_1 = j\lambda \tag{9.3}$$

其中，$j = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \cdots$，称作干涉级数。

在满足$(2\pi/\lambda)(r_2 - r_1) = (2j+1)\pi$处，干涉相消，出现暗条纹，即

$$\Delta L = r_2 - r_1 = (2j+1)\frac{\lambda}{2} \tag{9.4}$$

由式(9.3)和(9.4)，可知亮条纹和暗条纹在空间形成一系列的双叶旋转双曲面(或者称作双叶旋转双曲面族)，在平面接收屏上呈一组双叶双曲线，明暗交错分布，如图 9.4 所示。干涉条纹为非定域的，因为在空间各处均可见到。

下面讨论满足傍轴条件时干涉花样的特征。

如图 9.5 所示，对于距离为 d 的两个点光源的干涉，如果物点和场点都满足近轴条件，注意到此时 $z = D, x = \pm d/2, y = 0$，则从两点发出的光波到屏上 P 点的光程分别为

$$r_1 = D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D} - \frac{dx'}{2D}$$
$$r_2 = D + \frac{(d/2)^2 + x'^2 + y'^2}{2D} + \frac{dx'}{2D}$$

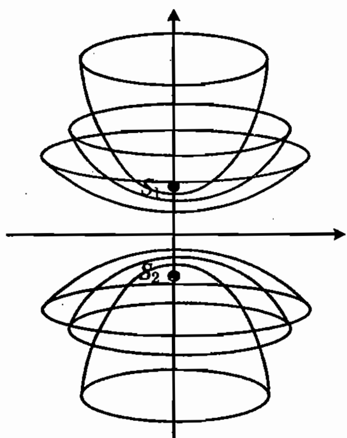


图 9.4　双叶旋转双曲面族

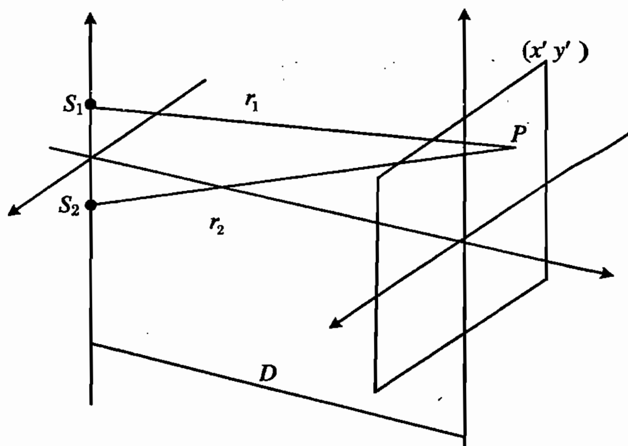


图 9.5　傍轴条件下的双孔干涉

光程差为

$$\Delta L = r_2 - r_1 = \frac{dx'}{D} \tag{9.5}$$

在 P 点的相位差为

$$\Delta\varphi = k\Delta L = k\frac{dx'}{D} = \frac{2\pi dx'}{\pi D} \tag{9.6}$$

式(9.6)说明，相位差只与 x 有关，于是，在接收屏上一个不大的区域内，干涉花样是一系列等

间隔的平行直条纹(图 9.6)。亮条纹的中心位置由$\frac{kd}{2D}x'=j\pi$决定,即

$$x'_j = j\frac{D}{d}\lambda \tag{9.7}$$

暗条纹的中心位置由$\frac{kd}{2D}x'=\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi$决定,即

$$x' = \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{D}{d}\lambda \tag{9.8}$$

注意,亮条纹的 0 级在干涉装置的中心处,而暗条纹如果也要对称分布的话,应该有

$$x' = \left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{D}{d}\lambda \quad (j=1,2,3,\cdots),$$

$$x' = \left(j+\frac{1}{2}\right)\frac{D}{d}\lambda \quad (j=-1,-2,-3,\cdots)$$

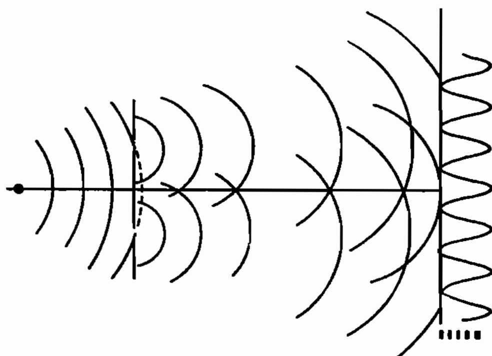


图 9.6 杨氏干涉的光强分布

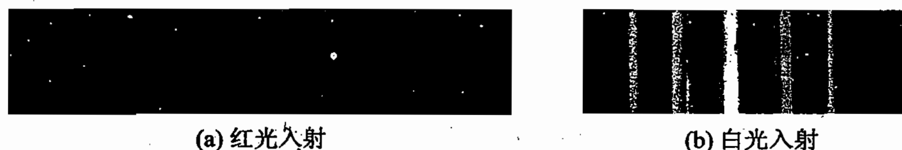
相邻亮(暗)条纹的间距由$\frac{kd}{2D}\Delta x'=\pi$决定,其值为

$$\Delta x' = \frac{D}{d}\lambda \tag{9.9}$$

9.2.2 两个线光源的干涉(双缝干涉)

如果将两个点光源沿着相互平行的直线扩展,就得到两个线光源,两条平行的透光狭缝就是这种情形。此时,干涉场中不同 y 值处的复振幅相等,因而在接收屏上得到一系列相互平行的直条纹,明暗交错。满足近轴条件时,亮条纹的位置、暗条纹的位置、亮(暗)条纹的间距分别由式(9.7)~(9.9)决定。

与双孔干涉不同的是,由于缝可以使更多的光透过,所以干涉花样要比双孔明显得多,而且双缝干涉的条纹是一系列等间隔的平行直条纹,沿着缝的方向可以延伸得较长。图 9.7(a)和(b)分别表示单色光和白光的杨氏双缝干涉花样。



(a) 红光入射　　(b) 白光入射

图 9.7 杨氏双缝干涉花样

例如,设接收屏到双缝的距离为 $D=2$ m,双缝的间距为 $d=1$ mm,对于 $\lambda=500$ nm 的光,干涉条纹的间隔为 $\Delta x'=\frac{2\times10^3}{1}\times500\times10^{-6}=1$ (mm)。

若两列波的初相位不为零,则条纹形状不变,只是整体沿 x 轴方向移动。

若光源和接收屏之间充满介质,则因为光程 $x'=j\pi\frac{2D}{kd}=j\frac{D}{d}\frac{\lambda}{n}$,所以条纹的间距为

$$\Delta x = \frac{D}{d}\frac{\lambda}{n} \tag{9.10}$$

式中,n 为介质的折射率。

9.2.3 干涉条纹的可见度(反衬度)

双孔或双缝的干涉花样是一系列明暗交错的条纹，由前面的推导，可以看出条纹的间隔与干涉装置有关，同时还应当注意，两相干光源的强度不相等对干涉条纹也有一定的影响。前面的推导中假设两光源强度相等，因而在暗条纹的中心处，由于干涉相消，光强为零，故干涉花样明暗反差很大，条纹清晰可辨。但是，如果两缝的情况不相同，例如缝宽不等，或对光的透过率不同，则从每一条缝出射的光的复振幅也不相等，则此时暗条纹处光强不再为零，干涉花样的亮暗条纹就不再那么明显。为了衡量干涉花样的明暗反差程度，下面引入可见度的概念。

在接收屏上一选定的区域中，取光强最大值 I_{max} 和最小值 I_{min}，则可见度定义为

$$\gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{9.11}$$

可见度也称作反衬度。由干涉的特性，可得到

$$I_{max} = (A_1 + A_2)^2, \quad I_{min} = (A_1 - A_2)^2$$

则有

$$\gamma = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} = \frac{2\dfrac{A_1}{A_2}}{1 + \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)^2} \tag{9.12}$$

当 $A_1 = A_2$ 时，$\gamma = 1$，即两列光的强度相当时，可见度最大；当 $A_1 \gg A_2$ 或 $A_1 \ll A_2$ 时，$\gamma \approx 0$，即两列光的强度相差悬殊时，可见度最小。

如果记 $I_0 = I_1 + I_2 = A_1^2 + A_2^2$，则屏上各处条纹的强度可表示为

$$\begin{aligned} I &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi \\ &= (A_1^2 + A_2^2)\left(1 + \frac{2A_1A_2}{{A_1}^2 + {A_2}^2}\cos\Delta\varphi\right) \\ &= I_0(1 + \gamma\cos\Delta\varphi) \end{aligned} \tag{9.13}$$

9.2.4 两列平行光的干涉

设两列同频率单色光的振幅分别为 A_1, A_2；初相位分别为 $\varphi_{10}, \varphi_{20}$，波矢方向分别用角度表示为$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$，$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$。

如图 9.8 所示，在 $z=0$ 的波前，即 xOy 平面上，上述两列波的相位分布为

$$\varphi_1(x,y) = k(\cos\alpha_1 x + \cos\beta_1 y + \cos\gamma_1 \cdot 0) + \varphi_{10}$$

$$\varphi_2(x,y) = k(\cos\alpha_2 x + \cos\beta_2 y + \cos\gamma_2 \cdot 0) + \varphi_{20}$$

可求得在点 $P(x,y)$ 处的相位差为

$$\Delta\varphi(x,y) = k(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_1)x + k(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)y + (\varphi_{20} - \varphi_{10})$$

$P(x,y)$ 处的强度为

$$I(x,y) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi = (A_1^2 + A_2^2)[1 + \gamma\cos\Delta\varphi(x,y)]$$

由相位差可确定出现亮暗干涉条纹的条件为

$$k(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_1)x + k(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)y + (\varphi_{20} - \varphi_{10}) = \begin{cases} 2j\pi \\ (2j+1)\pi \end{cases} \tag{9.14}$$

即亮暗条纹都是等间隔的平行直线，形成平行直线族，斜率为

$$= \frac{\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1}{\cos\beta_2 - \cos\beta_1} \tag{9.15}$$

条纹间隔为

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{2\pi}{k(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)} = \dfrac{\lambda}{\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1} \\ \Delta y = \dfrac{2\pi}{k(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)} = \dfrac{\lambda}{\cos\beta_2 - \cos\beta_1} \end{cases} \tag{9.16}$$

条纹的空间频率为

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{\Delta x} \\ f_y &= \frac{1}{\Delta y} \end{aligned} \tag{9.17}$$

如图 9.9 所示。

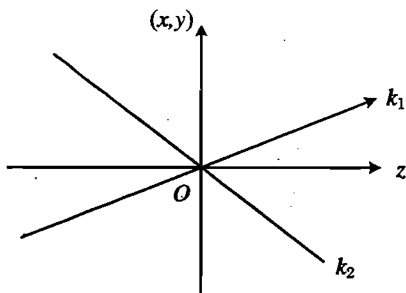


图 9.8　平行光在波前 $z=0$ 处叠加

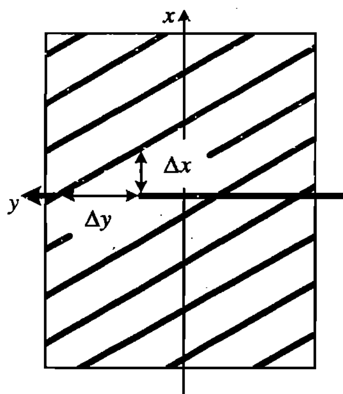


图 9.9　平行光的干涉条纹

【例 9.1】　一束 He - Ne 激光(波长为 632.8 nm)被对称放置的反射镜分为两束,射向一接收屏。设图 9.10 中射向接收屏的平行光束与接收屏法线的夹角 $\theta=30^\circ$,求屏上干涉条纹的间隔。

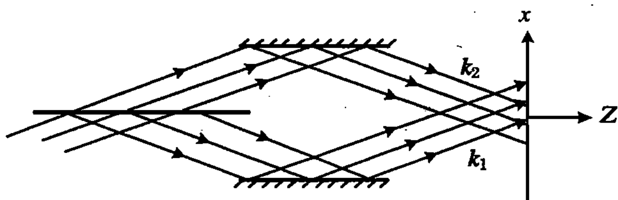


图 9.10　例 9.1 中的光路

解　在这种情况下,入射光线与各坐标轴的夹角分别为

$\alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 120^\circ, \beta_1 = \beta_2 = 0^\circ,$

$\gamma_1 = 30^\circ, \gamma_2 = 150^\circ$

代入式(9.16),可得

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{\lambda}{\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1} = 632.8\ \text{nm} \\ \Delta y = \dfrac{\lambda}{\cos\beta_2 - \cos\beta_1} = \infty \end{cases}$$

从而知屏上的干涉条纹是与 y 轴平行的直条纹。

9.3 光的干涉装置概述

按照光的相干性的要求及光源的特点，一列光只有和它自身才是相干的。因此，干涉装置就是要设法将一列波分解为相干的几个部分，然后才能进行相干叠加。

将光波进行分解的方法有许多种。第一种，就是在光波场中的一个波列上取两个或几个点，如图 9.11 所示，将这些点作为新的光源，这些新光源可以取在一列波（平面波、球面波等）的波面上，即等相位面上，但一般情况下，不容易也不必要这样做。由于光场中的任意一个面都称作波前，我们可以将这些点所在的面，可能是平面，也可能是曲面，看作一个波前，只要这个波前处在同一列波上即可。那么，这种将波前分解，然后获得相干光的装置就称作分波前的干涉装置。杨氏双孔或双缝干涉就是最典型的分波前的干涉装置。

第二种，是将整个波列分解，例如利用光波在介质分界面的反射和折射，将入射光分为入射和折射（透射）两部分，这两部分往往不能相遇，因而，需要经过多次的反射和透射，如图 9.12 所示。这种分解方式是将光的能量分为几个部分，而光的能量与其振幅成正比，所以这种装置称作分振幅的干涉装置。

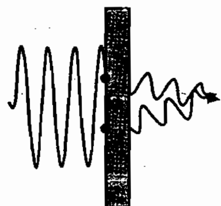


图 9.11　分波前的干涉装置

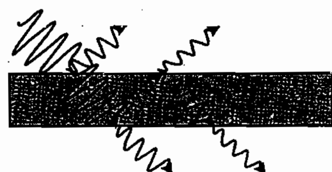


图 9.12　分振幅的干涉装置

通过两种分光的方法对比，不难看出，由于杨氏双孔和双缝干涉分波前的方法只利用了入射光的一小部分，其余的能量都被遮挡掉了，所以效率是比较低的，虽然在物理上有较好的意义，但多数情况下并不适用。因此实际应用的分波前的干涉装置都是在杨氏装置的基础上改进的。而分振幅的装置，由于有相当大的一部分光的能量用以产生干涉，因而可以充分利用入射光的能量，所以在实际中有极广泛的应用。

9.4 分波前的干涉装置

9.4.1 菲涅耳双面镜

如图 9.13 所示，两个反射镜 M_1，M_2 之间有较小的夹角 ε，光源 S 位于两反射镜的上方。在光源与接收装置（例如接收屏）间有一个不透光的挡板，使得光不能直接射到接收屏上，而只有经过两镜反射的光才能到达接收屏。对接收屏而言，经反射镜 M_1，M_2 射过来的光就相当于

分别是从 S 的像 S_1，S_2 射过来的，而 S_1，S_2 是同一个光源的像，因而是相干的。这两列反射光在屏幕上的交叠区域进行相干叠加，产生干涉条纹。

因为反射镜的大小总是有限的，所以反射光只能照射接收屏上有限大小的区域，而两列光的交叠区域还要小，因而只能在屏幕上一个较小的区域内产生干涉。

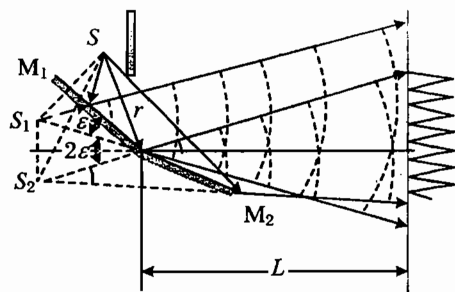


图 9.13　菲涅耳双面镜

经过简单的几何推算，可以得到两相光源 S_1，S_2 对反射镜交线的张角等于反射镜之间夹角的 2 倍，即 2ε。如果两镜的交线到光源 S 的距离为 r，到屏幕的距离为 L，则像光源到屏幕的距离为 $L + r\cos\varepsilon \approx L + r$，而两像光源间的距离为 $2r\sin\varepsilon$，将该装置与杨氏双缝干涉比较，在满足近轴条件时，相当于双缝的间距为 $d = 2r\varepsilon$，双缝到接收屏的距离为 $D = L + r$，所以条纹的间距为

$$\Delta x = \frac{L + r}{2r\varepsilon}\lambda \tag{9.18}$$

【例 9.2】　设菲涅耳双面镜的夹角为 20′，缝光源距两镜的交线 10 cm，接收屏幕与光源的两个像点的连线平行，且与两镜连线间的距离为 210 cm，光波长为 600.0 nm。问：

(1) 干涉条纹的间距为多少？

(2) 如果光源到两镜交线的距离增大 1 倍，干涉条纹有何变化？

(3) 如果光源与两镜交线的距离保持不变，而在横向有所移动，干涉条纹有何变化？

(4) 如果要在屏幕上观察到有一定反衬度的干涉条纹，所允许的缝光源的最大宽度是多少？

解　(1) 利用上述公式，可得

$$\Delta x = \frac{L + r}{2r\varepsilon}\lambda = \frac{210 + 10}{2 \times 10 \times \frac{20}{60} \times \frac{\pi}{180}} \times 600.0\,(\mathrm{nm}) \approx 1.13\,(\mathrm{mm})$$

(2) $\Delta x' = \dfrac{L + r'}{2r'\varepsilon}\lambda = \dfrac{210 + 20}{2 \times 20 \times \frac{20}{60} \times \frac{\pi}{180}} \times 600.0\,(\mathrm{nm}) \approx 0.59\,(\mathrm{mm})$。

(3) 光源做横向移动时，由于距离 r 保持不变，所以干涉条纹的间距没有变化。但是，由于光源的移动引起了两个像光源的整体平移，所以屏上的条纹也会整体平移。

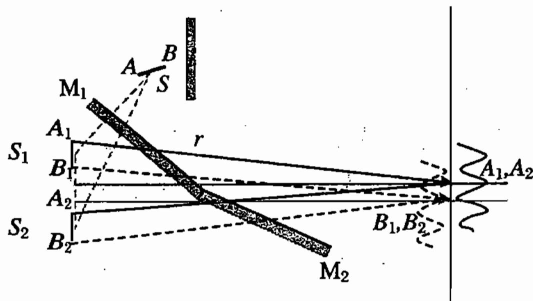


图 9.14　例 9.2 中的光路

(4) 光源有一定宽度，所成的像亦有一定宽度，即光源 AB 的像光源为 A_1B_1 和 A_2B_2。注意，A_1，A_2 对应于光源上的 A；而 B_1，B_2 对应于光源上的 B。所以，A_1，A_2 是一对相干光源，而 B_1，B_2 是另一对，A_1，A_2 和 B_1，B_2 之间是不相干的。由图 9.14 可见，这两对像光源的对称轴是错开的，错开的间距等于缝光源的宽度，因而各自的干涉条纹也错开，就是各自的 0 级向上或向下移动了半个缝光源的宽度。当两

套干涉条纹错开半个条纹间距时，由于一套的亮纹恰与另一套的暗纹重叠，条纹不可分辨。因而光源的宽度要小于(1)或(2)中条纹间距的 1/2。

而实际上，由于每一光源上 A，B 两点之间连续分布着无数多个不相干的点光源，所以这些条纹叠加的结果使得光源的宽度小于(1)或(2)中条纹的间距，但不是条纹间距的 1/2。

9.4.2 劳埃德镜

在平面反射镜的上方有一光源，则光源发出的光，一部分直接到达接收屏，另一部分经镜面反射后到达接收屏，在它们重叠的区域产生干涉。光源 S 与它的几何像 S'，等效于杨氏干涉装置中的双孔或双缝，如图 9.15 所示。

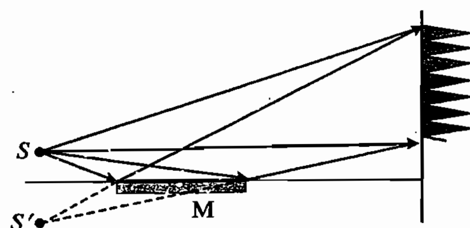
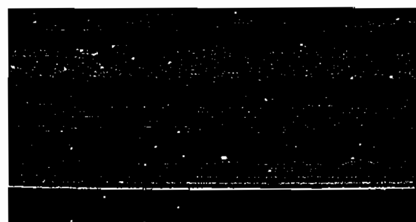


图 9.15　劳埃德镜

与菲涅耳双面镜相比，干涉光中，有一列没有经过镜面反射而是直接到达了屏幕。这样一来，就产生了不同的结果。实验研究发现，如果让反射镜的前端抵住接收屏，则镜与幕的接触点应该是整个装置的对称中心，按照杨氏干涉的原理，这应该是 0 级亮条纹的位置。然而，实验表明，这里却出现了暗纹，如图 9.16 所示。这当然不是由测量上的误差而产生的，而是有物理上的原因的。

两光源到上述接触点的光程是相等的，如图 9.17 所示，两列波在此本来应该是同相的，而事实上出现了暗纹，说明两列波的相位相反，相当于实际的光程相差半个波长。而这半个波长的光程差只能是由于其中的一列波反射而产生的，所以称其为**半波损失**，意思是其中一个波列由于反射而损失了(当然也可以说是额外增加了)半个波长的光程。半波损失的原因在之后的一节中将给予说明。


图 9.16　劳埃德镜的干涉花样

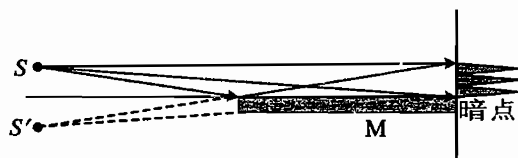


图 9.17　劳埃德镜干涉的半波损失

9.4.3 菲涅耳双棱镜

将两个完全相同的三棱镜的底面相对黏合起来，就组成了一个菲涅耳双棱镜。从光源 S 发出的光经棱镜折射后，就相当于是从两个虚像点 S_1，S_2 射过来的，在重叠区域产生干涉，如图 9.18 所示，这种装置称作菲涅耳双棱镜。实际上，并不需要先做好两块一模一样的棱镜再将其黏合，而是用一块薄的等腰三棱镜即可。

对图 9.18 所示的情形，虚光源相当于 S 在竖直方向上下移动了 $(n-1)\alpha l$（l 为 S 到棱镜的距离)。干涉花样如图 9.19 所示。

如果是平行光入射，设棱镜的顶角为 α，玻璃的折射率为 n，如图 9.20 所示，由于 $\sin i=$

$n\sin\alpha$，而 α 是小角，$\sin i = n\sin\alpha \approx n\alpha$，故折射光的倾角为

$$\theta = i - \alpha = (n-1)\alpha$$

等效于平行光的干涉。

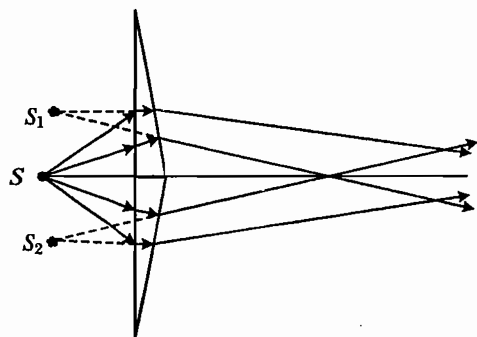


图 9.18 菲涅耳双棱镜

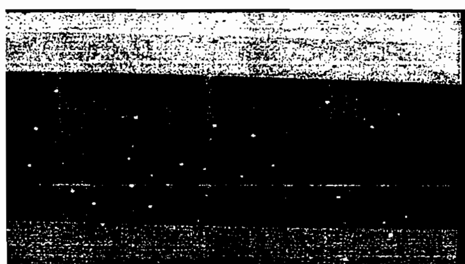


图 9.19 菲涅耳双棱镜的干涉花样

【例 9.3】 如图 9.21 所示，一凸透镜的焦距为 $f=30$ cm，将其剖开为两部分，记为 L_1 和 L_2，再沿光轴将两半错开 8.0 cm，光轴上有一光源，与 L_1 的间距为 60 cm，波长为 500 nm。S_1'，S_2'分别为 S 经 L_1，L_2 的像点。设光波在 S_1'的初相位为 $\varphi_1=0$。

(1) 求出光波在像点 S_2'处的初相位 φ_2；

(2) 如果在 $S_1'S_2'$的中点处取一垂直于光轴的平面，试在图上标出干涉条纹出现的区域；

(3) 说明在此平面上干涉条纹的形状，并计算相邻亮条纹的间距。

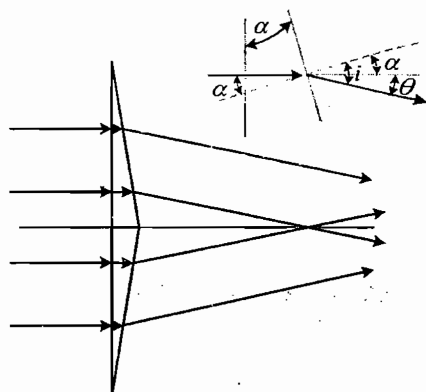


图 9.20 平行光射向菲涅耳双棱镜

解 分析：点光源经上述透镜后成两个像，可以看作是两个相干的点光源。于是在这两个点光源所发出的球面波的交叠区域，就可产生干涉。这种干涉装置称作**梅斯林对切透镜**。

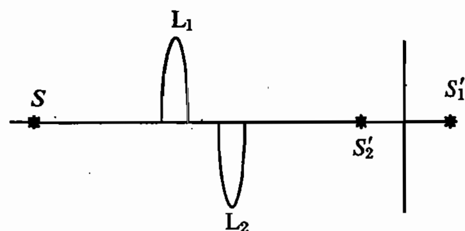


图 9.21 例 9.3 中的装置

(1) 由$\dfrac{1}{s'}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{f}$，得到 $s'=\dfrac{sf}{s-f}$，从而算得像距为 $s_1'=60$ cm，$s_2'=53.7$ cm。即$\overline{ss_1'}=120$ cm，$\overline{ss_2'}=121.7$ cm。两像点的间距为$\overline{s_1's_2'}=1.7$ cm。

由物像间的等光程性，得两像点的光程差为

$$\delta = 1.7\ \text{cm}$$

相位差为

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2 = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$
$$= 3.4\times 2\pi \times 10^6$$

这说明 S_1'的相位比 S_2'超前。如果用余弦函数表示，其 S_2'的初相位为

$$\varphi_2 = -3.4\times 2\pi\times 10^6$$

(2) 如图 9.22 所示,只有在两列波的交叠区域才能出现干涉。

(3) 由于像点可以看作两个相干的点光源,但是在观察平面处,S_2'是发散的点光源,S_1'是会聚的点光源,其表达式分别为

$$U_2(x,y) = A\cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2)$$

和

$$U_1(x,y) = A\cos(\omega t + kr_1 + \varphi_1)$$

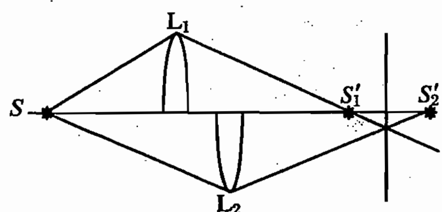


图 9.22 两个像光源的干涉

亮条纹满足的条件为

$$\Delta\varphi = k(r_1 + r_2) + (\varphi_1 - \varphi_2) = 2j\pi$$

对于观察平面上的任一点,由于 $r_1 = r_2 = r = \sqrt{x^2+y^2+d^2}$,其中 $2d$ 为两像点的间距,由光轴上的距离计算,得到 $\Delta\varphi_0 \doteq \varphi_1 - \varphi_2 = -2kd$,从而得到

$$\sqrt{x^2 + y^2 + d^2} = \frac{j}{2}\lambda + d$$

即

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{j}{2}\lambda + d\right)^2 - d^2$$

可见干涉条纹是同心圆环,圆心的干涉级数 $j_0 = 0$。

亮条纹的半径为 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,即 $\rho = \sqrt{\left(\frac{j}{2}\lambda + d^2\right)^2 - d^2} = \sqrt{\frac{j^2\lambda^2}{4} + j\lambda d}$。由于 $\lambda \ll d$,所以有 $\rho \approx \sqrt{j\lambda d}$

【例 9.4】 如图 9.23 所示,将一焦距为 f 的薄凸透镜对称地切去中间宽度为 d 的部分,然后再将剩余的两部分对接起来,试计算一个点光源发出的光经过这样的透镜之后所形成的干涉花样。

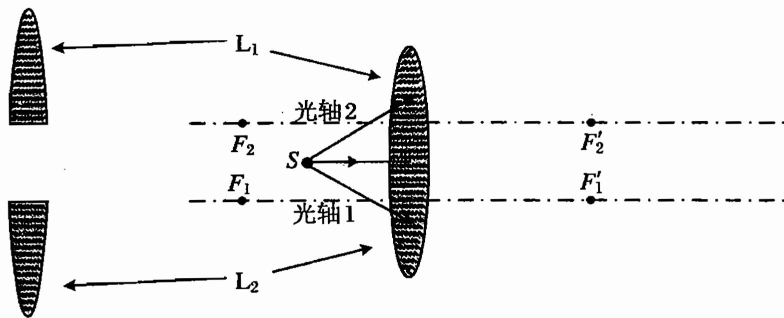


图 9.23 对切透镜

解 这种类型的透镜称作**比累对切透镜**。尽管重新对接起来的透镜看起来像一个完整的凸透镜,但实际上,由于上下两部分的光轴相互错开了 $2h$,所以即使放在其中心线上的一个点光源,经过透镜后仍然成两个像。这两个像光源是相干的,因而这种装置类似于杨氏双孔干涉装置。

如果点光源位于透镜的焦点之内,则经过透镜后成两个虚像;如果点光源位于透镜的焦点之外,则经过透镜后成两个实像。在透镜的像方,由于虚像光源光束的发散角比较大,能够形成

干涉条纹的区域也比较大(图 9.24),而实像光源光束的发散角比较小,干涉区域也比较小(图 9.25)。

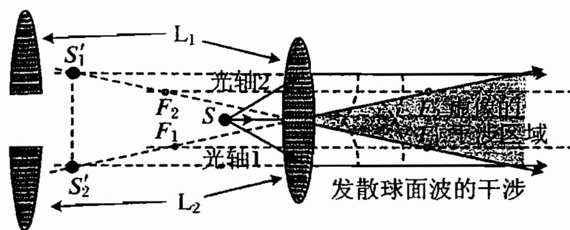


图 9.24 虚像光源的干涉

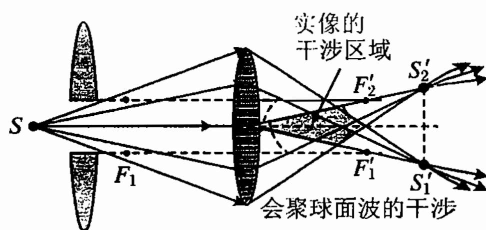


图 9.25 实像光源的干涉

9.5 薄膜干涉

薄膜有上下两个界面,一般情况下,可设薄膜上部介质的折射率为 n_1,下部的折射率为 n_3,而薄膜本身的折射率为 n_2,如图 9.26 所示。一列光波在薄膜的上表面处分为反射和折射两部分,折射部分在下表面又产生反射和折射,其中反射光到达上表面又有反射与折射……在 n_1 介质中,就有 1,2,…一系列光波,介质 n_3 中,也有一系列的透射波。由于这些光都是从同一列光波分得的,所以是相干的。这些光是将原入射光的能量(振幅)分为几部分得到的,因而是分振幅的干涉。

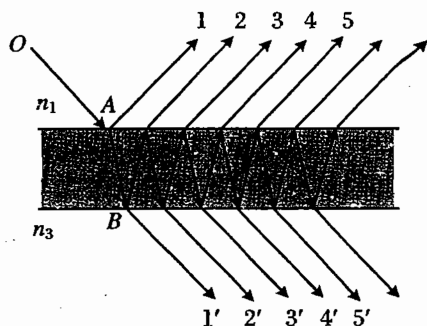


图 9.26 光在薄膜表面上的反射和折射

从上表面反射的光可以向任意方向传播,从薄膜内部透射出来的光同样也可以向任意方向传播,所以在空间各处都可以产生干涉。采用不同的光学装置,可以在不同的区域观察光的干涉。

9.5.1 等倾干涉

在所有的反射光和透射光中,相互平行的光将会聚在无穷远处,则它们的干涉也将在无穷远处发生。如果在薄膜上面置一凸透镜,如图 9.27 所示。在该透镜的焦平面处置一观察屏,则凡是在屏上能够相遇(即会聚)而进行叠加的光,都是平行地射向透镜的,或者说,这些进行干涉的光相对于透镜的光轴有相同的倾角,因而这种干涉称作**等倾干涉**。

1. 干涉级

如图 9.28 所示,在入射点 A 出现反射和折射,产生第一列反射波;折射进入薄膜的光波在下表面 B 处反射,又经过上表面 C 处射出,这是第二列反射波。如果过 C 点作一个与光束垂直的平面 CD,则 CD 上各点到会聚点 P 是等光程的,因而这两列反射波在 P 点的光程差为 $n_2(\overline{AB}+\overline{BC})-n_1\overline{AD}$,而 $\overline{AB}+\overline{BC}=2h/\cos i_2$,$\overline{AD}=\overline{AC}\sin i_1=2h\tan i_2\sin i_1$,所以

$$
\begin{aligned}
\delta &= 2h\left(\frac{n_2}{\cos i_2} - n_1 \tan i_2 \sin i_1\right) \\
&= \frac{2h}{\cos i_2}(n_2 - n_2 \sin^2 i_2) \\
&= \frac{2n_2 h}{\cos i_2}(1 - \sin^2 i_2) \\
&= 2n_2 h \cos i_2 \\
&= 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}
\end{aligned} \tag{9.19}
$$

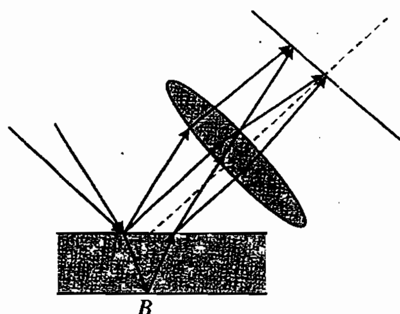


图 9.27　等倾干涉

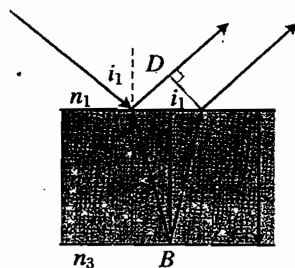


图 9.28　等倾干涉的光程差

这两列波之间要计入半波损失 $\lambda/2$，因此

$$
\begin{aligned}
\delta' &= 2n_2 h \cos i_2 \pm \lambda/2 \\
&= 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} \pm \lambda/2
\end{aligned} \tag{9.20}
$$

干涉相长的亮条纹出现的条件为

$$
2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} \quad \text{或} \quad 2n_2 h \cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2} \tag{9.21}
$$

干涉相长的亮条纹出现的条件为

$$
2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} \quad \text{或} \quad 2n_2 h \cos i_2 = j\lambda \tag{9.22}
$$

由上式可以看出，等倾干涉中，入射角相同，则光程差相同，对应同一干涉级，也就是同一级干涉条纹。

2. 干涉条纹与光源大小的关系

如图 9.29 所示，可见，无论点光源处于什么位置，经薄膜的两个面反射后，具有相等倾角的光在接收屏上形成一个圆环，这些圆环的中心位于透镜的光轴上。

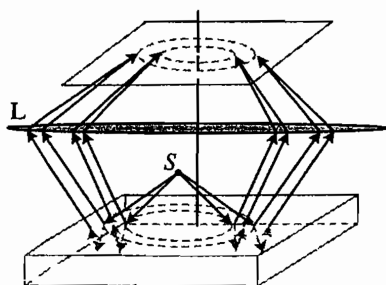


图 9.29　点光源的等倾条纹

如图 9.30 所示，两个不同的发光点发出球面波，其中凡是具有相同倾角的光，都将会聚到屏上的同一点，而又具有相等的光程差，故干涉条纹的形态与只有一个点光源的是一样的。那么，对于扩展光源，条纹的形态也与只有一个点光源的相同。而且，由于扩展光源的强度比电光源大，所以，实际上使用的都是扩展光源，如图 9.31 所示。

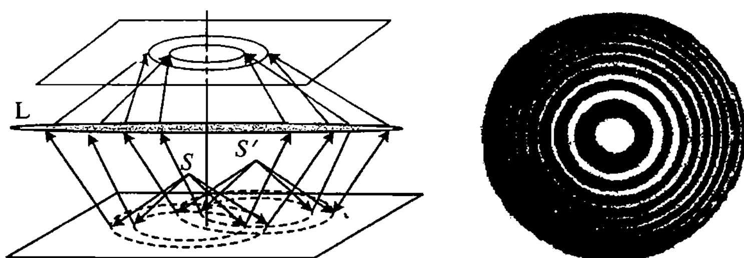


图 9.30　扩展光源的等倾条纹

3. 其他反射波、透射波间的干涉

薄膜的上表面有不止两列反射波，同样，也有许多列透射波从薄膜的下表面射出(图9.32)，它们之间会有怎样的干涉呢？我们将进行如下的讨论。

首先介绍斯托克斯倒逆关系。

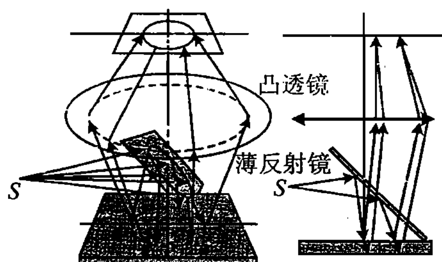


图 9.31　等倾干涉的观察装置

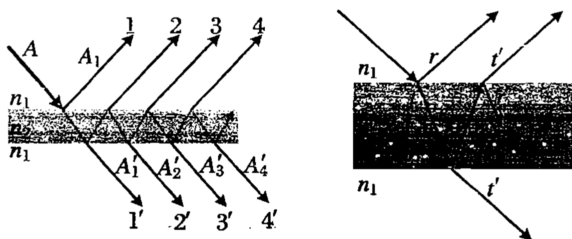


图 9.32　薄膜表面处的透射率与反射率

一列波在介质的分界面上将分为反射和折射两部分。设界面对于电场的反射率和透射率分别为 $\tilde{r}$，$\tilde{t}$，入射波的电场强度为 $\tilde{U}$，则反射波、透射波的电场强度如图 9.33 所示，且有

$$\tilde{U}_r = \tilde{U}\tilde{r},\quad \tilde{U}_t = \tilde{U}\tilde{t}$$

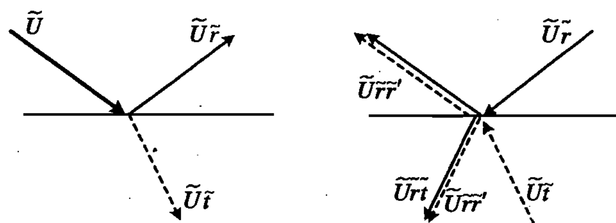


图 9.33　光路可逆与斯托克斯关系

如果将上述情形反过来，即一列电场强度为 $\tilde{U}_r$ 的波和一列电场强度为 $\tilde{U}_t$ 的波分别沿着反射波和折射波的路径射过来，从光路可逆性原理可以判断，总的效果应该是只有一列沿着原来入射路径的波列 $\tilde{U}$，可以用公式表示为

$$\begin{cases}\tilde{U}r^2 + \tilde{U}\tilde{t}\cdot\tilde{U}' = \tilde{U}\\ \tilde{U}\tilde{r}\cdot\tilde{t} + \tilde{U}\tilde{t}\cdot\tilde{r}' = 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} r^2 + \tilde{t} \cdot \tilde{t}' = 1 \\ \tilde{r} \cdot \tilde{r} + \tilde{r} \cdot \tilde{r}' = 0 \end{cases} \tag{9.23}$$

由此可以得到

$$r = -r'$$

或

$$r^2 = r'^2 \tag{9.24}$$

以及

$$\tilde{t} \cdot \tilde{t}' = 1 - r^2 \tag{9.25}$$

上述关系式(9.24),(9.25)称作斯托克斯倒逆关系。

再来看薄膜的多次反射。设入射波的振幅为 A,从上表面入射,即从折射率为 n_1 向折射率为 n_2 的介质入射时,对振幅的反射率为 r,透射率为 t;而从薄膜的内部向上表面入射,即从折射率为 n_2 向折射率为 n_1 的介质入射时,对振幅的反射率和透射率分别为 r'和 t';在薄膜的下表面,从内向外入射,即从折射率为 n_2 向折射率为 n_3 的介质入射时,对振幅的反射率和透射率分别为 r_2 和 t_2。如图 9.32 所示。在一般情况下,往往有 $n_1 = n_3$,例如对于空气中的透明薄膜,$r' = r_2$,$t' = t_2$。由斯托克斯倒逆关系,得 $r' = -r$,$tt' = 1 - r^2$。将反射波依次记作 1,2,…,而把透射光记作 1′,2′,…。可以计算出各列反射波的振幅为

$$\begin{aligned} A_1 &= Ar \\ A_2 &= Atrt' = Artt' = Ar(1 - r^2) \\ A_3 &= Ar^3 tt' = Ar^3(1 - r^2) \\ A_4 &= Ar^5(1 - r^2) \\ &\cdots \end{aligned}$$

用通式表示,即当 $n > 1$ 时,

$$A_n = Ar^{2n-3}(1 - r^2)$$

而透射波的振幅为

$$\begin{aligned} A'_1 &= Att' = A(1 - r^2) \\ A'_2 &= Ar^2(1 - r^2) \\ A'_3 &= Ar^4(1 - r^2) \end{aligned}$$

其通式为

$$A'_n = Ar^{2(n-1)}(1 - r^2)$$

对透明介质,$r \ll 1$,很小,因而,反射波中 $A_1 \approx A_2 \gg A_3 \gg A_4 \gg \cdots$,所以只有第一、第二列反射波之间有显著的干涉,其他波列由于强度太小而对总的干涉效果没有什么贡献,可以忽略。而在透射波中,$A'_1 \gg A'_2 \gg A'_3 \gg \cdots$,因此不能产生有效的干涉效应,即透射光的干涉条纹的可见度极小。因而,对于透明的薄膜,只需要考虑第一、第二列反射光的干涉即可。

【例 9.5】 沿着与肥皂膜的法线成 35°角的方向观察膜呈绿色($\lambda = 500.0$ nm),设肥皂水的折射率为 1.33。(1) 求薄膜的厚度;(2) 如果垂直注视薄膜,膜呈何种颜色?

解 (1) 看到的是从薄膜两个表面反射光干涉的结果,这是等倾干涉。膜所呈现的颜色是反射光中干涉相长的波长成分的颜色。反射光干涉相长的条件为

$$2nh\cos i_2 = (2j + 1)\frac{\lambda}{2} \tag{9.26}$$

可得到膜厚为

$$h = \frac{(2j+1)\lambda}{4n\cos i_2} = \frac{2j+1}{4n\sqrt{n^2-\sin^2 i_1}}\lambda = (2j+1)1.0417\times10^{-7}\ \mathrm{m} \tag{9.27}$$

计算中，光在膜的上表面的入射角、反射角均为 $i_1 = 30°$。

(2) 垂直注视时，反射角为 0°，即此时 $i_1 = i_2 = 0$，式(9.26)变为

$$2nh = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$$

从而得到

$$\lambda = \frac{4nh}{2j+1} = \frac{4\times1.33\times(2j+1)}{2j+1} = 554.2 \quad (\mathrm{nm})$$

4. 等倾干涉条纹的特征

(1) 中央条纹

亮条纹应满足

$$2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2 i_1} = (2j+1)\frac{\lambda}{2} \quad 或 \quad 2n_2h\cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2}$$

中央条纹对应的角度 $i_1 = 0$，即 $i_1 = i_2 = 0$，垂直入射，$\cos i_2 = 0$，j 取最大值，即中央条纹的干涉级数最大，由 n_2h 决定。

(2) 薄膜厚度的影响

对同一个 j，当 h 增大时，i_2增大，相应地，i_1增大，即圆环膨胀；h 减小，i_1减小，圆环收缩。

(3) 薄膜厚度对干涉条纹间距的影响

相邻两条纹间的角距离记作 Δi，即 j 改变所引起的角度的改变量。由 $2nh\sin i_2\Delta i_2 = -\lambda$，可求得

$$\Delta i_2 = -\frac{\lambda}{2nh\sin i_2} \tag{9.28}$$

厚度 h 大，条纹的间隔小。即薄膜厚度增加时，条纹将变得比较密。

(4) 条纹角宽度

亮条纹并非一条几何上的亮线，而是有一定的强度分布的宽带。由于干涉条纹的强度分布公式为

$$I(i) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

而

$$A_1 = Ar,\quad A_2 = Atrt' = Artt' = Ar(1-r^2)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta' = \frac{4\pi}{\lambda}n_2h\cos i_2 \pm \pi \tag{9.29}$$

故有

$$I(i) = Ar^2\left[1 + (1-r^2)^2 + 2(1-r^2)\cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}n_2h\cos i_2\right)\right]$$

可以将两相邻暗纹间的角度差(角距离)作为亮条纹的角宽度。由于

$$2n_2h\cos i_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2},\quad 2n_2h\cos(i_2+\Delta i_2) = j\lambda$$

故

$$2n_2h\sin i_2\Delta i_2 = \lambda/2, \quad 即 \quad \Delta i_2 = \lambda/(4n_2h\sin i_2)$$

厚膜条纹较密集。同时，在中心处，角度小，Δi_2 大，即条纹中心疏，周围密。

9.5.2 等厚干涉

如果薄膜上下两表面不平行，而是成一夹角 α，如图 9.34 所示，则在光波相交处均有干涉，且整个空间都有干涉条纹。

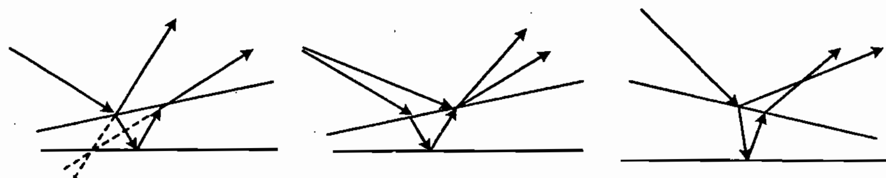


图 9.34 薄膜上下两表面不平行时干涉的非定域性

如图 9.35 所示，由于薄膜两表面的夹角往往很小，故对两列反射波的光程差 $n_2(\overline{AB}+\overline{BC})-n_1\overline{DC}$的计算可以直接引用等倾干涉的结果。从而亮条纹出现的条件为

$$2h\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}=(2j+1)\frac{\lambda}{2} \quad 或 \quad 2n_2h\cos i_2=(2j+1)\frac{\lambda}{2}$$

暗条纹出现的条件为

$$2h\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i_1}=j\lambda \quad 或 \quad 2n_2h\cos i_2=j\lambda$$

使入射光垂直入射，则上表面的第一、第二列反射波将重合，因而能进行相干叠加，如图 9.36 所示。如果仅仅观察薄膜上表面处的干涉，则两列波间的光程差为 $2n_2h$。若计入半波损失，则在薄膜的上表面，两列波的相位差为 $\Delta\varphi=\frac{4\pi}{\lambda}n_2h\pm\pi$，亮条纹出现的条件是

$$2n_2h=(2j+1)\frac{\lambda}{2} \tag{9.30}$$

暗条纹出现的条件是

$$2n_2h=j\lambda$$

由于同一级（条）亮纹出现在薄膜厚度相等的地方，所以这种干涉称作等厚干涉。

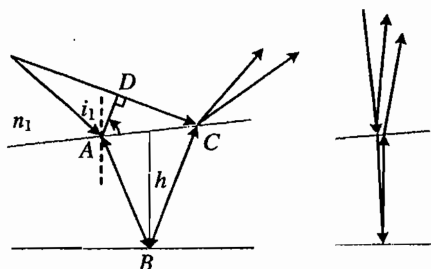


图 9.35 等厚干涉的光程差

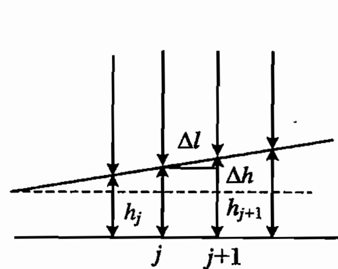


图 9.36 楔形薄膜条纹的横向间距

对于图 9.37 所示的楔形薄膜，相邻两个亮条纹间的厚度差为

$$\Delta h=\frac{\lambda}{2}n_2$$

如果楔角为 α，在表面上，亮条纹的间距为

$$\Delta l = \frac{\Delta h}{\sin \alpha} = \frac{\lambda}{2n_2}\sin \alpha$$

在尖端处，只有半波损失，反射光永远是暗纹，透射光是亮纹。

如果薄膜的上下表面都是平整的，等厚条纹应该是相互平行的等间隔直条纹，但实际上，我们看到的却往往是弯曲的弧形条纹，其原因可以用图9.37说明。观察者处于薄膜正上方时，进入其瞳孔的光的角度是不同的，中央部分的光沿竖直方向进入，而两侧的光倾斜才能进入。即中央部分的光，其角度 $i_1=0$，条纹满足 $2n_2h=(2j+1)\lambda/2$；两侧的光，由于 $i_1\neq 0$，所以应该采用公式 $2n_2h\cos i_2=(2j+1)\lambda/2$。由于 $i_2\neq 0$，$\cos i_2<1$，故对于同一干涉级，$(2j+1)\lambda/2$ 是不变的，而对于中央部分，$2n_2h=(2j+1)\lambda/2$。从而对于在两侧同一厚度的光，$2n_2h\cos i_2<(2j+1)\lambda/2$，不满足亮条纹出现的条件，只有在膜增加一定厚度的地方才有 $2n_2(h+\Delta h)\cos i_2=(2j+1)\lambda/2$，而且，越靠近边缘，$i_2$ 越大，Δh 就越大，因此，看到的条纹向膜厚的地方弯曲。

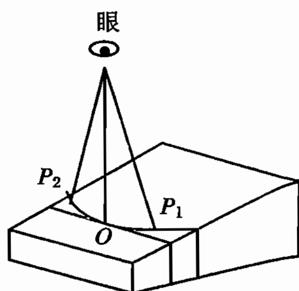


图9.37　条纹向膜厚处弯曲

图9.37中，P_1，P_2点的入射角比中央 O 点的大，故 h 必须增大才能满足干涉相长条件。

楔形薄膜可用于检测表面是否平整，以及确定凸凹。

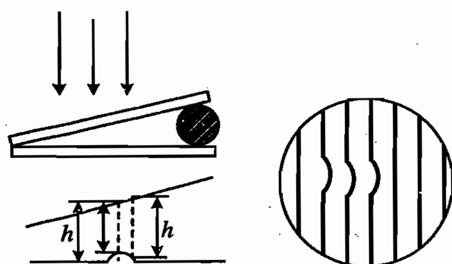
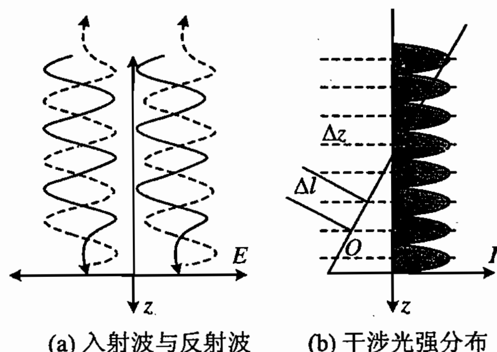


图9.38　检测表面平整

如图9.38所示，若观察到如右图所示的弯曲的干涉纹，则可判断待测表面的中央部分有一凸起，理由如下：

直纹说明表面是平整的，设此处的厚度为 h。若中央有一凸起，则厚度小于 h，不满足亮纹的条件，而同级亮纹只能出现在厚度为 h 的地方。向右端移动一段距离，则会有厚度恰等于 h 的地方，亮纹在这里出现，这一部分的条纹因而向楔形的后部弯曲。条纹弯曲的区域对应于凸起的区域，而条纹弯曲的程度对应于凸起的高度。

【例9.6】 维纳驻波的干涉如图9.39所示，一列单色平行光垂直射向反射面，求反射波与入射波所形成的干涉条纹；如果在反射面上方放一半透半反的平行板，该板与反射面间的夹角为 θ，求板上干涉条纹的间距。(设反射面对光的反射率为100%。)



(a) 入射波与反射波　(b) 干涉光强分布

图9.39　维纳驻波的干涉

解　入射波为 $\psi_1=A_1\cos(kz-\omega t)$。设反射波的振幅与入射波的相等，表示为

$$\begin{aligned}\psi_2 &= A_2\cos(-kz-\omega t+\varphi)\\ &= A_2\cos(kz+\omega t-\varphi)\end{aligned}$$

设 $A_1=A_2$，合振动为

$$\psi=\psi_1+\psi_2=A\cos(kz-\omega t)+A\cos(kz+\omega t-\varphi)$$

$$= 2A\cos\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(kz - \frac{\varphi}{2}\right)$$

在上述表达式中，时间因子 ωt 与空间因子 kz 分开，这种形式的波动无法在空间传播，而只能在原位振动，因而形成驻波。实验表明，在 $z=0$ 处，$I=0$，说明 $\varphi=\pi$，即反射时有半波损失。从而有 $\psi=-2A\sin\omega t\sin kz$，光强 $I=4A^2\sin^2 kz$。

在 $z=0$ 处，$I=0$，为极小值。

可以由 $k\Delta z=(2\pi/\lambda)\Delta z=\pi$ 求得暗纹间隔，即 $\Delta z=\lambda/2$。

板上的条纹间隔为 $\Delta l=\Delta z/\sin\theta=\lambda/2\sin\theta$。

斜入射时，将波矢分解为平行和垂直于 z 的两部分。与 z 平行的部分无反射波，不发生干涉。

9.6 分振幅的干涉装置

可根据分振幅干涉的原理制成多种干涉装置。

9.6.1 迈克尔森干涉仪

1. 干涉仪的结构与原理

图 9.40 为早期的迈克尔森干涉仪的外观，图 9.41 为光路及原理示意。G_1 为分光板，其背面涂敷半透半反膜；G_2 为补偿板；M_1，M_2 为反光镜。其中，M_1，M_2 相互垂直，G_1 与 G_2 平行，且与 M_1，M_2 成 45°角。

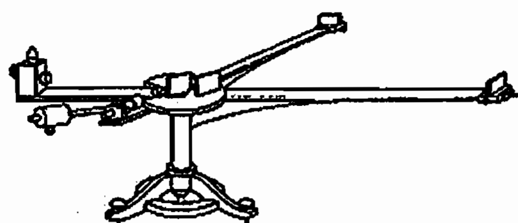


图 9.40 早期的迈克尔森干涉仪

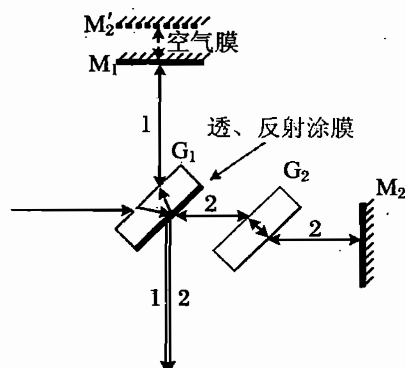


图 9.41 迈克尔森干涉仪的光路

图 9.42 为实用的干涉仪构造，图 9.43 显示了调节机构。下面简述一下迈克尔森干涉仪的光路原理。

入射波在分光板的涂膜处分为两部分，分别射向 M_1，M_2，在图 9.41 中记为 1，2。被 M_1，M_2 反射后，沿原路返回到分光板的涂膜上。由 M_1 反射的波 1 透过涂膜，而由 M_2 反射的波 2 被涂膜反射。1，2 两列波进行相干叠加，产生干涉条纹。补偿板与分光板由相同的材料制成，形状也完全一样，只是没有涂膜，因此 1，2 两列波都各自经涂膜反射、透射一次，经玻璃板透射三次，被反光镜反射一次，只是在空气中经过的路程不同，因而光程差就是由两反射镜到涂膜层的

距离不同而造成的。在两列光波所经过的路径上，需要注意的是，波 1，2 各被反光镜反射一次，因而半波损失的情况一致。但是，在分光板处，光束 1 由玻璃射向涂膜被反射，而光束 2 由空气射向涂膜被反射，因此这两次反射的入射角与折射角的情况正好相反。所以认为有相反的半波损失，即一路有半波损失，而另一路没有半波损失，因而在计算光程差时，要计入半波损失。不过我们关注的是条纹整体移动变化的情况，从而半波损失就被消去了。

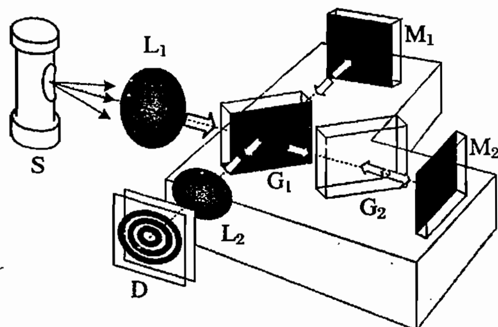


图 9.42　迈克尔森干涉仪的构造

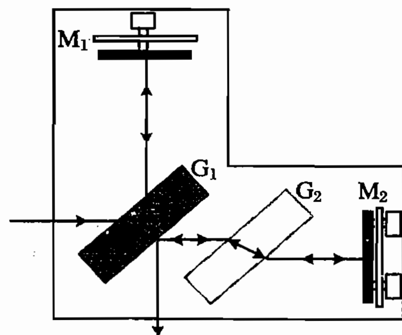


图 9.43　迈克尔森干涉仪的调节机构

在图 9.41 中，M_2 相对于涂膜有一个镜像 M_2'，光波 2 相当于是从 M_2' 反射过来的，而 M_2' 与 M_1 构成了一个空气薄膜，所以迈克尔森干涉仪就相当于"空气膜"的干涉。两列波的光程差就是 M_2' 与 M_1 间距的 2 倍。M_1 与 M_2' 间或平行或不平行，都能产生或等倾或等厚干涉。此时，由于 $n_1 = n_2, i_1 = i_2$，所以，亮条纹产生的条件为

$$2h\cos i = (2j+1)\frac{\lambda}{2} \tag{9.31}$$

处于视场中央的条纹是由平行于透镜光轴的光束产生的，因而 $i=0$，于是有

$$2h = j\lambda$$

移动干涉仪的一臂，便可改变上述"空气膜"的厚度，从而引起视场中央条纹级数的改变。设移动 Δh，看到视场中央条纹改变了 Δj 次，则

$$2\Delta h = \Delta j\lambda \tag{9.32}$$

可见宏观的长度 Δh 与微观的波长 λ 通过 Δj 联系起来。式(9.32)可用于精确测量长度。

2. 条纹的形状

图 9.44 显示了干涉条纹的形状与两反射镜之间相对位置的关系。

(1) $M_1 /\!/ M_2'$，即 $M_1 \perp M_2$，为等倾干涉，同心圆环，圆心在视场中央。

(2) M_1 与 M_2' 不平行，为等厚干涉。此时，条纹的形状与 M_1，M_2' 间的距离有关。

【例 9.7】 用钠光的 589.3 nm 谱线观察迈克尔森干涉条纹，先看到干涉场中有 16 个亮环（包括中心亮斑），且中心是亮的；移动平面镜 M_1 后，看到中心吞（吐）了 20 环，干涉场中心还剩 6 个亮环（包括中心亮斑），中心仍是亮的。试求：

(1) M_1 移动的距离；

(2) 开始时中心亮斑的干涉级；

(3) M_1 移动后，干涉场中最外亮环的干涉级。

解　分析：在视场中心，光线的入射角为 0°，视场的外边缘，即最外干涉环所对应的角度 $i \neq 0$，在 M_1 移动过程中是不变的。

(1) 等倾干涉时，其中心条纹满足

$$2h = j_0\lambda \tag{9.33}$$

最外层条纹满足

$$2h\cos i = j_1\lambda \tag{9.34}$$

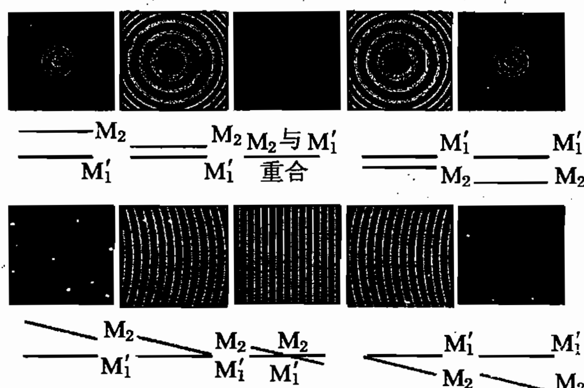


图 9.44　通过迈克尔森干涉仪观察到的条纹

把以上两式相减，得到

$$2h(1-\cos i) = (j_0 - j_1)\lambda \tag{9.35}$$

其中，$j_0 - j_1$ 为干涉场(视场)中条纹的数目。

由于 M_1 移动后，视场中的条纹减少，故 h 减小。吞入了 20 环，说明中心级次减小 20。由式(9.33)，得到

$$2\Delta h = \Delta j\lambda = -20\lambda \tag{9.36}$$

即 M_1 移动的距离为

$$\Delta h = \Delta j\lambda/2 = -20\lambda/2 = -5.893\ \mu\text{m}$$

(2) 设开始时中心斑的级次为 j_0，最外条纹的级次为 $j_0 - 15$，则有

$$2h = j_0\lambda \tag{9.37}$$

$$2h\cos i = (j_0 - 15)\lambda \tag{9.38}$$

即

$$j_0\lambda\cos i = (j_0 - 15)\lambda \tag{9.39}$$

结束时，中心条纹级数 $j_0' = j_0 - 20$，最外的条纹级数为 $j_0' - 5 = j_0 - 25$，则有

$$2(h + \Delta h) = (j_0 - 20)\lambda \tag{9.40}$$

$$2(h + \Delta h)\cos i = (j_0 - 25)\lambda \tag{9.41}$$

从而有

$$(j_0 - 20)\lambda\cos i = (j_0 - 25)\lambda$$

由式(9.39)，(9.41)，可得

$$\frac{j_0 - 20}{j_0} = \frac{j_0 - 25}{j_0 - 15}$$

解得 $j_0 = 30$。

(3) 由 $j_0 - 25 = 30 - 25 = 5$，得视场中还有 5 条亮纹。

9.6.2 马赫-曾特干涉仪

如图 9.45,采用两个反射镜 M_1,M_2 以及两个分束镜 BS_1,BS_2 就可以组成一种分振幅的反射装置,称作马赫-曾特干涉仪。在其中的一条光路中可以置入样品,如受力的透明介质、气体或者等离子体等,从而可以通过测量干涉条纹的变化获得样品的光学参数,图 9.46 为测量到的等离子体的干涉条纹。该装置近年来更是被用于量子密钥通信。

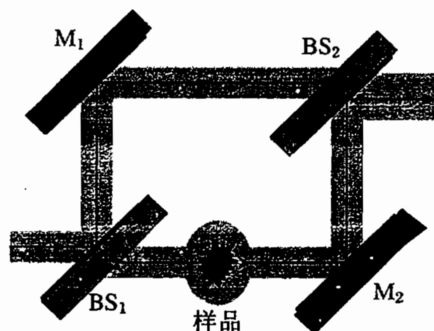


图 9.45 马赫-曾特干涉仪

9.6.3 干涉滤波片

利用薄膜干涉相长或相消原理,可以对某些波长增透或增反。例如,在玻璃板上镀一层薄膜(图 9.47),则入射光中满足干涉相长的波长被反射,其他波长则由于干涉而减弱,可以只让特定波长的光被反射,起到滤光的作用。也可以在光学仪器的镜头表面镀(涂)膜,使得透射光由于干涉而得到增强,这种膜称作增透膜。现在使用的照相机、望远镜、显微镜,由于都采用了较复杂的透镜组,透镜较多,每个透镜的表面都会反射一部分光,故造成的光能量损失比较严重。在每一个镜头的表面镀上增透膜,可以大大降低入射光能量的损失。

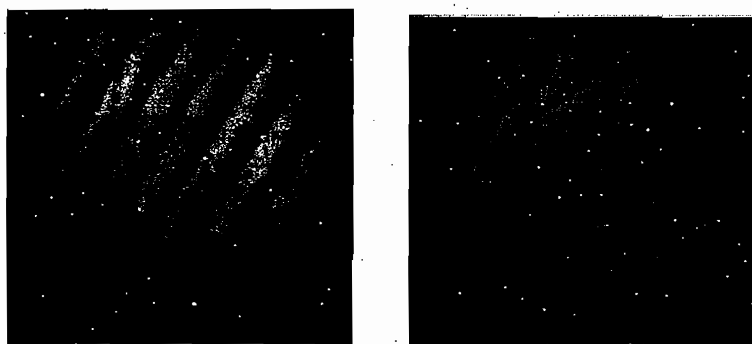


图 9.46 马赫-曾特干涉仪的干涉花样

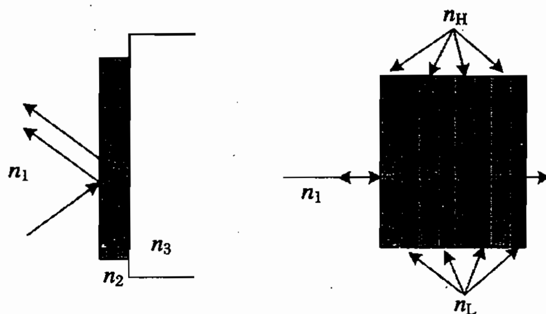


图 9.47 干涉滤波片

由于仅有一层增透膜或增反膜还不能充分起作用，所以，现在往往采用多层膜。将光学常数(折射率)不同的材料按一定的次序和厚度镀在镜头表面，其效果比仅有一层薄膜要好得多。

【例 9.8】 为了减少玻璃的反射，通常的做法是在玻璃表面上涂一层很薄的透明薄膜(增透膜)。其结构如图 9.48 所示，膜上方为空气($n_1=1$)，膜下方是玻璃($n_2=1.5$)，膜的折射率为 $n=1.3$。

(1) 不涂增透膜时，玻璃的光强反射率是多少？一个由 6 片透镜构成的镜头，其光强的透过率为多少？

(2) 若想使波长为 600.0 nm 的反射光减小到最小，应涂多厚的膜？涂膜后光强的反射率为多少？

(3) 要想使反射光完全干涉相消，增透膜的折射率应取多少？

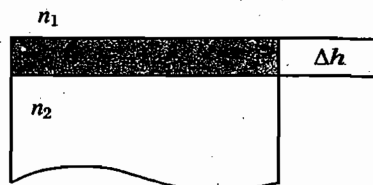


图 9.48 玻璃的增透膜结构

解 分析：涂膜后，由于在膜的上下表面反射光干涉相消，故可以提高透过率。透过率、反射率可以由菲涅耳公式计算。但一般情况下，由于两列光的振幅不相等，所以不能完全相消。只有膜的折射率满足一定条件时，干涉才能完全相消，即两列光既有相反的相位，又有相同的光强(振幅)。

(1) 光线由空气向玻璃正入射时，或从玻璃向空气正入射时，光强的反射率为

$$R=\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2=4\%$$

光透过 6 片透镜，即经过 12 个表面的反射，每个表面的透射率为

$$T=1-R=96\%$$

因而总的透射率为

$$T_{\text{total}}=T^{12}=0.96^{12}\approx 0.607=60.7\%$$

(2) 由于膜的折射率为 $n=1.3$，介于空气($n_1=1$)和玻璃($n_2=1.5$)的折射率之间，故没有半波损失，于是干涉相消的条件是

$$2n\Delta h=\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

膜厚为

$$\Delta h=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n}=230.8\left(m+\frac{1}{2}\right)\text{nm}\quad(m=0,1,2,\cdots)$$

涂膜后，对于上表面，

$$R_1=\left(\frac{n_1-n}{n_1+n}\right)^2=1.7\%$$

对于下表面，

$$R_2=\left(\frac{n_2-n}{n_2+n}\right)^2=0.5\%$$

(3) 此时应使两列反射光的振幅相等，又由于

$$E_1=\frac{n_1-n}{n_1+n}E_0,\quad E_2=\frac{2n_1}{n_1+n}\frac{n_2-n}{n_2+n}\frac{2n}{n_1+n}E_0$$

所以

$$\left|\frac{n_1 - n}{n_1 + n}\right| = \left|\frac{2n_1}{n_1 + n}\frac{n_2 - n}{n_2 + n}\frac{2n}{n_1 + n}\right|$$

整理可得

$$n^3 - (4n_1 - n_2)n^2 + n_1(4n_2 - n_1)n - n_1^2 n_2 = 0$$

或者

$$n^3 + (4n_1 + n_2)n^2 - n_1(4n_2 + n_1)n - n_1^2 n_2 = 0$$

化简后可分别得

$$n^3 - 2.5n^2 + 5n - 1.5 = 0 \tag{9.42}$$

$$n^3 + 5.5n^2 - 7n - 1.5 = 0 \tag{9.43}$$

在 1～3 范围内，式(9.42)无合理解；式(9.43)的解为 $n \approx 1.22$。

实际上，尚未发现 $n \approx 1.22$ 的透明薄膜。实际中常使用氟化镁涂膜，其折射率为 1.38。

9.6.4 牛顿环(圈)

如图 9.49 所示，在一玻璃平板上放一平凸透镜，则两者之间就形成了一层空气薄膜。从上方垂直入射的光，由于分别被空气膜的上下两个表面反射，于是就产生了干涉。在空气膜的上表面或下表面观察，空气膜的形状取决于透镜球面的形状。这是一种等厚干涉装置，称作牛顿环干涉。可以判断，干涉条纹的形状是一系列的同心圆环。这些圆环称作牛顿环。图 9.50 为实际的观察牛顿环装置的原理图。

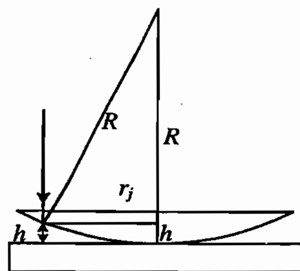


图 9.49 牛顿环的产生及干涉条纹

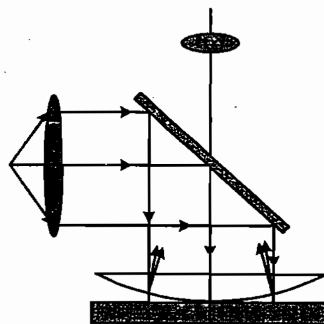


图 9.50 牛顿环的观察装置

观察反射光在空气膜上表面的干涉，可见一列在球面(玻璃-空气界面)被反射，没有半波损失；而另一列在平面(空气-玻璃界面)被反射，有半波损失。于是亮条纹产生的条件为 $\Delta L = 2h \pm \lambda/2 = j\lambda$，$\Delta L$ 为光程差，即 $2h = j\lambda \pm \lambda/2$。设球面的半径为 R，在空气膜厚度为 h 处干涉条纹的半径为 r。由相交弦定理，有 $h(2R - h) = r^2$，$2Rh - h^2 = r^2$。由于 $R \gg h$，$h = r^2/(2R)$，故牛顿环的半径为

$$r_j = \sqrt{(j + 1/2)\lambda R} \quad (j = 0,1,2,\cdots) \tag{9.44}$$

对于透射光在空气膜下表面的干涉，一列直接透过，另一列在平面和球面间反射后透过。由于经两次反射，无半波损失。这种情况下，光程差为 $\Delta L = 2h = j\lambda$，透射光的牛顿环的半径为

$$r_j = \sqrt{j\lambda R} \quad (j = 0,1,2,\cdots) \tag{9.45}$$

可利用式(9.44)，(9.45)检验球面透镜的质量以及测量其曲率半径 R(图 9.51)。

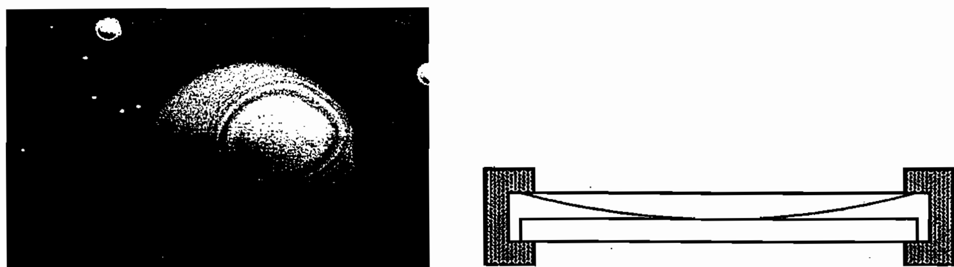


图 9.51　用牛顿环检验、测量球面透镜

【例 9.9】　如图 9.52(a)所示，A 为平凸透镜，B 为平板玻璃，C 为金属柱，D 为框架，A，B 之间留有气隙，而 A 被固定在框架的边缘上。温度变化时，C 发生伸缩，而假设 A，B，D 都没有伸缩。现用波长为 $\lambda=632.8\ \mathrm{nm}$ 的激光垂直照射。

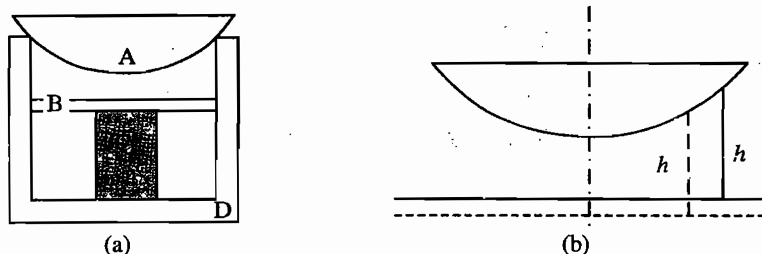


图 9.52　例 9.9 中的装置示意图

(1) 在反射光中观察时，看到牛顿环的条纹都移向中央，这表明金属柱 C 的长度是增加还是缩短？

(2) 如果观察到有 10 个明条纹移到中央而消失，C 的长度变化了多少毫米？

解　分析：在平凸透镜 A 和平板玻璃 B 之间是空气膜，这是牛顿环干涉装置。

(1) 条纹向中间移动，即第 j 级干涉环的半径减小，由于这是等厚干涉，即某一级条纹，例如 j 级，总是处在相同的膜厚处，见图 9.52(b)，所以可以判断膜厚增大了。说明气隙增加了，即金属柱 C 缩短了。

(2) 由牛顿环干涉公式 $2nh=\dfrac{nr_j^2}{R}=\left(j+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$，可得 $2n\Delta h=\Delta j\lambda$，即

$$\Delta h=\frac{\Delta j\lambda}{2n}=\frac{10\times 632.8}{2}=3164\ (\mathrm{nm})=3.164\ (\mu\mathrm{m})$$

9.7　光的空间相干性与时间相干性

在前面的各个部分，凡是涉及光的叠加时，通常采用相干叠加或非相干叠加的方法进行处理。例如，对于两列光波，如果是相干的，则叠加之后干涉项 $2A_1A_2\cos\Delta\varphi\neq 0$；如果是非相干的，则干涉项 $2A_1A_2\cos\Delta\varphi=0$。

上述对于光的相干性作简单分类，仅仅是为了数学处理上的方便。相干与非相干只是两种极端的特例。

判断光是否相干的依据是8.5.3小节所列出的三个条件。满足这三个条件的光，或是相干光，或是完全相干光；不满足这三个条件的光，称作非相干光，或完全非相干光。相干光的三个条件是非常严格的，而实际的光波通常都不能满足，也就是说，实际的光源和光波场都不是严格相干的，但也能产生干涉。例如太阳光或普通光源发出的光，经过杨氏双孔或双缝后，也能在接收屏上产生较明显的干涉条纹。那么，这些实际存在的、能够产生干涉的而又不严格满足相干条件的光，则称作部分相干光。

9.7.1 光波场的空间相干性

1. 光源宽度对干涉条纹可见度的影响

在杨氏干涉装置中，如果 S 是点光源，那么，从理论上说，该光源所有的发光中心都处于空间的一个几何点上。从 S 发出的每一列光波都是单色波（或准单色波），经过双孔或双缝后，就分成了两个相干的部分，这两部分是严格相干的，因而可以产生确定的干涉条纹。

而实际上，光源都有一定的空间大小，其中含有大量的发光原子（发光中心）。通常，分开一定距离（只要该距离超过光的波长）的两个发光中心之间是没有任何关联的，即它们发光的过程相互独立，因而发出的光波是非相干的。例如图9.53所示的在扩展光源上的 $O_1, O_2, O_3, \cdots$。虽然任意一个中心发出的光波经过双孔或双缝之后都能在接收屏上由于干涉而形成干涉强度分布，但由于各个发光中心在光源 S 上的位置不同，故在接收屏上所形成的干涉花样的位置也不同。例如，上述 O_1, O_2, O_3 所形成的干涉花样的0级条纹的位置分别为 P_1, P_2, P_3。不同的光源所发出的光波之间不能干涉，因而只能将干涉强度简单相加，也就是不同的干涉花样会相互重叠。

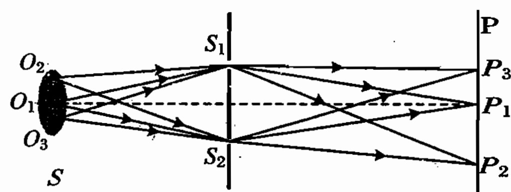


图9.53 杨氏干涉中扩展光源的0级干涉条纹

【例9.10】 在杨氏双缝实验中，除了原有的光源缝 S 外，再在 S 的正上方开一狭缝 S'，如图9.54所示。

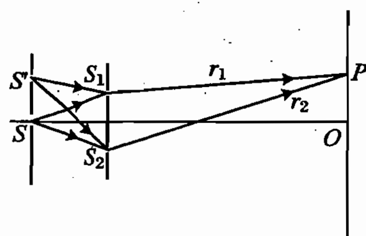


图9.54 例9.10中的光路

(1) 若使 $\overline{S'S_2} - \overline{S'S_1} = \lambda/2$，试求单独打开 S 或 S' 以及同时打开它们时屏上的光强分布。

(2) 若 $\overline{S'S_2} - \overline{S'S_1} = \lambda$，当 S 和 S' 同时打开时，屏上的光强分布如何？

解 (1) 单独打开中央缝时，光强为

$$I = 4I_0\cos^2\left(\frac{kd}{2D}x'\right) = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

单独打开缝 S' 时，计入双缝前的光程差 ΔL_1，两列光在 P 点的总相位差为 $k\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\Delta L_1 + x'\frac{d}{D}\right)$，光强为

$$I' = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi\Delta L_1}{\lambda} + \frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

相当于 S 点的干涉花样在屏上做了平移。

两缝同时打开时，总光强为

$$I + I' = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) + 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi\Delta L_1}{\lambda} + \frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

已知$\overline{S'S_2} - \overline{S'S_1} = \frac{\lambda}{2}$，则 $\Delta L_1 = \lambda/2$，$\frac{\pi\Delta L_1}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$，于是

$$\begin{aligned} I + I' &= 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) + 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) \\ &= 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) + 4I_0\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) \\ &= 4I_0 \end{aligned}$$

屏上没有干涉条纹。

(2) 已知$\overline{S'S_2} - \overline{S'S_1} = \lambda$，则 $\Delta L_1 = \lambda$，$\frac{\pi\Delta L_1}{\lambda} = \pi$，于是

$$I + I' = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) + 4I_0\cos^2\left(\pi + \frac{\pi d}{\lambda D}x'\right) = 8I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D}x'\right)$$

屏上亮条纹的强度增加 1 倍。

在杨氏干涉装置中，如果保持其他部分不变，而仅仅使光源 S 移动，则干涉条纹将做相应的移动。如果有两个点光源 S，S'，其中 S 处在中心轴线上，而 S'在轴线之外，则每一个光源发出的光经过双缝后，各自形成一套干涉花样。这两套干涉条纹相互交叠。若一套的亮条纹正好处在另一套的暗条纹位置，将会使总的干涉花样的反衬度大大降低，甚至无法观察到明显的明暗条纹分布，如图 9.55 所示。这种情况就是我们要讨论的光波场的空间相干性问题。

在图 9.56 中，由 S'点发出的光波到达P 点时，光程差包括两部分：$\Delta L_1 = \overline{S_2S'} - \overline{S_1S'}$（在双缝之前）；$\Delta L_2 = \overline{PS_2} - \overline{PS_1}$（在双缝之后）。总的光程差为

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

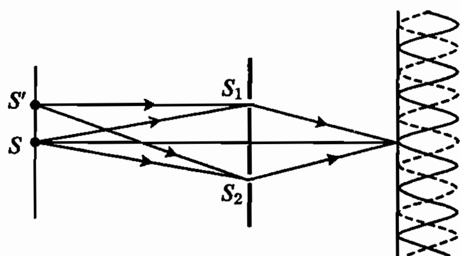


图 9.55　两个点光源的干涉条纹重叠

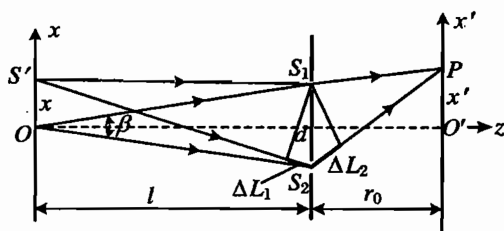


图 9.56　扩展光源上任一点光程的计算

当光源位置改变时，ΔL_1 变化，而 ΔL_2 保持不变。

设 S'的坐标为 x，光源具有较大的宽度，同时距双缝较远（例如恒星等天体），则 $b \gg d$，$x \gg d$，同时 l 也很大，$l \gg b$，$l \gg x$，于是可得到

$$\begin{aligned} \overline{S'S_1} &= \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 + x^2 - xd + \frac{d^2}{4}} \\ &\approx \sqrt{l^2 + x^2 - xd} \approx \sqrt{l^2 + x^2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{xd}{l^2 + x^2}\right) \end{aligned}$$

$$\overline{S'S_2} = \sqrt{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 + x^2 + xd + \frac{d^2}{4}}$$

$$\approx \sqrt{l^2 + x^2 + xd} \approx \sqrt{l^2 + x^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{xd}{l^2 + x^2}\right)$$

$$\Delta L_1 = \overline{S'S_2} - \overline{S'S_1} = x\frac{d}{\sqrt{l^2 + x^2}} \approx x\frac{d}{l} = x\beta$$

其中

$$\beta = \frac{d}{l}$$

是光源中心对双缝的张角，称为**干涉孔径(角)**。

注意，当 S' 上下移动时，对于接收屏上的固定点 P，ΔL_2 保持不变。

杨氏干涉的强度公式为

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

设双缝的宽度相等，即从双缝出射的光具有相等的振幅和强度，上式中 $A_1 = A_2$，$I_1 = I_2 = I_0$，因而上式可以化为

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi = 2I_0(1 + \cos\Delta\varphi)$$

其中，I_0 为只打开一条狭缝时(没有干涉，同时忽略单缝的衍射)接收屏上的光强。

如果有一宽度为 b 的扩展光源，即分布范围为$(-b/2, b/2)$的一段光源，其中位于 x 附近的一段 $\mathrm{d}x$ 所形成的干涉强度为

$$\mathrm{d}I = 2I_0\mathrm{d}x\left(1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L\right) = 2I_0\mathrm{d}x\left[1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\beta x + \Delta L_2)\right]$$

总的干涉场的强度为

$$I = 2I_0\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\mathrm{d}x\left[1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}(\beta x + \Delta L_2)\right]$$

$$= 2I_0\left(b + \frac{\lambda}{\pi\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L_2\right)$$

在屏上形成干涉花样，最大光强和最小光强分别为

$$I_{\max} = 2I_0b + 2I_0\frac{\lambda}{\pi\beta}\left|\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right|$$

$$I_{\min} = 2I_0b - 2I_0\frac{\lambda}{\pi\beta}\left|\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right|$$

于是干涉花样的可见度为

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{\left|\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right|}{\frac{\pi b\beta}{\lambda}} \tag{9.46}$$

接收屏上条纹的可见度与光源的宽度可用图 9.57 表示。

将 $\beta = d/l$ 代入式(9.46)，则得到

$$\gamma = \frac{\left|\sin\frac{\pi bd}{\lambda l}\right|}{\frac{\pi bd}{\lambda l}} \tag{9.47}$$

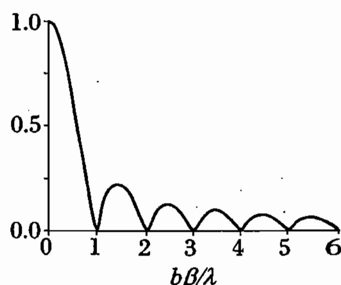


图 9.57　扩展光源杨氏干涉的可见度与光源的宽度

可以看出，随着光源宽度 b 或者双缝间距 d 的增大，干涉花样的可见度迅速减小。

实际上，由于每一条狭缝都有一定的宽度（记为 a），则在上述计算过程中，还应当记入每一缝的衍射效应，即在光强的表达式中还应该含有单元衍射因子。

2. 相干孔径与空间相干性

在扩展光源的条件下，杨氏干涉的可见度是一个振荡衰减的函数。当 $b\beta/\lambda=0$ 时，可见度函数取得极大值 $\gamma=1$，相当于 $b\ll\lambda$，即光源可视作一个几何点；随着 $b\beta/\lambda$ 的增大，可见度迅速衰减，到 $b\beta/\lambda=1$ 时，$\gamma=0$；此后，虽然随着 $b\beta/\lambda$ 的增大，γ 的值还会有一定幅度的起伏变化，但是数值很小，可见度很低。因此，通常认为当 $b\beta/\lambda\geqslant 1$ 时，干涉条纹的反衬度已经很小。在这种情况下，就是光源在空间的扩展导致了干涉的消失。

于是，能够产生明显干涉的条件是 $b\beta/\lambda<1$，由此可以得到

$$b<\frac{\lambda}{\beta}=\frac{l}{d}\lambda \tag{9.48}$$

上式就是与双缝间距 d 对应的扩展光源的尺度范围，以保证有一定反衬度的干涉场可供观测。

当 $b_{max}=(l/d)\lambda$ 时，$\gamma=0$，此时 b_{max} 为扩展光源的极限宽度。

由扩展光源导致干涉消失，这种现象称作**光的空间相干性**。

在光源的宽度保持一定的情况下，空间相干性要求双缝间距

$$d\leqslant\frac{l}{b}\lambda \tag{9.49}$$

此时干涉的孔径角为 $\beta=d/l\leqslant\lambda/b$。由此可得干涉的最大孔径角为

$$\Delta\theta_0=\frac{\lambda}{b} \tag{9.50}$$

$\Delta\theta_0$ 称作**相干孔径(角)**。只有处于这一角度范围之内的光才是相干的。

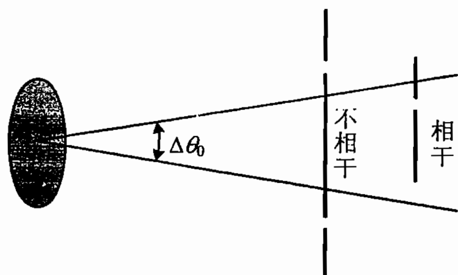


图 9.58 相干孔径的说明

也可以将式(9.50)改写作

$$b\Delta\theta_0=\lambda \tag{9.51}$$

式(9.51)称作**空间相干性的反比公式**。

只有当 $\beta<\Delta\theta_0$，即双缝对光源中心的张角（干涉孔径(角)）小于相干孔径(角)时，才有干涉。也就是说，当双缝处于相干孔径角之内时，可出现干涉，否则不出现干涉。如图 9.58 所示。

有时也用面积表示空间相干的尺度，称作**相干面积**，其定义为

$$S=d^2 \tag{9.51}$$

9.7.2 光场的时间相干性

光的相干性要求各个波列是波长相等的单色光，而实际上，任何光源所发出的光都具有一定的波长范围 $\Delta\lambda$，可以表示为 $\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda$，$\Delta\lambda$ 称作带宽。

光源的非单色性对干涉的影响可以用杨氏干涉加以说明。

如图 9.59 所示，入射光的波长范围为 $\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda$，其中的任一个波长成分都可以形成一套干涉条纹。

对于第 j 级亮条纹，波长为 λ 的成分的亮条纹中心在屏上的位置为 $x=j\frac{r_0}{d}\lambda$；波长为 $\lambda+\Delta\lambda$ 的成分的亮条纹中心在屏上的位置为 $x=j\frac{r_0}{d}(\lambda+\Delta\lambda)$。

除 $j=0$ 级之外，由于入射光的波长有一定的范围 $\Delta\lambda$，故第 j 级亮纹在接收屏上扩展开来，为一条从 $x(\lambda)=j\frac{r_0}{d}\lambda$ 到 $x(\lambda+\Delta\lambda)=j\frac{r_0}{d}(\lambda+\Delta\lambda)$ 的宽带。第 j 级亮条纹的宽度为 $\Delta x_j(\lambda\sim\lambda+\Delta\lambda)=j\frac{r_0}{d}\Delta\lambda\propto j$。干涉级数越高，其宽度也越大。在某一个 j 值处，如果亮带的宽度足够大，不同级次的条纹将会重叠。也就是说，大于 j 的级次全部被亮纹覆盖，无法分辨，干涉消失。

图 9.59　非单色光的杨氏干涉

当长波限 $\lambda+\Delta\lambda$ 的 j 级与短波限 λ 的 $j+1$ 级重合，即 $j(\lambda+\Delta\lambda)=(j+1)\lambda$ 时，干涉消失，从而可得 $j=\lambda/\Delta\lambda$，为最大相干级数。对应的光程差 $\Delta L_{\max}=j(\lambda+\Delta\lambda)=(j+1)\lambda=\lambda^2/\Delta\lambda+\lambda\approx\lambda^2/\Delta\lambda$，称作最大相干光程差，也叫**相干长度**，即相干长度为

$$\Delta L_{\max}=\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{9.53}$$

与在空间无限长的单色波不同，非单色波中的所有波列叠加之后，只在空间的一个有限的区域内才有振动，这就是所谓的**波包**。相干长度实际上表示了非单色光所形成的波列的有效长度，即波包的有效长度。由于非单色波是一个有限长度的波包，也可以从波包在空间传播的角度看，当波包穿过该点后，对该点的影响将消失，那么这一时间其实就是相干时间 τ。所以相干时间的物理意义也可以理解为有限波列在空间点所引起的扰动的有效持续时间。

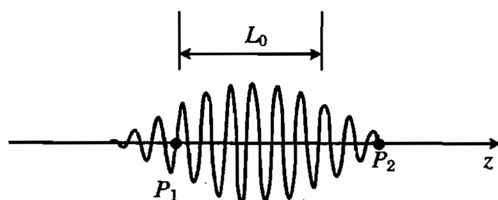


图 9.60　波包的长度与时间相干性

空间中沿着波线有两个不同的点 P_1，P_2，两点间的距离为 $r_{1\text{-}2}$，如图 9.60 所示。那么，容易理解，如果 $r_{1\text{-}2}<L_0$，则这两点的扰动是由一个波列（实际是一个波包）所引起的，因而是相干的；反之，如果 $r_{1\text{-}2}>L_0$，则这两点的扰动不是由一个波列引起的，因而是不相干的。

可以将式(9.53)用光波的频率表示。因为

$$\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}=\frac{\left(\frac{c}{\nu}\right)^2}{\frac{c}{\nu^2}\Delta\nu}=\frac{c}{\Delta\nu}$$

所以

$$\Delta L_{\max}=\frac{c}{\Delta\nu} \tag{9.54}$$

也可表示为 $\Delta L_{\max}/c=1/\Delta\nu$，而 $\Delta L_{\max}/c$ 就是波包传过自身长度所用的时间，称作**相干时间**。记相干时间为 τ，式(9.54)化为

$$\tau\Delta\nu=1 \tag{9.55}$$

式(9.55)的含义是：将频率分布范围为 $\Delta\nu$ 的光波分为两列，如果它们到达某一点的时间差大

于 $1/\Delta\nu$，那么它们就不能相遇，自然也就不能产生干涉。这就是时间相干性的物理本质。

式(9.55)称为**时间相干性的反比公式**。

那么，无论从时间上看（对空间中的同一点），还是从空间距离上看（在同一时刻），相干时间 τ 和相干长度 L_0 都反映了光波场的时间相干性。

【例 9.11】 若用波长范围 $\lambda = 589.0 \sim 589.6$ nm 的光照明迈克尔森干涉仪，首先调整干涉仪，得到清晰的干涉条纹，然后移动 M_1，干涉图样为什么会逐渐变得模糊？问第一次视场中干涉条纹消失时，M_1 移动了多少距离？

解 分析：由于不同波长的干涉条纹分布不同，故会相互重叠，从而反衬度下降，直至看不见条纹。

这是非单色光的时间相干性问题。

非单色波的相干长度，即波列的有效长度为 $L = \lambda^2/\Delta\lambda$，要求经过两镜的光波能够相遇，必须有 $L \geqslant 2h$，于是 $h \leqslant \lambda^2/(2\Delta\lambda) = 0.289$ mm。即 M_1 移动的距离为 0.289 mm。

第 10 章　光 的 衍 射

10.1　惠更斯-菲涅耳原理

光的衍射是另一类光波相干叠加的问题，处理光的叠加要依据光的叠加原理，从这一点看，衍射与干涉并无本质区别，只是所采用的方法不同而已。

10.1.1　次波模型

1. 光的衍射现象

在没有障碍物的自由空间中，波总是沿着直线传播的。当有障碍物时，会有衍射现象，即波会传播到障碍物的“阴影”区域，仿佛绕过了障碍物，如图 10.1 所示。“衍射”通常被解释为“绕射”，其实这并不是很准确的理解。

对于机械波，衍射是常见的现象。但是，光波的衍射却不容易观察到，通常我们说，光是沿直线传播的，当光波遇见障碍物时，阴影区域通常是没有光的，如图 10.2 所示。正因为如此，我们可以很容易地遮挡光线。

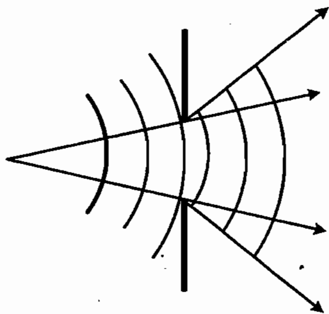


图 10.1　波由于衍射而进入阴影区域

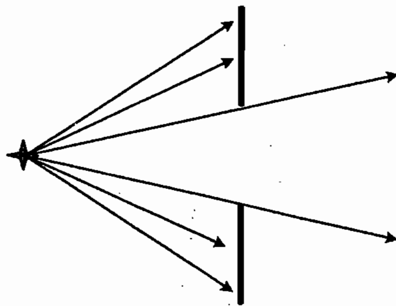


图 10.2　光的直进现象

我们知道，衍射是波的基本特征，但是，明显的衍射现象只发生在衍射障碍物的空间尺度与波长相当的情况下。而日常生活中的墙壁、窗口、树木等等，它们的尺寸要比光的波长(约 10^{-7} m)大得多，所以光的衍射现象并不明显。如果障碍物的尺度很小，比如让光通过很细的狭缝，或很小的孔，或者在平直的挡板边缘，当仔细观察时，还是可以看到光的衍射现象的。

2. 次波

为了解释光的衍射，惠更斯提出了“次波”的概念。

光波在空间的传播，是振动的传播，波在空间各处都引起振动。除了真实的光源之外，波前

上的任一点都可视为新的振动中心，这些振动中心进一步发出新的球面光波，称为**次波**。后续的波面(或波前)就是这些球面次波的包络面。上述波前上的振动中心称为**次波中心**。这些理解后来称作**惠更斯原理**。

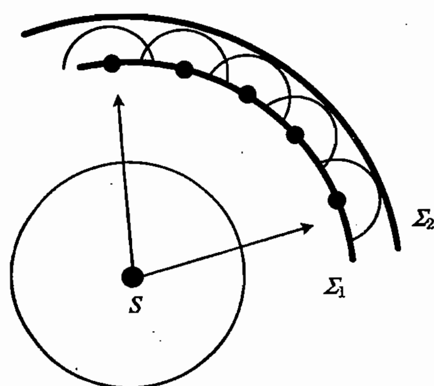


图 10.3 次波传播

按照惠更斯的观点，可以将光传播的过程看作是次波不断传播的过程。

任何一个次波中心发出的次波又在其周围引起新的振动，即次波又可以产生新的振动中心，形成新的次波中心，这些次波中心继续发出次波，由此使得光波不断地向前传播，如图 10.3 所示。或者说，次波是由波场中的振动中心"衍生"出来的，而任何一个次波中心又进一步衍生出新的次波。这就是"衍射"一词的准确含义。

如果实际的光源为点光源 S，发出球面波。波场中球面 Σ_1 就是一个波面，即等相位面。Σ_1 上无数个次波中心发出新的次波，经过一段时间后，这些次波的包络面就是球面 Σ_2。新的波面 Σ_2 上又有无数个新的次波中心，从这些次波中心发出新的次波，不断向前传播。

用次波的模型可以很容易解释光的衍射现象。如图 10.4 所示，有一个带狭缝的挡板，从狭缝发出的平面是波场中的一个波前。该波前上有无数个次波中心，这些中心所发出的次波又衍生出新的次波中心，所发出的次波将会在空间中不断地扩展，于是振动就延伸到了被障碍物遮挡的区域，即产生所谓的"衍射"现象。

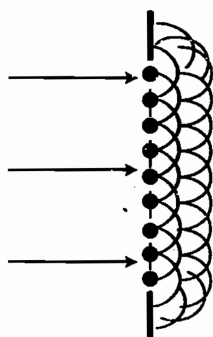


图 10.4 用次波解释衍射的成因

从对物理学名词准确把握的角度出发，将上述现象和过程称作"衍射"更加准确，因为其物理上的原因是"衍生"出了新的次波中心，又不断发出次波，才使得波在空间传播开来。

波前上任一点都是一个次波中心，即一个点光源，从这个次波中心可发出球面次波，按照这一模型，即使是平行光束，也将由于衍射而逐渐扩展。因此，从波动的观点看，是没有"光线"或"光束"之类的概念的。

10.1.2 次波的相干叠加

1. 次波引起的振动

在波场中任意取定一个面 Σ，这就是波场中的一个波前。实际上，这样的波前可能正是一列光波的波面。例如，若是点光源产生的球面波，波前可以取在球面上；若是平面波，波前可以取在平面上。该波前上各个次波中心发出的次波将在波场中某一点 P 处引起振动。若记波前 Σ 上 Q 点的次波中心的振动为 $\tilde{U}_0(Q)$，P 点的振动为 $\tilde{U}(P)$，则 $\tilde{U}(P)$ 其实就是 Σ 上所有次波中心发出的次波在 P 点所引起的振动的和。

在 Q 周围取一个面元 $\mathrm{d}\Sigma$，由于面积元足够小，可以认为上面的次波中心具有相同的特征。这一面元上的次波在 P 点所引起的振动为 $\mathrm{d}\tilde{U}(P)$，则存在以下关系：

$\mathrm{d}\tilde{U}(P)\propto\tilde{U}_0(Q)$，其中 $\tilde{U}_0(Q)$ 为 Q 点的振动，称为瞳函数；

$\mathrm{d}U(P) \propto \dfrac{\cos(kr - \omega t + \varphi_Q)}{r}$，其中 Q 点为点光源，发出球面次波，φ_Q 是 Q 点的相位；

$\mathrm{d}\widetilde{U}(P) \propto \mathrm{d}\Sigma$，其中 $\mathrm{d}\Sigma$ 为次波中心周围面元的面积。

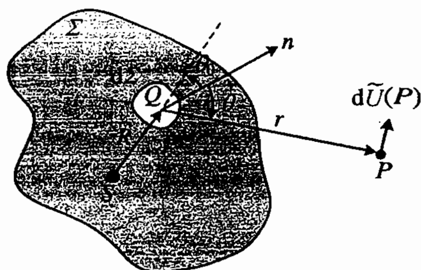


图 10.5　次波的复振幅

设实际的光源中心在 S 点，则 P 点的振动还与面元 $\mathrm{d}\Sigma$ 的方向有关，如图 10.5 所示，可以用函数关系表示为

$$\mathrm{d}\widetilde{U}(P) \propto F(\theta_0, \theta)$$

式中，θ_0，θ 分别是源点 S 和场点 P 相对于次波面元 $\mathrm{d}\Sigma$ 的方位角。具体定义如下：

θ_0 为面元法线与 S，Q 连线间的夹角，θ 为面元法线与 Q，P 连线间的夹角，$F(\theta_0, \theta)$ 称为**倾斜因子**。

上述的 $\widetilde{U}_0(Q)$，$\dfrac{\cos(kr - \omega t + \varphi_Q)}{r}$，$\mathrm{d}\Sigma$ 以及 $F(\theta_0, \theta)$ 可称为次波所引起的振动的四要素。

综合考虑上述所有因素，可以得到一个总的表达式

$$\mathrm{d}\widetilde{U}(P) = KF(\theta_0, \theta)\widetilde{U}_0(Q)\frac{\cos(kr - \omega t + \varphi_{\Sigma_0})}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{10.1}$$

式中，K 为比例常数。这就是一个微分面元发出的次波所引起的元振幅。

2. 次波的相干叠加

波场中某一点的振动就是某一波前上发出的所有次波在该点的合振动。

将波前 Σ 上所有次波中心发出的次波在 P 点的振动相干叠加，即可以得到该波前发出的次波传播到 P 点时所引起的合振动，即

$$\widetilde{U}(P) = K\sum_{Q\in\Sigma}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0, \theta)\frac{\cos(kr - \omega t + \varphi_{\Sigma_0})}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{10.2}$$

这就是**惠更斯-菲涅耳原理**。

由于次波中心在波前上是连续分布的，上述求和应当用积分计算。

3. 菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式

如果取一个封闭的空间曲面 Σ，即一个封闭的波前，由于从光源发出的所有方向的波都将通过此波前，而且只通过此波前一次，所以光源在任一场点 P 所引起的振动与该波前所发出的全部次波在该点所引起的振动等价，如图 10.6 所示。由于波前是一连续分布的曲面，所有次波中心发出的次波在 P 点的振动就是下面的曲面积分：

$$\widetilde{U}(P) = K\oiint_{\Sigma}\widetilde{U}_0(Q)F(\theta_0, \theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}\Sigma \tag{10.3}$$

即

$$\widetilde{U}(x, y) = K\oiint_{\Sigma}\widetilde{U}_0(x', y')F(\theta_0, \theta)\frac{\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}d - \omega t + \varphi_0(x', y')\right]}{d}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{10.4}$$

其中，$d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$，这就是菲涅耳衍射积分公式。

经过基尔霍夫用光的电磁理论加以严格的论证，菲涅耳根据物理直觉所建立的积分公式基本上是正确的。需要修正的只是，波前可以为任意形状的封闭曲面，而且导出了积分公式中的

比例常数和倾斜因子的表达式，其中

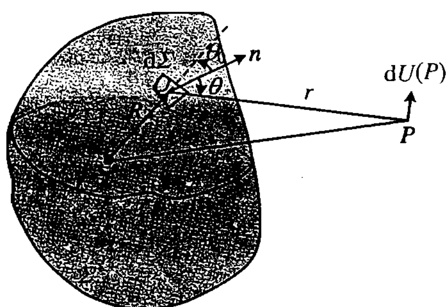


图 10.6 封闭空间曲面上次波的复振幅

$$K = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}}{\lambda} \tag{10.5}$$

$$F(\theta_0,\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta_0 + \cos\theta) \tag{10.6}$$

比例常数中的相位因子不为 0，而是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}/\lambda$，即有一个 $\pi/2$ 的相位超前，说明等效次波源的相位不等于波前上 Q 点扰动的相位，而倾斜因子的表达式说明向后倒退的次波也对 P 点的振动产生作用。只有在波前取为球面的情况下，$\theta_0 = 0$，$F(\theta_0,\theta) = (1+\cos\theta)/2$，此时 $\theta = \pi$，才有 $F(\theta_0,\theta) = 0$。

将表达式(10.5)，(10.6)代入式(10.3)，得到

$$\widetilde{U}(P) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}}{2\lambda}\oiint_{\Sigma}\widetilde{U}_0(Q)(\cos\theta_0 + \cos\theta)\frac{\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}d - \omega t + \varphi_0(x',y')\right]}{d}\mathrm{d}\Sigma \tag{10.7}$$

经过基尔霍夫修正的上述积分公式称作菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式。处理光的衍射问题都可以归结为求解菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式。由于积分计算的复杂性，在大多数情况下，上述积分是无法严格求解的，所以，总是在一定条件下将菲涅耳-基尔霍夫衍射积分公式简化为可以求解的形式。

当波场中有障碍物，即有衍射屏时，可以自然地将波前取在衍射屏的位置，此时封闭的空间曲面由三部分构成(如图 10.7 所示)：衍射屏上的透光部分 Σ_0、不透光的光屏部分 Σ_1 以及在空间扩展的半个曲面 Σ_2。可以忽略 Σ_0 与 Σ_1 的相互影响，认为在透光部分的瞳函数 $\widetilde{U}_0(Q)$ 取作自由传播时的数值，而不透光部分的瞳函数 $\widetilde{U}_0(Q)$ 自然等于 0。相对于光的波长，衍射屏的不透光部分也可以认为是无限大的，所以第三部分可以取一个半径无穷大的半球面，经过严格的数学证明，积分公式在该球面上的积分值等于 0，不必考虑。因此，在求解菲涅耳-基尔霍衍射积分公式时，只需要对衍射屏的光孔部分作积分就可以了，即将曲面积分的范围局限于光孔(也可称为有效波前)Σ_0。

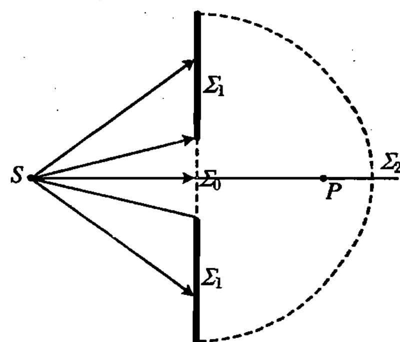


图 10.7 基尔霍夫边界条件的说明

积分公式可以化为

$$\widetilde{U}(P) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}}{2\lambda}\iint_{\Sigma_0}(\cos\theta_0 + \cos\theta)\widetilde{U}_0(Q)\frac{\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}d - \omega t + \varphi_0(x',y')\right]}{d}\mathrm{d}\Sigma \tag{10.8}$$

在特定的实验条件下，应用近轴条件和远场条件，积分公式可以进一步得到简化，并给出很好的结果。

4. 衍射的分类

根据衍射障碍物(衍射屏)到光源和接收屏的距离，可以将衍射分类，从而可采用不同的方法进行处理。

距离有限的，或至少一个是有限的，如图 10.8(a)所示，为菲涅耳衍射。此时，波前通常为球面，在接收屏上的任一点来自不同方向的次波进行相干叠加。

距离无限的，即平行光入射、出射，如图 10.8(b)，为夫琅禾费衍射。此时波前为平面，相互平行的光在无穷远处相干叠加。事实上，在衍射屏后置一凸透镜，而将接收屏置于透镜的像方焦平面处，相互平行的光经过透镜后会聚在接收屏上，进行相干叠加。

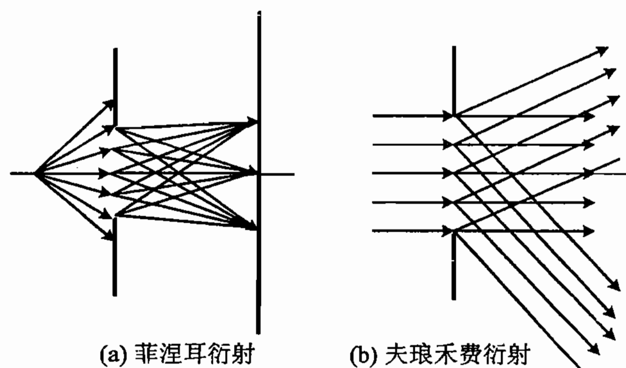


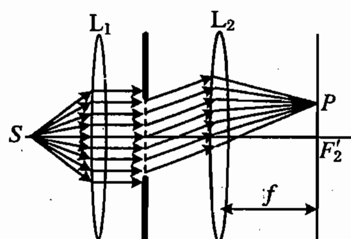
图 10.8　菲涅耳衍射和夫琅禾费衍射

10.2　夫琅禾费单缝和矩孔衍射

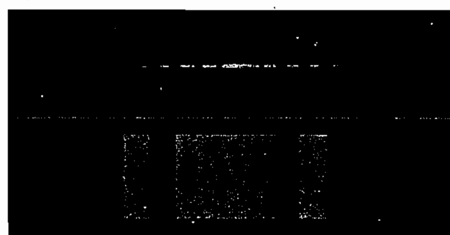
10.2.1　夫琅禾费衍射装置

衍射屏上有一条单狭缝，宽度为 a，该狭缝也称作衍射孔径；平行光入射；在衍射屏之后，置一凸透镜 L_2，接收屏处于透镜的像方焦平面，如图 10.9(a)所示。对透镜 L_2 而言，只有相互平行的光才能会聚到其焦平面上的同一点，所以，在接收屏上得到的是从单缝出射的相互平行的次波相干叠加的结果，如图 10.9(b)所示。

单缝衍射屏除了可以做成这种透射式的之外，还可以做成反射式的，即衍射屏上只有一条窄的反射面，其余部分不反射。这种反射式衍射屏的原理和分析方法与透射式的完全相同。



(a) 夫琅禾费单缝装置



(b) 点光源、线光源照明狭缝的夫琅禾费衍射花样

图 10.9　夫琅禾费单缝装置及衍射花样

10.2.2 单缝衍射强度分布

求解接收屏上的衍射强度分布，应该先通过求解衍射积分公式，得到次波在接收屏上的合振动，然后再计算接收屏上的光强分布。然而，由于严格计算积分非常复杂，所以要在一定的条件下采取近似。

由于衍射孔径即单缝是比较小的，故可以认为衍射光是满足近轴条件的。也就是说，由于入射光和衍射光的角度都是在一个不大的范围内，所以有 $\cos\theta_0\approx1$，$\cos\theta\approx1$，因而可以认为倾斜因子 $F(\theta_0,\theta)\approx1$。同时，由于入射光是平面波，故衍射屏上各次波的中心具有相等的振幅。

求解夫琅禾费衍射通常可以采用振幅矢量法和数值积分法，前者简单直观，适用于处理形状较为简单的衍射屏，后者则可以处理形状较复杂的衍射屏。下面介绍振幅矢量法。

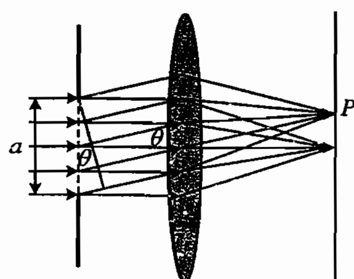


图 10.10　正入射的振幅矢量法示意

如图 10.10 所示，平行光正入射到宽度为 a 的单缝衍射屏上，考察接收屏上相对于光轴的方位角为 θ 的 P 点。由于接收屏位于透镜的像方焦平面处，所以只有沿 θ 方向的次波经过透镜后才能会聚到 P 点，所以只需要讨论从狭缝发出的沿 θ 方向的次波在 P 点引起的合振动。

将狭缝细分为 N 条等宽的单元，则每一单元的宽度为 a/N。相邻的两单元沿 θ 方向次波到 P 点的光程差为

$$\Delta L = \frac{a}{N}\sin\theta$$

在 P 点的相位差为

$$\Delta\varphi = k\Delta L = \frac{ka}{N}\sin\theta$$

将各个单元发出的次波在 P 点的振动用振幅矢量表示，分别记为 $\boldsymbol{a}_1(\theta)$，$\boldsymbol{a}_2(\theta)$，…，$\boldsymbol{a}_m(\theta)$，…，$\boldsymbol{a}_N(\theta)$，则合振动矢量 $\boldsymbol{A}(\theta)$ 就是上述矢量之和，即

$$\boldsymbol{A}(\theta) = \sum_{m=1}^{N}\boldsymbol{a}_m(\theta)$$

如图 10.11 所示，将上述矢量首尾依次相接，每个矢量相对于前一个矢量转过 $\Delta\varphi$ 角。这些矢量就构成了半径为 R 的圆的 N 段弦，每一段弦所张的圆心角为 $\Delta\varphi$，这 N 段弦所张的总圆心角为 $N\Delta\varphi=\Delta\Phi$。

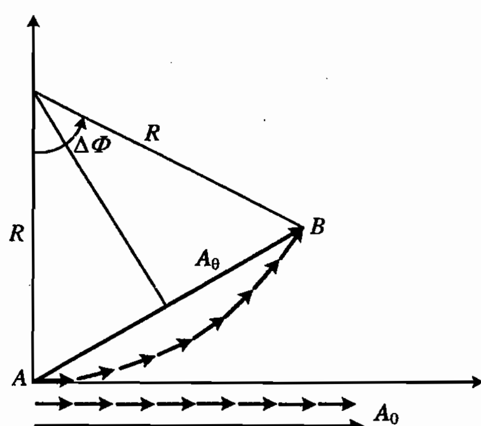


图 10.11　振幅矢量相加

如果对狭缝作无限细的划分，则 $N\to\infty$ 时，每一个单元都变得无限细，对应的振幅矢量变得无限短，从而上述折线就渐变为一段圆弧，圆弧的长度就是各段弦的长度之和，记为 A_0。

若 $\Delta\varphi=0$，则上述矢量首尾相接后成为一条直线，这条直线的长度与上述圆弧的长度相等，就是 $\boldsymbol{A}_0$。而对于沿光轴方向的次波，当 $\theta=0$ 时，相应地 $\Delta\varphi=0$，则 A_0 就是沿光轴方向的次波会聚到接收屏上相干叠加的合振动的振幅矢量，即透镜焦点处的

振幅矢量。

合矢量为弦A_θ,圆心角为$\Delta\Phi$,则有

$$R = \frac{A_0}{\Delta\Phi} \tag{10.9}$$

而 $A_\theta = 2R\sin(\Delta\Phi/2)$,即

$$A_\theta = A_0 \frac{\sin\frac{\Delta\Phi}{2}}{\frac{\Delta\Phi}{2}} = A_0 \frac{\sin\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}$$

记 $u = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$,则振幅为

$$A_\theta = A_0 \frac{\sin u}{u} \tag{10.10}$$

光强为

$$I_\theta = A_\theta^2 = A_0^2 \frac{\sin^2 u}{u^2} \tag{10.11}$$

记 $I_0 = A_0^2$(I_0 其实就是接收屏上透镜焦点处的衍射光强),则

$$I_\theta = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \tag{10.12}$$

如果入射的平面光波与光轴的夹角为 θ_0,如图 10.12 所示,狭缝所在的波前就不是等相位面,将狭缝等分为 N 个单元后,相邻两单元的次波中心之间的相位差为

$$\Delta\varphi_0 = \pm\frac{ka}{N}\sin\theta_0$$

于是对于接收屏上的 P 点,各列次波的相位差为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{ka}{N}\sin\theta \pm \frac{ka}{N}\sin\theta_0\Delta L \\ &= a(\sin\theta \pm \sin\theta_0)\end{aligned} \tag{10.13}$$

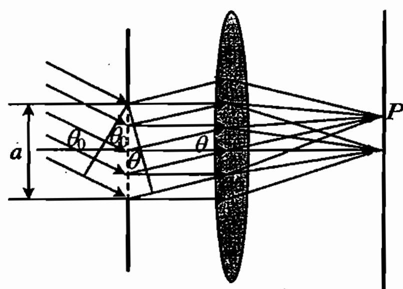


图 10.12　任意入射角的振幅矢量方法示意

合振动变为

$$A_\theta = A_0 \frac{\sin\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta \pm \sin\theta_0)}{\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\theta \pm \sin\theta_0)} \tag{10.14}$$

即只要取 $u = (\pi a/\lambda)(\sin\theta \pm \sin\theta_0)$即可。

在式(10.13),(10.14)中,入射光和衍射光位于光轴的同一侧时,取"+";否则取"-"。

当入射光与光轴的夹角为 θ_0 时,在接收屏上的焦点处,次波的相位不再相等,在 $\theta = -\theta_0$ 方向上,各列次波的相位相等,在这一方向会聚后衍射光强等于 I_0。根据几何光学成像的原理,这一点就是入射平行光经透镜后在焦平面上的像点,即所谓的几何像点。因而公式中的 I_0 实际上应当是入射光几何像点处的衍射光强。

10.2.3　单缝衍射花样的特点

单缝衍射的花样如图 10.13 所示,是一系列明暗交错的条纹。当缝宽越大时,衍射条纹越

细锐。由于单缝在 y 方向的线度较大，所以，光沿着 x 方向发生衍射。即衍射条纹只在 x 方向有一定的宽度，在 y 方向的光没有衍射。由于透镜的会聚作用，条纹是相当窄的。

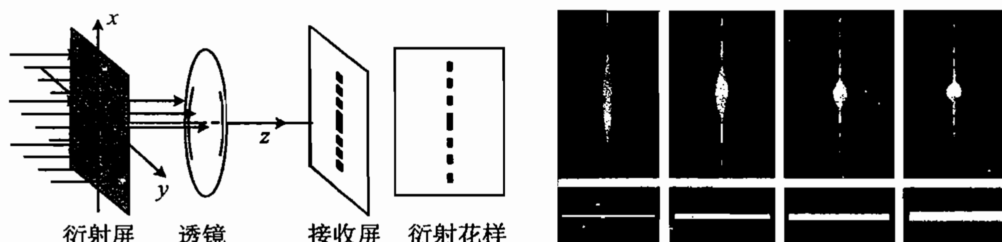


图 10.13　单缝衍射装置与衍射花样

衍射光强可以按照式(10.11)得到，从图 10.14 可以看出式中的 θ 就是焦平面上的点对透镜中心的张角，单缝衍射的光强分布如图 10.15 所示。

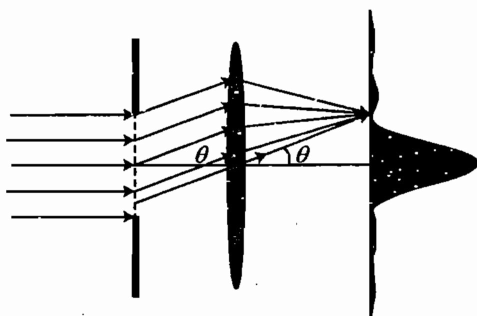


图 10.14　衍射的角是对透镜光心的张角

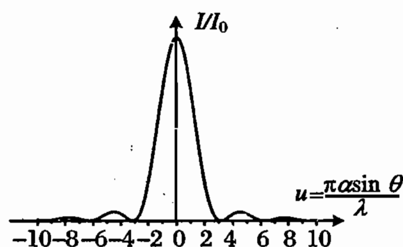


图 10.15　单缝衍射的光强分布曲线

1. 极值点

由于光强分布为 $I(P)=I_0\dfrac{\sin^2 u}{u^2}$，其极大值点可以由 $\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)'=0$ 求得，结果为

$$\frac{u\cos u-\sin u}{u^2}=0,\quad 即\quad \tan u=u$$

这是一个超越方程，如图 10.16 所示，其数值解为

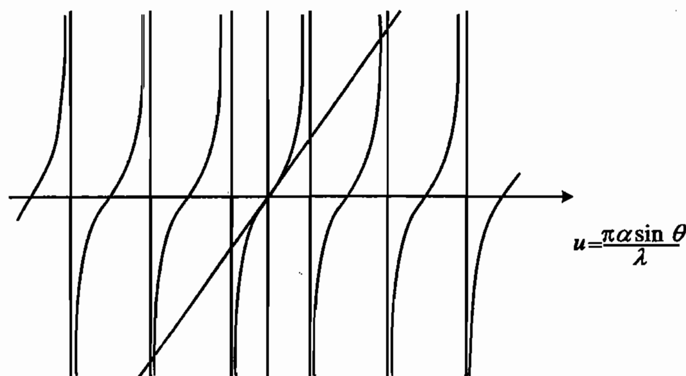


图 10.16　超越方程的数值解

$$\sin\theta = \pm 1.43\frac{\lambda}{a}, \pm 2.46\frac{\lambda}{a}, \pm 3.47\frac{\lambda}{a},\cdots$$

光强公式中分子为 0 的点为极小值点，极小值点满足 $u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta = j\pi$，且 $j\neq 0$，即

$$\sin\theta = \pm 1\frac{\lambda}{a}, \pm 2\frac{\lambda}{a},\cdots, \pm j\frac{\lambda}{a}, \pm (j+1)\frac{\lambda}{a},\cdots$$

衍射极大值和极小值的方位角如图 10.17 所示。

2. 亮条纹角宽度

可以用相邻暗条纹之间的角距离来描述亮条纹的角宽度。在近轴条件下，由 $\sin\theta\approx\theta$，有（图 10.18）

$$\theta\approx\pm 1\frac{\lambda}{a}, \pm 2\frac{\lambda}{a},\cdots, \pm j\frac{\lambda}{a}, \pm (j+1)\frac{\lambda}{a},\cdots$$

所以 0 级主极大即中央主极大的角宽度为

$$\Delta\theta_0 = 2\frac{\lambda}{a} \tag{10.15}$$

而其他高级次条纹的角宽度为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} \tag{10.16}$$

可见亮条纹的角宽度与狭缝的宽度成反比，所以上述关系称作衍射的反比关系。

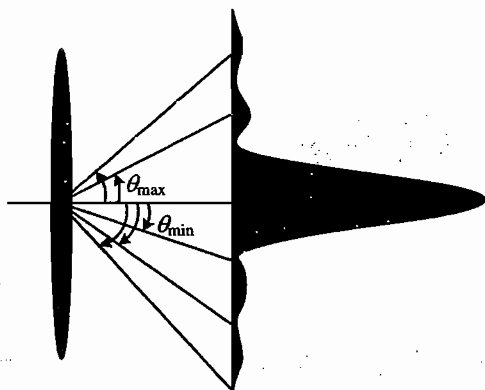


图 10.17　角位置

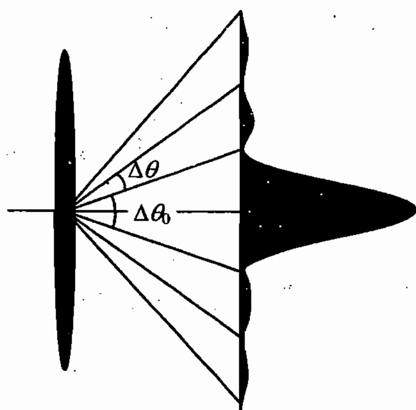


图 10.18　角宽度

3. 衍射屏与透镜的相对位置

当衍射屏上下移动时，衍射花样不变。这是因为衍射强度分布只与衍射方向 θ 有关，而 θ 是接收屏上的场点相对于透镜光心的张角。因而，条纹的位置由透镜的光轴决定。也就是说，如果衍射屏上另外有一条狭缝，则这条狭缝的衍射花样与原来狭缝的衍射花样是完全重合的。

但是，当透镜移动时，衍射条纹随着透镜的光轴移动。

衍射条纹的 0 级主极大对应系统的几何像点，就是入射的平行光经过透镜之后在其焦平面上的会聚点。所以，入射光方向改变，衍射花样整体平移。

10.2.4　夫琅禾费矩孔衍射

如图 10.19 所示，衍射屏上开有 $a\times b$ 的矩孔，这样的矩孔可以看作是沿 y 方向的、宽度为

a 的狭缝与沿 x 方向的、宽度为 b 的狭缝的交集，则接收屏上的衍射花样也就是上述两个相互垂直的狭缝的衍射花样的交集。只有在两条缝的衍射都取极大值的地方，矩孔的衍射才能取极大值，因而就形成了如图 10.20 所示的衍射花样。

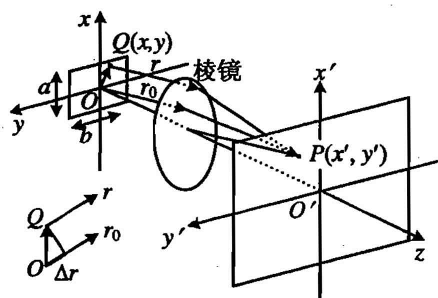


图 10.19　夫琅禾费矩孔衍射



图 10.20　夫琅禾费矩孔衍射花样

矩孔衍射的强度分布公式为

$$I(P) = I_0\left(\frac{\sin u_1}{u_1}\right)^2\left(\frac{\sin u_2}{u_2}\right)^2 \tag{10.17}$$

其中，I_0 为入射光几何像点处的衍射光强，θ_1，θ_2 分别为次波波矢相对于平面 yOz 和 xOz 的夹角，$u_1 = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta_1$，$u_2 = \frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_2$。

10.3　夫琅禾费圆孔衍射

10.3.1　圆孔衍射的强度分布

如图 10.21，平行光经过圆孔后，沿任意方向光线 r 传播，与光轴间的夹角为 θ 的次波在透镜的焦平面上相干叠加。衍射光强为

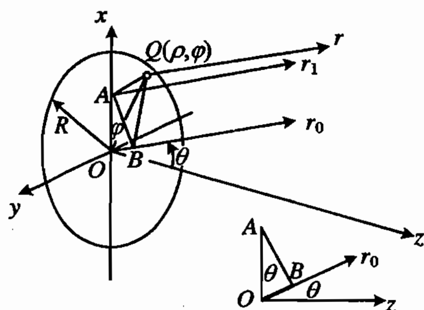


图 10.21　夫琅禾费圆孔衍射

$$I(P) = I_0\left[\frac{2J_1(m)}{m}\right]^2 \tag{10.18}$$

其中

$$m = 2\pi R\sin\theta/\lambda = kR\sin\theta$$

$J_1(m)$为一阶贝塞尔函数，是一个级数，由下式定义：

$$\begin{aligned}\frac{2J_1(m)}{m} &= \sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k'!}}{(k'+1)!k'!}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k'}\\ &= \frac{2}{m}\left\{1-\frac{1}{2}(m/2)^2+\frac{1}{3}\left[\frac{(m/2)^3}{2!}\right]^2\right.\\ &\quad\left.-\frac{1}{4}\left[\frac{(m/2)^4}{3!}\right]^2+\cdots\right\}\end{aligned}$$

衍射花样和强度分布分别如图 10.22 和图 10.23 所示。

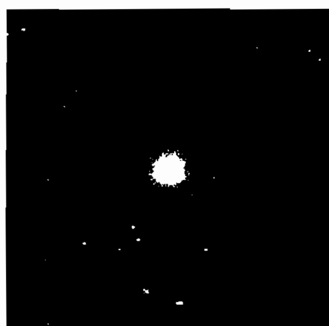


图 10.22 夫琅禾费圆孔衍射花样

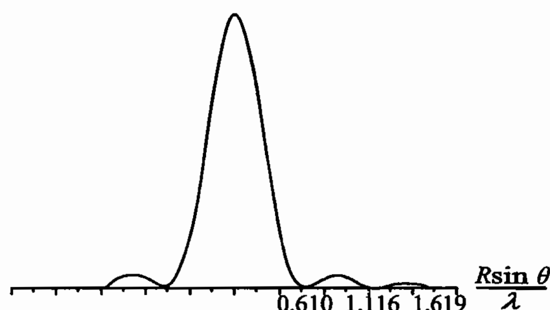


图 10.23 夫琅禾费圆孔衍射强度分布

10.3.2 圆孔衍射花样的特点

圆孔衍射花样的特点有:

(1) 同心圆环,明暗交错,不等距。

(2) 中央主极大(0 级斑)为一圆形亮斑,其能量约占衍射光总能量的 84%,称作艾里斑。研究表明,艾里斑的半角宽度(图 10.24)为

$$\Delta\theta_0 = 0.61\frac{\lambda}{R} = 1.22\frac{\lambda}{D} \qquad (10.19)$$

其中,D 为衍射屏上圆孔的直径。当平行光直接通过透镜时,也可以把透镜的通光孔径作为衍射屏的孔径,则艾里斑的半径为

图 10.24 夫琅禾费圆孔衍射花样的中央主极大

$$\Delta l = f\tan\theta_0 \approx 1.22\frac{f\lambda}{D} \qquad (10.20)$$

这就是平行光通过透镜后的衍射斑的大小。

【例 10.1】 设观察太阳时,人眼的瞳孔直径为 1 mm,焦距为 23 mm,试计算视网膜上所形成的太阳光斑的大小。

解 由于地球到太阳的距离足够远,而瞳孔的孔径又足够小,所以,可以认为射入眼睛的太阳光都是平行光。这时,可以将眼睛会聚太阳光的过程看作是夫琅禾费圆孔衍射,因而太阳光斑的直径为

$$\begin{aligned}\Delta l &\approx 1.22\frac{f\lambda}{D}\\ &= \frac{1.22\times 23\times 500\times 10^{-6}}{1}\\ &= 1.4\times 10^{-2}\quad (\text{mm})\end{aligned}$$

10.3.3 望远镜的分辨本领

平行光经光学口径成像,有一个艾里斑,而不是几何光学所认为的一个几何点。即任何一

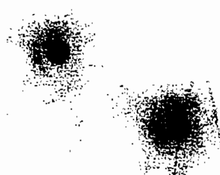


图 10.25　天文望远镜中双星的艾里斑

个物经光学口径成像后，由于衍射效应，总有一个艾里斑。若有两束光，则有两个艾里斑(图10.25)。也就是说，两个实际上在空间分开的物经光学系统成像后，由于衍射，所成的两个像可能实际上无法分开。两个艾里斑如果靠得很近，则无法分辨。采用瑞利判据：两光斑的角距离恰等于一个光斑的半角宽度，这是可以分辨的最小极限(图10.26)。即可以分辨的物点间的最小张角(视角)为 $\delta\theta_{\min}=\Delta\theta_0=1.22\lambda/D$，$\lambda$ 越小，D 越大，可分辨的间隔越小，分辨本领越大。此为望远镜的分辨本领，与放大本领不同。

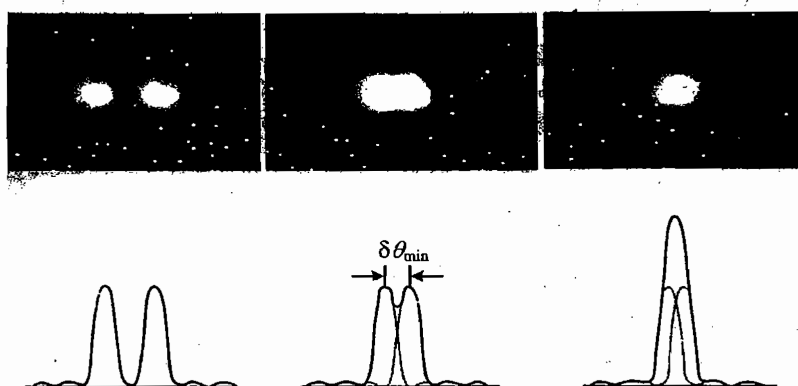


图 10.26　瑞利判据

【例 10.2】　在方形暗盒的一壁正中开一个小孔，来自物体的光通过小孔后可以在与小孔相对的壁上成像，这样就可制成小孔相机或针孔相机。这样的相机没有成像透镜，但仍能够成像。若某一针孔相机前后两壁的间距为 10 cm，用它拍摄太阳，要使太阳的像最清晰，问针孔的直径应该多大？

解　针孔相机是利用光的直线传播成像的，如图 10.27 所示，物上 A 点发出的光线经过小孔后集中于像平面上的 A' 点，而 B 点发出的光线经过小孔后集中于像平面上的 B' 点，这样物 AB 就可以在暗盒的后壁上成一个像 $A'B'$。显然，每一个像点不再是一个几何点，而是一个光斑，该光斑的大小取决于针孔的大小，孔越小，光斑越小，像就越清晰。

由于来自太阳的光可认为是平行光，故太阳上的每一点发出的光经针孔相机所成的像的大小与针孔一样。一方面，若针孔的直径为 D，像平面和针孔的距离为 d，如图 10.28 所示，则该点太阳的像对针孔的张角为

$$\Delta\theta=\frac{D}{d}$$

另一方面，由于针孔的夫琅和费衍射，太阳上的每一点经过针孔衍射成为一个艾里斑。这样的艾里斑的角宽度为

$$2\Delta\theta_0=2\times1.22\frac{\lambda}{D}$$

可见，衍射的结果与针孔成像的效果是相反的，孔越小，衍射越强烈，像越不清晰。为了使像最

清晰，使几何像斑与衍射像斑大小相等即可，即 $\Delta\theta = 2\Delta\theta_0$，所以

$$\frac{D}{d} = 2.44\frac{\lambda}{D}$$

可得

$$D = \sqrt{2.44d\lambda} = \sqrt{2.44 \times 100 \times 0.5 \times 10^{-3}} = 0.35 \quad (\text{mm})$$

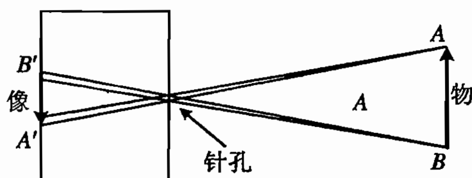


图 10.27　针孔相机的成像

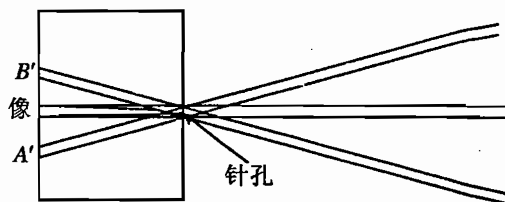


图 10.28　远处物点在像平面上的像斑

【例 10.3】（第 26 届全国中学生物理竞赛决赛试题）　某种蜜蜂的眼睛能够看到平均波长为 500 nm 的光，它是由 5 000 个小眼构成的复眼，小眼一个个密集排放在眼睛的整个表面上。小眼构造得很精巧，顶部有一个透光的圆形集光装置，叫角膜镜；下面连着圆锥形的透明晶体，使得外部入射的光线会聚到圆锥顶点连接的感光细胞上（进入一个小眼的光线不会透过锥壁进入其他小眼），从而造成一个"影像点"（像素）；所有小眼的影像点就拼成了一个完整的像。若将复眼看作球面圆锥，球面半径为 $r = 1.5$ mm，则蜜蜂小眼角膜镜的最佳直径 d 约为多少（请给出两位有效数字）？

解　昆虫的复眼由许多小眼组成，所有的小眼密排在一个球面上，每个小眼是一个独立的成像单元，在每个小眼底部只有一个感光细胞，因而每个小眼所成的像是不能分辨细节的像点。每个小眼是一个细长的圆锥筒，因此物上不同的点发出的光线进入不同的小眼中，如图 10.29 所示。所有小眼的像点组合起来，就可构成一幅完整的像，这就是昆虫所观察到的影像。由于相对于每个小眼的孔径，物到眼睛的距离要大得多，故对一个小眼而言，物上每一点发出的光进入小眼的只是发散角很小的一部分，可近似作为平行光处理。

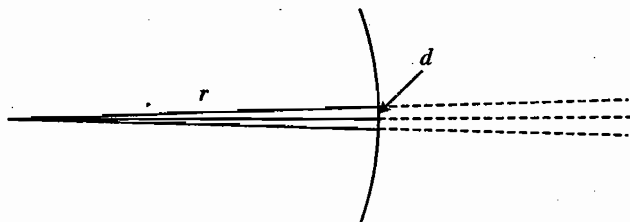


图 10.29　小眼的圆孔成像

这样一来，本题就与例 10.2 相似。要想得到最清晰的像，应当使几何像斑与衍射像斑恰好重合，即 $d/r = 2.44\lambda/d$，因而

$$d = \sqrt{2.44r\lambda} = \sqrt{2.44 \times 1.5 \times 0.5 \times 10^{-3}} = 0.043 \quad (\text{mm})$$

该试题所给的标准答案是 30 μm，即 0.03 mm。显然是以 $1.22\lambda/d$ 作为衍射斑的角宽度

所得到的。其实 $\Delta\theta_0 = 1.22\lambda/d$ 是衍射斑的半角宽度，即艾里斑亮度明显的部分对孔中心张角的 1/2。由于几何像斑是亮度均匀的，艾里斑 $2\Delta\theta_0$ 内的部分的亮度是显著的，所以，将 $2\Delta\theta_0$ 作为衍射像斑的有效张角与几何像斑进行比较才是恰当的。

【例 10.4】（第 20 届全国中学生物理竞赛决赛试题） 一近视患者不戴眼镜时，只能看清距眼睛 $a = 20$ cm 以内的物体。他发现，如果在眼前靠近眼睛处放一带小圆孔的卡片，通过小圆孔不戴眼镜看远处物体时也能清晰些。

(1) 若小圆孔的直径为 D，试根据几何光学的原理，求出当近视患者直视远处的一个物点时，在眼睛的视网膜上产生的光斑的直径。（提示：可将眼睛简化成一个焦距 f 可调的薄透镜和一个可成像的视网膜，透镜两侧的介质均为空气，视网膜与透镜的距离为 b。）

(2) 再考虑小孔的衍射效应，求小圆孔直径最恰当的大小。

解 眼睛和眼镜都是几何光学成像元件，都是通过透镜的折射成像的。对于题中的近视患者，其眼镜的远点是 20 cm。

通过小孔，不戴眼镜也能看清远处的物体，是由于小孔限制了进入眼镜的物光束的张角，从而每个物点在视网膜上成一个发散较小的像斑，如图 10.30 所示。

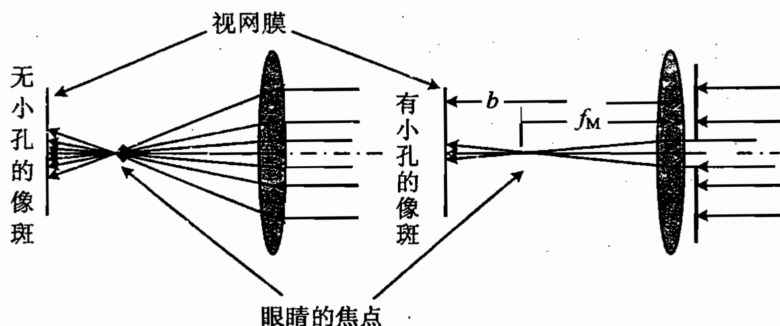


图 10.30 通过小孔的光束在视网膜上成像

(1) 如例 10.2 中的情形，每一物点的光束近似为平行光束，此时小孔对眼睛晶状体焦点的张角为 D/f_M，其中 f_M 为看远处物体时眼睛的焦距，即眼睛的最大焦距。视网膜到眼睛晶状体的距离为 b，从图 10.30 中可看出，一个物点在眼睛的焦点处可会聚成一个像点，但到视网膜上则散成一个像斑，像斑的直径为

$$\Delta l_0 = \frac{D}{f_M} \times (b - f_M)$$

近视是因为眼轴的长度大于眼睛的最大焦距。当远点的物刚好能够在视网膜上成像时，根据高斯公式 $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f_M}$，可得 $f_M = \frac{ab}{a+b}$，代入像斑大小的公式，得到

$$\begin{aligned}\Delta l_0 &= \frac{D}{f_M} \times (b - f_M) \\ &= \frac{D}{\frac{ab}{a+b}} \times \left(b - \frac{ab}{a+b}\right) \\ &= \frac{D}{ab} \times b^2 = \frac{bD}{a}\end{aligned}$$

该像斑对小孔的张角是

$$\Delta\theta = \frac{\Delta l_0}{b} = \frac{D}{a}$$

(2) 考虑小孔的衍射，远处物点经小孔所成的艾里斑对小孔的张角为 $2\Delta\theta_0 = 2\times1.22\lambda/D$，在眼睛焦平面上的艾里斑和在视网膜上的艾里斑对小孔的张角是一样的，因而，确定出最适合孔径的条件是 $2\Delta\theta_0 = \Delta\theta$，即可得到

$$D = \sqrt{2.44a\lambda} = \sqrt{2.44\times200\times0.5\times10^{-3}}$$

$$\approx 0.49 \quad (\text{mm})$$

第 11 章　狭义相对论

11.1　物理规律与参考系

物理学是关于物质各种形式运动规律的理论体系，而运动都是相对的，所以一切物理规律总是在一定的参考系中表述的。在牛顿力学中，参考系分为惯性系和非惯性系，尽管不同的惯性系之间也有相对运动，但所有的物理规律在惯性系中都有相同的形式，所以惯性系都是等价的。

物理规律在惯性系中具有相同的表述形式，也可以理解为物理规律在惯性系中的协变性。所谓协变性，是指将一个物理规律的数学表达式从一个惯性系变换到另一个惯性系，其形式保持不变。

牛顿力学中不同惯性系之间的变换是伽利略变换。若惯性系 2 相对于惯性系 1 以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，并设在 $t=0$ 时刻两参考系的原点重合。一个质点在参考系 1 中的位置表示为 $\boldsymbol{r}$，在参考系 2 中的位置表示为 $\boldsymbol{r}'$，如图 11.1 所示，则两个惯性系中空间位置坐标的变换关系为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t$$

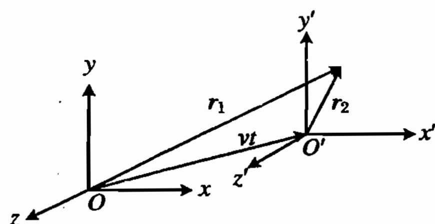


图 11.1　惯性系中空间位置的变换

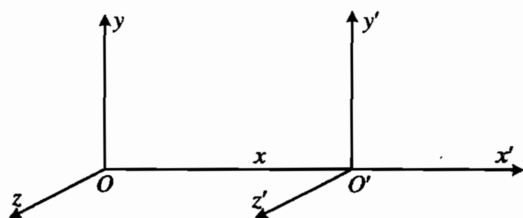


图 11.2　沿 x 方向相对运动的参考系

由于惯性系的相对运动总是匀速直线运动，所以不妨设相对运动的速度沿 x 轴方向，如图 11.2 所示，则上述变换关系可以写为

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{11.1}$$

实际上，运动总是通过物体的空间位置随时间的改变而体现出来，或者说运动是物体的时空变化，所以惯性系之间的变换除了空间变换之外，还应当包括时间变换。只不过在牛顿力学体系中，不同的惯性系的时间当然是相同的，所以，完整的变换表达式应当写为

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{11.2}$$

这种变换就是**伽利略变换**。

由伽利略变换所得到的速度变换关系为

$$\begin{cases} u'_x = u_x - v \\ u'_y = u_y \\ u'_z = u_z \end{cases} \tag{11.3}$$

很显然，伽利略变换完全能够保持物理定律的协变性。例如，在两个惯性系中，质点的加速度 $a'_x = a_x, a'_y = a_y, a'_z = a_z$，牛顿第二定律的形式 $F = ma = ma'$ 是一样的。

伽利略变换所反映的是人类根据生活经验和实验观察而形成的时空观，即时间一直在均匀地流逝着，空间是广袤无垠且静止不动的，时间与空间相互独立，没有关联，随着时间的流逝，物体的空间位置发生了变化，这就是机械运动。当然，运动的形式是多种多样的，即使物体的空间位置保持不变，其状态（如温度、能量、电磁特性等）发生了变化，只要这种变化是可以表征和测量的，物质就是在运动着。

11.2 光速不变与相对性原理

根据麦克斯韦的电磁学理论，电磁波的传播速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}}$$

其中，ε_0 是真空中的介电常数，ε_r 是相对介电常数，则 $\varepsilon_r\varepsilon_0$ 就是介质的介电常数。同样，μ_0，μ_r，$\mu_r\mu_0$ 分别是真空磁导率、相对磁导率和介质的磁导率。在真空中，光的传播速度为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{11.4}$$

这是一个不变的常数，也就是说，光在真空中的速度恒等于 c。这样一来，电磁理论就产生了一个与经典的伽利略变换相矛盾的结论：在两个有相对运动的参考系中，同一个物体运动的速度应当是不同的；但光传播的速度相对于任何同一介质中的参考系都是相同的，尤其是，光在真空中传播时，对于任何参考系，其速度都是 c。

由于电磁理论与经典力学的矛盾，当时有一种观点认为电磁波不可能相对于任何参考系的速度都是恒定值 c，而只有相对于一个特殊参考系的速度才等于 c，电磁理论也只有在这样的一个特殊参考系中才是正确的。这样的特殊参考系是绝对静止的参考系，相对于该参考系的运动就是绝对运动。

在此之前，有一种被广泛接受的观点认为，所有形式的波都是振动的传播，而振动的传播离不开弹性介质，所以在宇宙中一定有一种无所不在的介质，光波就在这种介质中传播，这种介质就是所谓的“以太”。尽管以太是看不见、摸不着的，但当时的人们都认为以太是一种客观存在，

光在以太中传播，而且以太就是一种绝对静止的介质。

既然以太是绝对静止的，则地球一定以某一速度相对于以太运动。按照静止的时空观和伽利略变换，光在地球上沿不同方向运动的速度就应当是不同的，如果测出了光沿不同方向运动的速度及其差别，就可以据此确定地球相对于以太运动的速度。虽然很早就有人试图做这样的测量，但由于受到条件的限制，所得到的结果没有什么说服力，直到迈克尔森发明了以其姓氏命名的干涉仪(图 9.41)。

设地球上的实验室相对于以太的速度为 v，不妨使干涉仪的一臂与速度 v 的方向一致，如图 11.3 所示，并设两臂的长度均为 l。

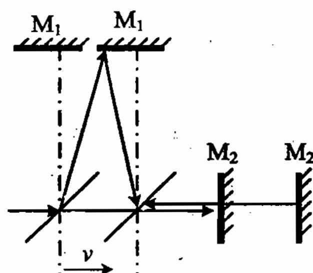


图 11.3　干涉仪中的光程

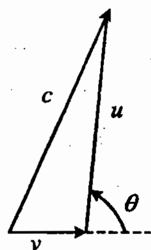


图 11.4　速度的合成

按照伽利略速度的合成原则，干涉仪相对于以太的速度 v、光相对于以太的速度 c、光相对于干涉仪的速度 u 之间的关系为

$$c^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta$$

可以解得

$$u = \sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta} - v\cos\theta$$

则由 M_1 反射的光相对于干涉仪的速度为 $v_1 = \sqrt{c^2 - v^2}$，往返的时间为 $t_1 = 2l/\sqrt{c^2 - v^2}$；射向 M_2 的光相对于干涉仪的速度为 $l/(c - v)$，由 M_2 反射的光，相对于干涉仪的速度为 $l/(c + v)$，往返的时间为 $t_2 = \dfrac{l}{c - v} + \dfrac{l}{c + v} = \dfrac{2l}{c}\dfrac{1}{1-(v/c)^2}$。因此，两臂之间的光程差为

$$\Delta L = c\Delta t = 2l\left[\frac{1}{1 - (v/c)^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\right]$$

$$\approx 2l\left\{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 - \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]\right\} = l\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

将整个干涉仪转过 90°，则光程差的改变为

$$2\Delta L = 2l\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

由于光程差每变化一个波长，干涉条纹将移过一个条纹间隔，于是上述操作所引起的条纹移动为

$$\frac{2\Delta L}{\lambda} = \frac{2l}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

由于地球绕太阳公转的速度大小约为 30 km/s，这就是 v 的最小值，则 $(v/c)^2 \approx 10^{-8}$。在迈克尔森-莫利实验中，有效臂长为 $l = 10$ m，光波长为 $\lambda = 500 \times 10^{-9}$ m，于是有

$$\frac{2\Delta L}{\lambda}=\frac{2l}{\lambda}\left(\frac{v}{c}\right)^2\approx 0.4$$

即条纹将移动 0.4 个间隔，而实测的结果为条纹移动最多不超过 0.01 个间隔。

根据实测的结果，地球相对于以太的速度 v 的上限仅为 1.5 km/s。

在迈克尔森-莫利实验之后，不断有人尝试采用更精确的方法测量上述速度，较精确的结果显示，速度上限分别不超过 3×10^{-2} km/s 和 5×10^{-5} km/s。因此，可以肯定不存在地球相对于以太的速度，也就是说，不存在一个绝对静止的参考系，真空中的光在任何参考系中沿任何方向的速度都是恒定值。

根据实验事实，爱因斯坦提出了两条相对论的基本原理：

(1) 相对性原理：所有惯性参考系都是等价的，物理规律对所有惯性参考系都可以表述为相同的形式。无论是力学现象、电磁学现象，还是其他现象，都无法觉察出其所处的参考系的任何绝对运动。

(2) 光速不变原理：真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 c，并与光源的运动无关。

下面通过一个简单的实例说明相对论时空观与经典时空观的区别。设有两个惯性系 Σ，Σ'，且 Σ' 相对于 Σ 以速度 v 沿 x 轴方向运动。在 Σ 系的原点有一发光点，在两坐标系原点重合时，发出一列光波。

如图 11.5 所示，按照伽利略变换，对 Σ 系的观察者来说，上述光波沿各个方向传播的速度都是 c，光波的波面是以 O 为中心的球面；而对 Σ' 系的观察者来说，光沿 x 方向传播的速度为 $c-v$，沿 $-x$ 方向传播的速度为 $c+v$。x 轴上有两个距离 O 点相等的空间点 P_1，P_2，无论对 Σ 系的观察者还是对 Σ' 系的观察者，光信号总是同时到达上述两点的。

如果按照相对论的时空观，则会得到不同的结论。如图 11.6 所示，按照相对性原理，在两个参考系中看到的光速都是一样的，所以无论对于 Σ 系还是 Σ' 系，光的波面都是球面。对于 Σ 系的观察者，由于两点是静止的，所以光波依然是同时到达这两点。而由于 Σ' 系朝向 P_1 点运动，所以在观察者看来，光波一定是先到达距离较近的 P_1 点，然后再到达距离较远的 P_2 点。从图中可以进一步看出，Σ' 系中的观察者先于 Σ 系的观察者看到光波到达 P_1 点。这样一来，在一个参考系中同时发生的时间，在另一个参考系中，就不是同时发生的。

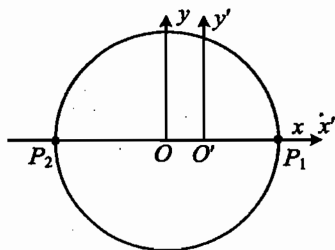


图 11.5　经典时空观中的光波

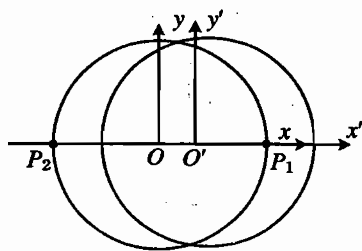


图 11.6　相对论时空观中的光波

也可以通过上述例子得到两个惯性系时空坐标之间的关联，两参考系的原点重合时为计时的起点，并在这时从原点发出一列光波。一个空间点 P，在两个参考系中的坐标分别为记为 (x,y,z) 和 (x',y',z')，在两个参考系中观察光波传到 P 点的时刻分别为 t 和 t'，则由于在两个参考系中，光波传播的速度都是 c，所以分别有

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0\quad 和\quad x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$$

上述两式就是在两个惯性系中以光信号联系着的两个事件所满足的关系。其实，在两个惯性系中的同一事件不一定以光信号关联，或者也可能没有关联，这种情况下，上述两式中的 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ 和 $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$ 就不一定为零，而是可以取任意值。

事实上，由于两个惯性系有确定的相对运动的速度，所以总可以将 $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$ 变换为以 x,y,z,t 表达的形式 $f(x,y,z,t)$，即

$$f(x,y,z,t)=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$$

当 $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$ 时，$f(x,y,z,t)$ 也等于零，而这时表达式 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ 也一定为零。因而，$f(x,y,z,t)$ 与 $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ 只差一个常数因子，即

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=A(x^2+y^2+z^2-c^2t^2)$$

其中，常数 A 仅仅依赖于两惯性系相对速度的绝对值（这是因为在空间中并不存在某个特殊的方向）。考虑到两个惯性系是等价的，相对速度的绝对值是相等的，从而也一定有

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=A(x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2)=A^2(x^2+y^2+z^2-c^2t^2)$$

所以 $A^2=1$。同样由于两个参考系是等价的，所以应当取 $A=+1$。这样就得到

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \tag{11.5}$$

上式是根据光速不变性所得到的结论，因而是相对论时空观的基本变换关系。

一般地，定义以下数学表达式：

$$s^2=c^2t^2-(x^2+y^2+z^2) \tag{11.6}$$

并将其称为在惯性系 Σ 中事件 $(0,0,0,0)$ 和 (x,y,z,t) 之间的间隔。

同样，定义惯性系 Σ' 中事件 $(0,0,0,0)$ 和 (x',y',z',t') 之间的间隔为

$$s'^2=c^2t'^2-(x'^2+y'^2+z'^2) \tag{11.7}$$

则相对论的基本变换关系可表示为

$$s'^2=s^2 \tag{11.8}$$

这一关系式就是相对论变换中的间隔不变性。

11.3 洛伦兹变换

相对论变换中的间隔不变性，是由光速不变原理所得到的结论，根据这一结论，可得到时空坐标的变换关系。

11.3.1 时空坐标的洛伦兹变换

设两个惯性系之间的相对运动如图 11.2 所示，即 Σ' 系相对于 Σ 系沿 x 方向运动，而在 y，z 方向无相对运动。这样一来，两惯性系中的 y,z 是不变量，变换仅与 x,t 有关，即

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}ct \\ y'=y \\ z'=z \\ ct'=a_{21}x+a_{22}ct \end{cases}$$

两参考系中，由于空间坐标轴的正方向相同，故 $a_{11}>0$；由于时间的正方向也相同，故 $a_{22}>0$。

根据间隔不变性，可得

$$(a_{11}x + a_{12}ct)^2 + y^2 + z^2 - (a_{21}x + a_{22}ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

即有

$$\begin{cases} a_{11}^2 - a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0 \\ a_{12}^2 - a_{22}^2 = -1 \end{cases}$$

从上面第一式解出 $a_{11} = \sqrt{1 + a_{21}^2}$，从第三式解出 $a_{22} = \sqrt{1 + a_{12}^2}$，并将它们代入第二式，从中可得到

$$\frac{\sqrt{1 + a_{21}^2}}{a_{21}} = \frac{\sqrt{1 + a_{12}^2}}{a_{12}}$$

可见 $a_{12} = a_{21}$。

观察 Σ'系的坐标原点O'。由于Σ'系相对于Σ 系沿x 方向以速度v 运动，O'点在两参考系中的位置分别为 $x = vt$ 和$x' = 0$，于是有

$$0 = a_{11}vt + a_{12}ct$$

可解得

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{v}{c}$$

再根据前述结果，得到

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{-v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

于是两惯性系 Σ'和Σ 之间的时空变换关系为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \tag{11.9}$$

反过来，Σ 系相对于Σ'系沿x 方向以速度$-v$ 运动，因而有

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \tag{11.10}$$

11.3.2 同时的相对性

在 Σ 系中的x_1点在时刻 t_1发生了一个事件，x_2点在时刻 t_2发生了另一个事件，把这两个事件分别记为(x_1, t_1)和(x_2, t_2)。在 Σ'系看来，根据洛伦兹变换，这两个事件发生的时间分别

为 $t_1' = \dfrac{t_1 - \dfrac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$和 $t_2' = \dfrac{t_2 - \dfrac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$,这两个事件的时间间隔为

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

如果在 Σ 系中,事件 1 先于事件 2 发生,且这两个事件有因果关系,则一定有

$$t_2 - t_1 \geqslant \frac{1}{c}(x_2 - x_1) \geqslant \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$$

于是 $\Delta t' > 0$,说明在一个惯性系中的因果关系在另一个惯性系中仍然互为因果,时序不变。

如果在 Σ 系中上述两事件不能用光信号关联,即

$$t_2 - t_1 \leqslant \frac{1}{c}(x_2 - x_1) = \frac{c}{c^2}(x_2 - x_1)$$

则有可能 $\Delta t' > 0$,也有可能 $\Delta t' = 0$。如果两参考系相对运动的速度足够大,则也有可能使得

$$t_2 - t_1 \leqslant \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$$

于是 $\Delta t' < 0$。说明没有因果关系的事件变换到另一个参考系中,事件时序的先后或同时都有可能。

如果在 Σ 系中,事件 1 与 2 同时发生,则

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{-\dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

在另一个相对运动的惯性系看来,这两个事件一定是不同时的。

11.3.3 运动时钟的延缓

设参考系 Σ'中的某一地点相继发生了两个事件,例如一个原子从激发态跃迁到基态,或一个分子在一个振动周期内从起点运动到终点,等等。事实上,可以将上述的自然过程作为计量时间的基准,由此制成时钟。

若这两个事件的时间间隔为 $\Delta\tau = t_2' - t_1'$,在另一个相对于 Σ'系以速度 v 沿 x 方向的运动参考系 Σ 上的观察者看来,这两个事件的时间间隔为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{11.11}$$

可见 $\Delta t > \Delta\tau$,也就是说,在静止参考系中一个固定地点发生的某一过程所用的时间,在另一个做相对运动的惯性系看来,时间变长了,或者说运动的物体的内部物理过程将变慢,这就是运动时钟的延缓效应。

按照相对性原理,由于惯性系都是等价的,所以在参考系 Σ'中的观察者看来,参考系 Σ 中的时钟也有延缓效应。

如图 11.7 所示,设在 Σ'系中与参考系一同运动的时钟为 C′,在 Σ 系中有相距 s 的两个时钟 C_1 和 C_2,上述时钟都已校准。当 C′经过 C_1 时,所有时钟的时刻都为 0,如图 11.7(a)所示。从这一时刻开始,时钟 C′的内部发生一个物理过程,当这一过程结束时,C′恰经过 C_2,C′的时刻为 τ,C_1 和 C_2 的时刻都为 $t = s/v$。而在 Σ 系中观察,所看到的 C′的时刻为 t'。由前面的讨论

可知，$t=\dfrac{t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}>t'$，如图 11.7(b)所示。即在 Σ 系中看来，时钟 C′由于运动而变慢了。

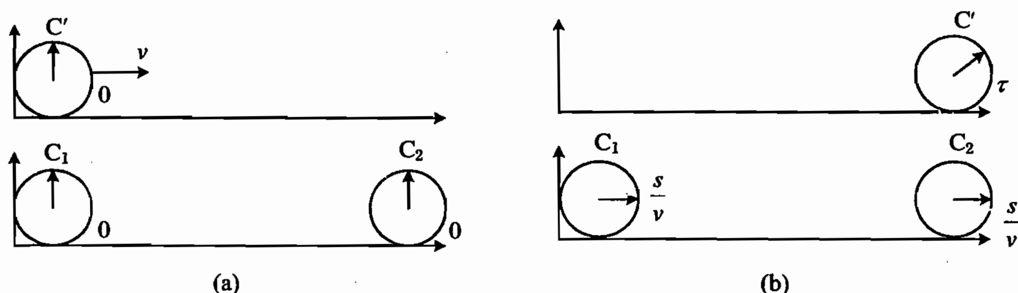


图 11.7　Σ′系中的时钟由于相对运动而变慢

如果从 Σ′系看 Σ 系中的时钟，当 C′经过 C_2 所在的位置时，也会看到时刻 $t>t'$，是不是意味着相对于 C′运动的时钟就变快了呢？其实不是的。事实上，由于 0 时刻 C′和 C_1 在同一位置，可以相互对准。但在 0 时刻，虽然 C_1 和 C_2 相对静止，但由于 Σ′系相对于 Σ 系以速度 $-v$ 沿 x 方向运动，根据变换关系 $t'=\dfrac{t-\frac{-v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，在 Σ′系中看来，$C_2$ 的时刻并不为 0，而是 δt，如图 11.8(a)所示。由于 C_2 指向 δt 时，Σ′系的时刻为 0，根据洛伦兹变换，可得

$$t'=0=\frac{\delta t-\frac{v}{c^2}s}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

即 $\delta t=(v/c^2)s$。

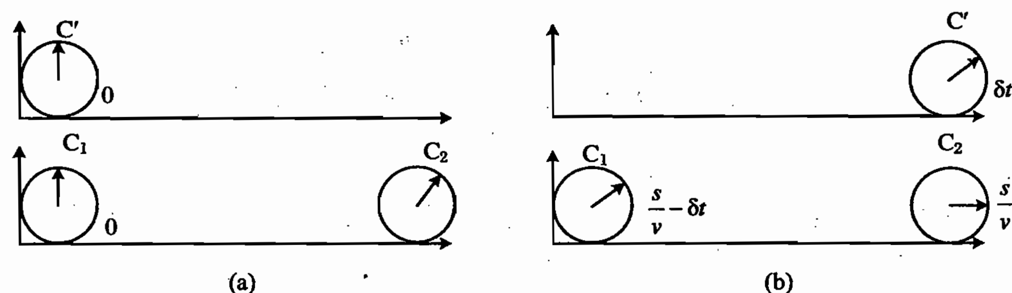


图 11.8　Σ 系中的时钟同样由于相对运动而变慢

当 C_2 运动到 C′所在的位置时，C_2 的时刻为 $t=s/v$，这也是在 Σ′系所看到的时刻。因而，在 Σ′系看来，这一过程的时间实际上为

$$t-\delta t=\frac{s}{v}-\frac{vs}{c^2}<\frac{s}{v}$$

也就是说，在 Σ′系中看来，Σ 系中的时钟同样也变慢了。

11.3.4　运动尺度的缩短

测量物体的长度，通常都是在物体静止时进行的。实际上，由于测量长度是一个实验过程，

长度是一个物理量，故有必要对长度作一个定义。

测量长度的过程是：在相对于物体静止的坐标系 Σ' 中，测出其一端的坐标 x_1' 和另一端的坐标 x_2'，则 $\Delta x' = x_2' - x_1'$ 的绝对值 $|\Delta x_1|$ 就是物体的长度 l_0。

如果物体是运动的，则测量该物体长度的过程是：在相同的时刻 t，测出物体两端在静止坐标系 Σ 中的坐标 x_1 和 x_2，则 $\Delta x = x_2 - x_1$ 的绝对值 $|\Delta x|$ 就是运动物体的长度 l。

那么，上述两个长度 l_0 和 l 是否相等呢？下面就用相对性原理作一个判断。

将上述测量物体两端坐标的过程作为两个事件。在 Σ' 系中，事件表示为 (x_1', t_1') 和 (x_2', t_2')，在 Σ 系中，事件表示为 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2)。显然，测量的过程要求 $t_2 = t_1$。于是在 Σ 系中看来，Σ' 系中的两个事件并不是同时进行的。

两事件空间坐标的关系为 $x_1' = \dfrac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 和 $x_2' = \dfrac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$，于是有

$$
\begin{aligned}
l_0 = \Delta x' = x_2' - x_1' &= \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
&= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
\end{aligned}
$$

即

$$
l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{11.12}
$$

可见 $l < l_0$，也就是说，由于相对运动物体的长度将会变短。

11.3.5 相对论的速度变换公式

速度是物体（质点）单位时间内的位移，在 Σ 系中，可以用分量表示为

$$
u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad u_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}
$$

惯性系 Σ' 相对于 Σ 系沿 x 轴方向以速度 v 运动，在 Σ' 系中的速度分量为

$$
u_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \quad u_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}, \quad u_z' = \frac{\Delta z'}{\Delta t'}
$$

测量速度，就要同时测量位移和时间，而由于相对论的时空变换，所以同一物体的速度在不同的惯性系中是不同的。事实上，根据洛伦兹变换

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
y' = y \\
z' = z \\
t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
\end{cases}
$$

可以得到

$$
\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
$$

所以

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \tag{11.13}$$

同样可以得到

$$u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2} \tag{11.14}$$

$$u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2} \tag{11.15}$$

相应的逆变换为

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \\ u_y = \dfrac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2} \\ u_z = \dfrac{u'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2} \end{cases} \tag{11.16}$$

显然，在非相对论极限条件下，由 $v^2/c^2 \ll 1, |u'_x| \ll c$，可得到

$$u_x = u'_x + v, \quad u_y = u'_y, \quad u_z = u'_z$$

11.4 相对论力学

根据洛伦兹变换的特点，物体的速度为 v，质量为 m_0，则物体的动量和能量分别为

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{11.17}$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{11.18}$$

动能为

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 \tag{11.19}$$

能量、动量与质量之间的关系为

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 \quad 或 \quad E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \tag{11.20}$$

若引入 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$，并将其称为运动质量，则 m_0 就是静止质量。从而物体的动量具有与非相对论一样的形式，即 $p = m_0 v$，而能量为

$$E = mc^2 \tag{11.21}$$

式(11.20)称作质能关系，因而 $E_0 = m_0 c^2$ 就是静止物体的能量。

【例 11.1】 设两根相互平行的尺子在各自静止的参考系中长度均为 l_0，它们以相同的速度 v 相对于某参考系运动，但速度方向相反，且平行于尺子。试站在一根尺子上测量另一根尺子的长度。

解 记观察者所用的尺子为 A，待测的尺子为 B。

原来的参考系相对于 A 尺子的速度为 v，B 尺子在原来的参考系中的速度为 v。相对于 A 尺子，B 尺子的运动速度为

$$u_B = \frac{v+v}{1+vv/c^2} = \frac{2v}{1+v^2/c^2}$$

于是，在观察者看来，B 尺子的长度为

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{u_B^2}{c^2}} = l_0\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{2v}{1+v^2/c^2}\right)^2}$$

$$= l_0\sqrt{\frac{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2-(2v)^2}{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2}} = l_0\frac{\sqrt{c^2+2v^2+c^2\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2-4v^2}}{c^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2}$$

$$= l_0\frac{\sqrt{c^2\left[1-2\frac{v^2}{c^2}+\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right]}}{c\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)} = l_0\frac{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$= l_0\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

【例 11.2】 静止长度为 l_0 的车厢以速度 v 相对于地面运行，车厢的后壁以速度 u_0 向前推出一个小球。设车厢地面是光滑的，求地面的观察者看到小球从后壁运动到前壁所用的时间。

解 设小球从车厢后壁推出的时刻、火车参考系和地面参考系的时刻都为 0，且原点重合，则在车厢参考系中，小球到达车厢前壁的时刻为

$$t' = \frac{l_0}{u_0}$$

小球在车厢系中的位置坐标为

$$x' = l_0$$

根据洛伦兹变换，在地面参考系的时刻为

$$t = \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{l_0}{u_0}+\frac{vl_0}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l_0\left(\frac{1}{u_0}+\frac{v}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

【例 11.3】 设有一光源 S 与接收器 R 相对静止，距离为 l_0，S－R 装置浸在均匀无限的液体中，液体的折射率为 n。试针对以下三种情况分别计算从光源发出信号到接收器收到信号所用的时间：

(1) 液体相对于 S－R 装置静止；

(2) 液体沿着 S－R 装置连线方向以速度 v 流动；

(3) 液体垂直于 S－R 装置连线方向以速度 v 流动。

解 记 S－R 装置所在的参考系为 Σ，相对于液体静止的参考系为 Σ'，光在液体中沿各个方向传播的速度均为 c/n。

(1) 因为两参考系相对静止，故所用的时间为

$$\Delta t_0 = \frac{l_0}{c/n} = \frac{nl_0}{c}$$

(2) 在 Σ 系中，光沿 S－R 连线方向的速度为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} = \frac{\dfrac{c}{n} + v}{1 + \dfrac{c}{n}\dfrac{v}{c^2}}$$

因此所用的时间为

$$\Delta t_0 = \frac{l_0}{u_x} = l_0 \Bigg/ \frac{\dfrac{c}{n} + v}{1 + \dfrac{c}{n}\dfrac{v}{c^2}} = l_0\,\frac{1 + \dfrac{v}{nc}}{\dfrac{c}{n} + v}$$

(3) 在 Σ 系中，光是沿与 S－R 连线垂直方向传播的，但在 Σ' 系中，由于相对运动，被 R 接收到的光并不是沿着上述方向传播的。

设在初始时刻，两参考系的原点重合，光源位于参考系的原点处。Σ 系相对于 Σ' 系以速度 $-v$ 沿 x 方向运动，在 Σ' 系中，光沿任意方向的速度均为 c/n，光到达 R 的时刻为 t'，同时 R 沿 $-x$ 方向运动的距离为 vt，即接收器 R 的位置为 $x' = -vt'$，如图 11.9 所示。因此在 Σ' 系中，有 $\left(\frac{c}{n}t'\right)^2 - (vt')^2 = l_0^2$，即 $t' = \frac{l_0}{\sqrt{(c/n)^2 - v^2}}$。

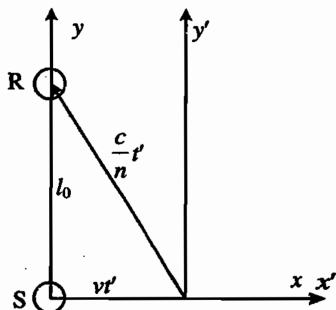


图 11.9　例 11.3 的图示

在 Σ 系中，相应的时刻为

$$t = \frac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{t' - \dfrac{v}{c^2}vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{t'\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = l_0\,\frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{\left(\dfrac{c}{n}\right)^2 - v^2}}$$

【例 11.4】 在某一坐标系中，有两个物体都以相同的速度 u 沿 x 轴运动，在该坐标系看来，这两物体之间的距离 l 始终保持不变。有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动，他看到这两个物体之间的距离是多少？

解 在相对于运动物体静止的参考系中，两物体之间的距离为 $l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$。

在观察者看来，坐标系以速度 $-v$ 运动，而上述两物体相对于观察者的速度为

$$u_x = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}$$

于是在观察者看来，物体之间的距离为

$$l' = l_0\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\sqrt{1-\left(\frac{u-v}{1-u/c^2}\right)^2/c^2}$$

$$= \frac{l}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\sqrt{c^2-\left(\frac{u-v}{1-uv/c^2}\right)^2}$$

$$= \frac{l}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{1}{1-uv/c^2}\sqrt{c^2\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2-(u-v)^2}$$

$$= \frac{l}{1-uv/c^2}\frac{\sqrt{c^2-2uv+(uv/c^2)^2-u^2+2uv-v^2}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= \frac{l}{1-uv/c^2}\frac{\sqrt{1+u^2v^2/c^2-u^2/c^2-v^2/c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= \frac{l}{1-uv/c^2}\frac{\sqrt{1-u^2/c^2-v^2/c^2(1-u^2/c^2)}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= \frac{l}{1-uv/c^2}\frac{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u^2/c^2)}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= l\,\frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv/c^2}$$

【例 11.5】 一把直尺相对于坐标系 Σ 静止，直尺与 x 轴的交角为 θ。有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动，他看到直尺与 x 轴的交角是多少？

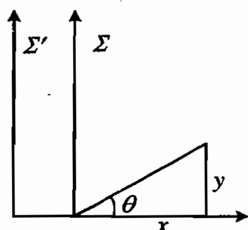


图 11.10　尺子在 x,y 方向的投影

解　如图 11.10 所示，取直尺的一端在坐标系 Σ 的原点。设直尺上一点的坐标为 (x,y)，则有

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

在观察者看来，直尺在 y 方向的投影长度不变，而在 x 方向的投影长度变短，即上述 x 变为

$$x' = x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

那么，在观察者看来，直尺与 x 的交角 θ' 满足

$$\tan\theta' = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

【例 11.6】 设一个静止的处于激发态的原子跃迁到基态，并发射出一个光子。由于光子的反冲，原子获得了一定的动量。若跃迁之前原子的质量为 M_0，激发态与基态的能量差为 ΔE，试证明：光子的频率为

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}\left(1-\frac{\Delta E}{2M_0c^2}\right)$$

证明　在原子的质心坐标系中，原子跃迁发出光子的过程中，能量和动量守恒，即

$$\begin{cases} M_0c^2+\Delta E = \sqrt{p^2c^2+M_0^2c^4}+h\nu \\ 0 = p-\dfrac{h\nu}{c} \end{cases}$$

由上面的第二式，得到 $p=h\nu/c$，将其代入第一式，有

$$\sqrt{\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 c^2 + M_0^2 c^4} = M_0 c^2 + \Delta E - h\nu$$

两边平方，得到

$$(h\nu)^2 + M_0^2 c^4 = M_0^2 c^4 + \Delta E^2 + (h\nu)^2 + 2M_0 c^2 \Delta E - 2h\nu(M_0 c^2 + 2\Delta E)$$

整理后得

$$h\nu = \frac{2M_0 c^2 \Delta E + \Delta E^2}{2(M_0 c^2 + \Delta E)}$$

则

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}\frac{2(M_0 c^2 + \Delta E) - \Delta E}{2(M_0 c^2 + \Delta E)} = \frac{\Delta E}{h}\left[1 - \frac{\Delta E}{2(M_0 c^2 + \Delta E)}\right]$$

由于质子、中子的静止能量为 939 MeV，而激发态原子所发出的光子的能量约为 2.5 eV，所以通常情况下，$M_0 c^2 \gg \Delta E$，因而上式可写为

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}\left(1 - \frac{\Delta E}{2M_0 c^2}\right)$$

【例 11.7】 设一个处于基态的原子吸收一个光子跃迁到激发态。若原子的质量为 M_0，激发态与基态的能量差为 ΔE，求该光子的频率。

解 由于要求动量和能量守恒，所以原子吸收光子后获得动量，即

$$\begin{cases} M_0 c^2 + h\nu = \sqrt{p^2 c^2 + M_0^2 c^4} + \Delta E \\ \dfrac{h\nu}{c} = p \end{cases}$$

这一组方程与例 11.6 中的方程类似，可解得

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}\left(1 + \frac{\Delta E}{2M_0 c^2}\right)$$

【例 11.8】（第 19 届全国中学生物理竞赛复赛试题） 在相对于实验室静止的平面直角坐标系 S 中，有一个光子，沿 x 轴正方向射向一个静止于坐标原点 O 的电子。在 y 轴方向探测到一个散射光子。已知电子的静止质量为 m_0，光速为 c，入射光子的能量与散射光子的能量之差等于电子静止能量的 1/10。

(1) 试求电子运动的速度 v、电子运动的方向与 x 轴的夹角 θ、电子运动到离原点距离为 L_0（作为已知量）的 A 点所经历的时间 Δt。

(2) 在电子以(1)中的速度 v 开始运动时，一观察者 S' 相对于坐标系 S 也以速度 v 沿 S 中电子运动的方向运动（即 S' 相对于电子静止），试求 S' 测出的 OA 的长度。

解 (1) 散射过程中，系统的动量和能量守恒，即

$$\begin{cases} \dfrac{h\nu}{c} = mv_x \\ \dfrac{h\nu'}{c} = mv_y \\ h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + mc^2 \end{cases}$$

其中

$$h(\nu - \nu') = \frac{1}{10}m_0 c^2, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

解得电子的速度为

$$v = c\sqrt{1-\left[\frac{m_0c^2}{m_0c^2+h(\nu-\nu')}\right]^2}$$

$$= c\sqrt{1-\left(\frac{10}{11}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{11}c$$

电子运动的方向与 x 轴的夹角为

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{\nu'}{\nu} = \arctan\frac{1}{10}$$

散射电子运动到 A 点所经历的时间为

$$\Delta t = \frac{L_0}{v} = \frac{11L_0}{\sqrt{21}c}$$

(2) 根据洛伦兹变换,在观察者看来,OA 的长度为

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = L_0\sqrt{1-\frac{21}{121}} = \frac{10}{11}L_0$$

【例 11.9】(第 21 届全国中学生物理竞赛复赛试题) μ 子在相对自身静止的惯性参考系中的平均寿命为 $\tau_0 \approx 2.0\times10^{-6}$ s。宇宙射线与大气在高空某处发生核反应产生一批 μ 子,以 $v = 0.99c$ 的速度大小(c 为真空中的光速)向下运动并衰变。根据放射性的衰变定律,相对于给定的惯性参考系,若 $t = 0$ 时刻的粒子数为 $N(0)$,t 时刻剩余的粒子数为 $N(t)$,则有 $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$,式中 μ 为相对于该惯性系粒子的平均寿命。若能到达地面的 μ 子数为原来的 5%,试估算 μ 子产生处相对于地面的高度 h。(不考虑重力和地磁场对 μ 子运动的影响。)

解 根据放射性的衰变规律,$t = \tau\ln\frac{N(0)}{N(t)}$,可算出在 μ 子自身的参照系中到达地面所经历的时间为

$$t = 2.0\times10^{-6}\times\ln\frac{100}{5}\quad(\text{s})$$

在地面参照系中,相应的时间为

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

因而高度为

$$h = vt' = 1.26\times10^4\ \text{m}$$

【例 11.10】(第 22 届全国中学生物理竞赛复赛试题) 设封闭的车厢中有一点光源 S,在距光源 l 处有一半径为 r 的圆孔,其圆心为 O_1。光源一直在发光,并通过圆孔射出。车厢以高速 v 沿固定在水平地面上的 x 轴正方向匀速运动,如图 11.11 所示。在某一时刻,点光源 S 恰位于 x 轴的原点 O 的正上方,取此时刻作为车厢参考系与地面参考系的时间零点。在地面参考系中,坐标为 x_A 处放一半径为 $R(R>r)$ 的不透光的圆形挡板,板面与圆孔所在的平面都与 x 轴垂直。板的圆心 O_2,S,O_1 都等高,起始时刻经圆孔射出的光束会有部分从挡板周围射到挡板后面的大屏幕(图中未画出)上。由于车厢在运动,将会出现挡板将光束完全遮住,即没有光射到屏上的情况。不考虑光的衍射,试求:

(1) 车厢参考系中(所测出的)刚出现这种情况的时刻;

(2) 地面参考系中(所测出的)刚出现这种情况的时刻。

解　点光源 S 发出的光束，由于受到车厢壁上圆孔的限制而具有确定的发散角 $2\Delta\theta$，如图 11.11 所示。

(1) 在车厢参考系中，由于光源和圆孔都是静止的，故上述发散角满足

$$\tan\Delta\theta_0 = \frac{r}{l}$$

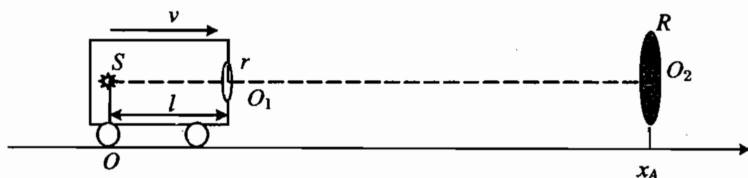


图 11.11　例 11.10 中的装置

挡板相对于车厢以速度 $-v$ 沿 x 轴方向运动，因而其半径不变。若挡板到光源的距离为 x_0 时将光束挡住，则一定有 $\tan\Delta\theta_0 = R/x_0$，于是 $x_0 = (R/r)l$。在车厢参考系中，初始时刻挡板到光源的距离为

$$x'_A = x_A\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

于是

$$t' = \frac{x'_A - x'_0}{v} = \frac{x_A\sqrt{1-v^2/c^2} - (R/r)l}{v}$$

(2) 在地面参考系中，车厢的长度为 $l_1 = l\sqrt{1-v^2/c^2}$，于是

$$t = \frac{x_A - x_0}{v} = \frac{x_A - (R/r)l\sqrt{1-v^2/c^2}}{v}$$

【例 11.11】(第 26 届全国中学生物理竞赛复赛试题)　两惯性系 S' 与 S 初始时刻完全重合，前者相对于后者沿 x 轴正向以速度 v 高速运动。作为光源的自由质点静止于 S' 系中，以恒定功率 P 向四周辐射(各向同性)光子。在 S 系中观察，辐射偏向于光源前部(即所谓的前灯效应)。

(1) 在 S 系中观察，S' 系中向前的那一半辐射将集中于光源前部以 x 轴为轴线的圆锥内。求该圆锥的半顶角 α。已知相对论的速度变换关系为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}$$

式中，u_x 与 u'_x 分别为 S 与 S' 系中测得的速度的 x 分量，c 为光速。

(2) 求 S 系中测得的单位时间内光源辐射的全部光子的总动量与总能量。

解　在所有的惯性系中，光速是不变的，但是，在不同的参考系中观察，同一列光的方向有所不同。如果在 S' 系中，xy 平面内沿与 x 轴成 θ' 角方向的光，经过任意时间 t' 后，到达点 $(ct'\cos\theta', ct'\cos\theta')$，则该点的位置在 S 系中为

$$x = \frac{ct'\cos\theta' + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y = ct'\sin\theta',\quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}ct'\cos\theta'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

如果设这列光在 S 系中与 x 轴的夹角为 θ，则有

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{c\cos\theta'+v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \bigg/ \sqrt{\left(\frac{c\cos\theta'+v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 + (c\sin\theta')^2}$$

$$= \frac{\cos\theta' + \frac{v}{c}}{\sqrt{2\frac{v}{c}\cos\theta' + \frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta'}}$$

$$= \frac{\cos\theta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta'}$$

由题目中所给的速度变换公式，可得不同参考系中 x 方向光速的变换关系为

$$c\cos\theta = \frac{c\cos\theta' + v}{1 + \frac{v\cos\theta'}{c}}$$

据此，同样可得到上述结果。

在 S'系中向前辐射的一半光子与 x 轴的最大夹角为 $\theta'_{\max} = \pi/2$，该角在 S 系中满足

$$\cos\theta = \frac{\cos\frac{\pi}{2} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{v}{c}, \quad 即 \quad \alpha = \arccos\frac{v}{c}$$

(2) 辐射的能量来自于光源，按照爱因斯坦质能关系，光源能量的变化为 $\Delta E = \Delta Mc^2$。

在 S'系中，光源静止，于是辐射功率为

$$P = \frac{\Delta E'}{\Delta t'} = \frac{\Delta M_0}{\Delta t'}c^2$$

而在 S 系中，光源运动，$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$，于是辐射功率为 $P_1 = \frac{\Delta M}{\Delta t}c^2$。由于变换关系为

$$\Delta M = \frac{\Delta M_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

所以

$$P_1 = \frac{\Delta M}{\Delta t}c^2 = \frac{\Delta M_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \bigg/ \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}c^2 = P$$

$$E^2 - p^2c^2 = M_0^2c^4$$

在 S'系中，光源静止，因而动量及其变化均为 0，全部光子的总动量亦为 0。

而在 S 系中，光源的动量为 $p_1 = Mv$，因此，单位时间内辐射出的全部光子的总动量为

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{\Delta Mv}{\Delta t'} = \frac{\Delta M_0 c^2}{\Delta t}\frac{v}{c^2} = P\frac{v}{c^2}$$

【例 11.12】(第 23 届全国中学生物理竞赛复赛试题） 串列静电加速器是加速质子、重离子、进行核物理基础研究以及核技术应用研究的设备，图 11.12 是其构造示意图。S 是产生负离子的装置，称为离子源；中间部分 N 为充有氮气的管道，通过高压装置 H，它对地有 5.00 $\times 10^6$ V 的高压。现将氢气通入离子源 S，S 的作用是使氢分子变为氢原子，并使氢原子黏附上一个电子，成为带有一个电子电量的氢负离子。氢负离子(其初速度为 0)在静电场的作用下，形成高速运动的氢负离子束流，氢负离子束射入管道 N 后将与氮气分子发生相互作用，这种作

用可使大部分的氢负离子失去黏附在它们上面的多余的电子而成为氢原子，又可能进一步剥离掉氢原子的电子使它成为质子。已知氮气与带电粒子的相互作用不会改变粒子的速度。质子在电场的作用下由 N 飞向串列静电加速器的终端靶子 T。试在考虑相对论效应的情况下，求质子到达 T 时的速度 v。（已知电子的电荷量为 $q=1.60\times10^{-19}$ C，质子的静止质量为 $m_0=1.673\times10^{-27}$ kg。）

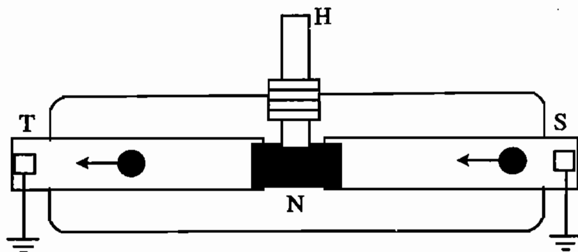


图 11.12　静电加速器的构造示意图

解　在 NS 段，负离子被加速，在 NT 段，正离子被加速。由于电子的质量远小于质子的质量，此处忽略。到达 T 的质子的能量增加为 $2qV$，其中 V 为 H 相对于地的电势。按照相对论力学，上述过程中能量的变化可表示为

$$mc^2 = m_0c^2 + 2qV$$

而 $m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$，于是可得质子的速度为 $v=4.34\times10^7$ m/s。

第 12 章　原子的结构与能级

19 世纪末的最后几年，物理学有了一系列重要的发现，伴随着这些发现，物理学进入了一个新的时代，开始了对原子的研究。奏响原子时代序曲的，是下面的一些物理学家：

伦琴，1895 年发现了一种看不见的射线，后来被命名为 **X 射线或伦琴射线**。

塞曼，1896 年发现了磁场对原子发光的影响，洛仑兹对这一现象进行了解释，这一现象后来被命名为**塞曼效应**。

贝克勒尔，1896 年发现了**铀盐的放射性**；居里夫妇，1898 年发现放射性元素钍、钋和镭。**“放射性”**这一名词最先被居里夫妇使用。

汤姆孙，1897 年发现了电子，并提出了第一个关于原子结构的物理模型。

上述种种发现，展示了物质不为人知的新特性，不仅引起了科学家，也引起了普通大众对这些现象的极大兴趣，尽管这些新现象的物理本质经过了若干年之后才得到揭示。

12.1　汤姆孙的原子模型

12.1.1　电子的发现

阴极射线很早就被发现了。1858 年德国物理学家普吕克尔在观察放电管中的放电现象时，发现正对阴极的管壁发出了绿色的荧光。1876 年，另一位德国物理学家哥尔茨坦认为这是从阴极发出的某种射线，并命名为**阴极射线**。英国科学家克鲁克斯将管内的气体抽出，并将电极分别置于管子的两端，做成了第一个真正意义上的阴极射线管。现在的阴极射线管基本上就是这样的，因此阴极射线管也称作**克鲁克斯管**。关于阴极射线的本质，当时有两种观点，许多德国科学家认为阴极射线是类似于紫外光的以太波；而英国科学家瓦尔利 1871 年观察到了阴极射线在磁场中的偏转，因此相信这是一束带电粒子流。

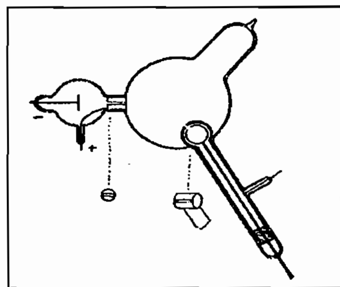


图 12.1　与静电计相连的阴极射线管

从 1896 年开始，英国剑桥大学卡文迪许实验室的汤姆孙进行了一系列阴极射线的实验。他使用的第一个实验装置如图 12.1 所示，这是对让・皮林 1895 年实验装置的改进。阴极射线从左侧的管子发出，通过一个狭缝进入中央的管子，中央的管子有磁场，于是阴极射线的路径弯曲，射进下方的圆筒，与圆筒相连的是静电计。此前，让・皮林已经发现阴极射线带有负电荷，而汤姆孙的目的是了

解电荷是否能与射线的粒子分离。实验结果表明，当射线进入圆筒时，可测量到大量的负电荷；而射线没有进入圆筒时，静电计所测量到的电荷极少。这就证明了阴极射线本身带有负电荷，电荷与射线是不可分的。接着他又进行了第二个实验，装置如图 12.2 所示。他注意到，从以前的研究难以获得满意的结果，主要是因为射线管的真空度不高。汤姆孙作了很大的努力，制成了真空度很高的阴极射线管。从阴极 C 发出的射线，通过阳极 A 上的狭缝，又经过接地的金属片 B 上的狭缝后，射向两个铝片 D,E 之间，而 D,E 是一对电极板，在管的右端，装有带标尺的荧光屏。实验发现，当 D,E 上没有加电压时，阴极射线打在标尺的零点位置；而当 D,E 上加电压时，阴极射线会向阳极一侧偏转(图 12.3)。如果在电极区域加上与纸面垂直的磁场，调节电压和磁感应强度，阴极射线粒子当受到的静电力与磁力平衡时，仍射向标尺的零点。第三个实验装置如图 12.4 所示，从左侧的管子发出的阴极射线通过阳极板上的狭缝进入钟形的罐子，罐中充有低压气体，并且安置了一块带有标尺的玻璃板，磁场的方向与纸面垂直。使用这一装置，拍摄了阴极射线在磁场中的运动轨迹。通过上述实验，最终计算出了阴极射线的荷质比。

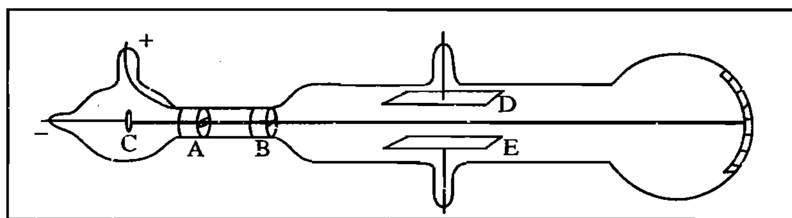


图 12.2　带有电极的阴极射线管(在没有电场时，射线不发生偏转)

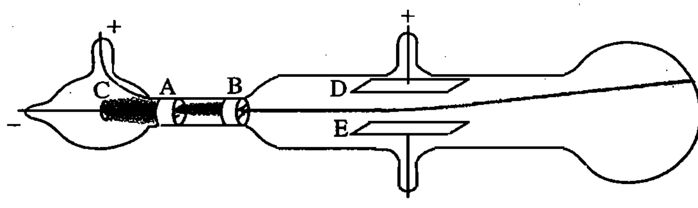


图 12.3　阴极射线在电场中偏转

汤姆孙注意到阴极射线的核质比要比氢离子的核质比大 1 000 倍以上，即$\frac{e}{m_e}>1000\,\frac{e_{H^+}}{m_{H^+}}$，因而断定阴极射线不是离子束，而是另外的带电粒子束流。

据此，汤姆孙提出了三个论断：

(1) 阴极射线是带电微粒；

(2) 这些带电微粒是原子的组成部分；

(3) 这些带电微粒是原子的唯一组成部分。

汤姆孙将上述微粒称为**电子**。

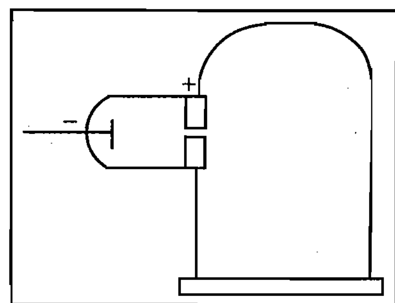


图 12.4　测量阴极射线荷质比的实验装置

电子电荷的精确测量则是在 1910 年，由密立根用**油滴实验**得到的。密立根将油雾喷入水平放置的电容器极板之间，然后跟踪单个带电油滴在空气中的降落过

程。带电油滴受到重力、静电力和黏滞力的共同作用。在不加电场时，当油滴所受的重力与黏滞力平衡时，油滴将匀速下降；若在电容器的上极板加正电压，带有负电荷的油滴就会受到向上的静电力。如果静电力与重力、黏滞力平衡，则油滴将匀速上升。密立根测量了上千个油滴的运动状态，从而计算出了油滴上的电荷值。他发现，这些电荷值总是某个最小值的整数倍。因此，这个最小值就是每一个电子所带的电荷，也应是自然界中电荷的基本单位。密立根是一位非常杰出的实验物理学家，除了电子电荷的精确测量，他还于1916年发表了**光电效应**的实验研究结果，得到了精确的**普朗克常数**的实验值。他最初得到的电子电荷的值为 4.78×10^{-10} esu（绝对静电单位）。这一数值长期被认为是最精确的数值，但在1929年被发现约有1%的误差。此误差来源于对空气黏滞性测量的偏差。

电子电荷的精确测量值为

$$e = 4.803\,242(14)\times10^{-10}\ \text{esu}$$

或者

$$e = 1.602\,189\,2(46)\times10^{-19}\ \text{C}$$

由此，可以计算出电子的质量。

由于

$$m_{\text{H}}/m_{e} = 1\,836.151\,52(70),\quad m_{\text{H}} = 1.672\,623\,1(10)\times10^{-24}\ \text{g}$$

故 $m_e = 9.109\,534(47)\times10^{-28}$ g。

12.1.2 葡萄干布丁模型

起初，汤姆孙认为原子完全是由电子所组成的。为了解释原子的质量，他假设氢原子中含有2 000多个电子。这样一来，氢原子势必带有大量的负电荷。但是，实验上却从来没有观察到如此之多的负电荷。在1906年，汤姆孙提出，原子是一个胶状球体，一个原子所含的电子数目基本上等于该原子的原子序数。由于原子是电中性的，其中也有等量的正电荷，原子中的正电荷是均匀分布的，如图12.5所示。这就是所谓的**葡萄干布丁模型**或**葡萄干蛋糕模型**，也称作“西瓜模型”。汤姆孙还进一步提出，电子分布于正电球中的平衡位置。原子发光就是这些电子振动而发出电磁波的结果。

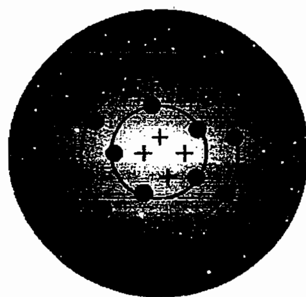


图12.5 汤姆孙的原子模型

这是第一个比较有影响的原子模型，在当时被普遍接受。甚至汤姆孙的学生卢瑟福起初也认为这一模型是正确的。

12.2 卢瑟福的原子模型

在汤姆孙提出第一个原子结构的模型之后，很多科学家开始用实验对此加以验证。但在1903年，勒纳德发现，高能阴极射线能够穿过原子，他从这一现象出发推断原子内部的空间相对来说是“空虚的”。

12.2.1 α粒子的散射实验

1909年，卢瑟福在担任曼彻斯特大学兰沃西物理学教授时，他的合作者盖革（发明了可以记录单个α粒子和从放射源发出的α粒子的数目的装置，即**盖革计数器**）和学生马斯登做了著名的**α粒子散射实验**，图12.6为实验装置及其俯视图，其中B为真空室，R为Po放射源，可以放射α粒子，S为闪烁计数器（即盖革计数器）的窗口，F为金属箔。盖革和马斯登测量了铅、金、铂、锡、银、铜、铁、铝等金属箔对入射α粒子的散射，结果发现，用α射线轰击金箔时，大多数α粒子直接穿过金箔，或者散射角很小，但是，也有少部分α粒子被反射，即散射角大于90°。当采用20层以上金箔（每层金箔对粒子的减速效果相当于0.4 mm的空气层）做实验时，发现约有1/8 000的α粒子被反射。

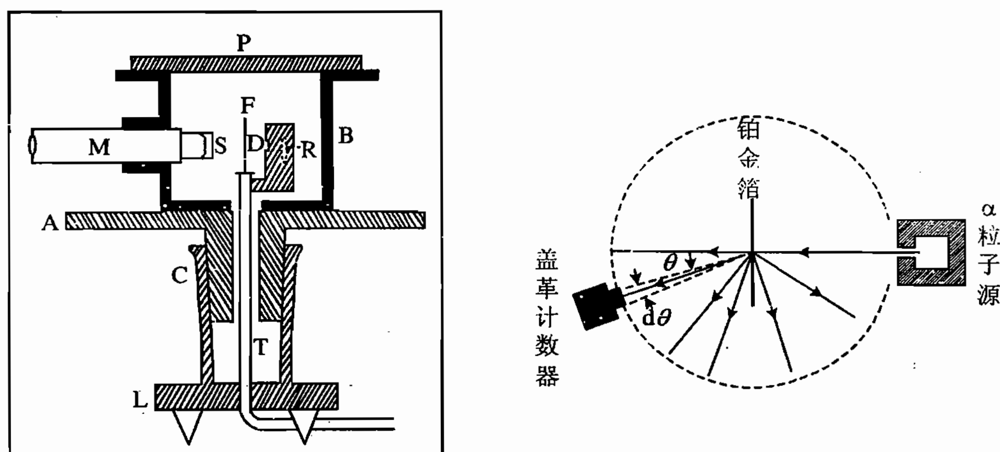


图12.6 α粒子散射实验装置及其俯视图

12.2.2 对汤姆孙模型的否定

根据α粒子散射实验的结果，卢瑟福从理论上推断，汤姆孙模型不成立。

卢瑟福已经发现α粒子是He的+2价离子，即He^{2+}，由于电子的质量比α粒子的小得多，所以在散射过程中，电子对α粒子运动状态的影响可以忽略，只考虑汤姆孙原子中均匀分布的正电荷对α粒子的影响，也就是说，可以将汤姆孙原子看作一个半径为R、正电荷均匀分布的球体。

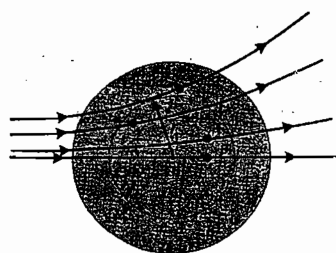


图12.7 α粒子被汤姆孙的原子模型散射

如图12.7所示，当α粒子距原子较远时，原子为电中性，α粒子不受原子的作用；靠近原子时，由于原子中电子的分布会改变，即原子被极化，α粒子开始受到排斥作用力；α粒子进入原子内部时，如果原子中的正电荷分布没有发生改变，则α粒子所受的库仑力为$F_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2r}{R^3}$，其中$Z$为原子序数，$r$为原子与α粒子间的距离。即当α粒子处于原子表面时所受到的斥力最大，为$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{R^2}$。可以近似地用α粒子所受

到的最大的斥力进行估算。

由散射所引起的 α 粒子的动量改变为

$$\Delta P = F\Delta t = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{R^2}\frac{2R}{v}$$

其中，$\Delta t = 2R/v$ 为 α 粒子穿过原子所用的最长时间。

如图 12.8 所示，当 $\Delta P \perp P$ 时，散射角最大。α 粒子的散射角为 $\theta = \Delta P/P$，即

$$\theta = \frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{R^2}\frac{2R}{v}\frac{1}{Mv} = \frac{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Z}{R}}{\frac{1}{2}Mv^2} = \frac{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Z}{R}}{E_\alpha} = 3\times10^{-5}\frac{Z}{E_\alpha} \quad (R \approx 1\ \text{Å})$$

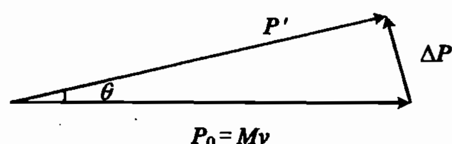


图 12.8　α 粒子在散射过程中动量的改变

其中，α 粒子的动能以兆电子伏特(MeV)为单位，取 $E_\alpha = 5$ MeV，对金(Au)，$Z = 79$，得到 $\theta < 10^{-3}$，即不可能产生大角度散射。若要产生大角度散射，则 α 粒子必须经过多次散射，即与多个原子之间发生上述过程。这样的一个多次散射的过程，每次散射的方向是随机的，应当服从统计规律。理论上，若要使 $\theta \geq \pi/2$，概率只有10^{-3500}，这是一个非常小的概率，几乎是不可能发生的，而实验上却可以非常容易地实现。

可见，汤姆孙模型是不正确的！

12.2.3　卢瑟福的原子核式结构模型

由于无法用汤姆孙的原子模型解释实验结果，1911 年，卢瑟福根据 α 粒子散射实验的结果，提出了一种新的原子模型，认为原子具有**核式结构**，正电荷集中于原子中心，仅仅占原子体积的 1/10 000，电子分布于核外。

原子的这种模型也称作**行星模型**，如图 12.9 所示。

卢瑟福模型与汤姆孙模型最本质的区别在于：正电荷集中于原子的中心形成原子核，而不是均匀分布于原子中，这样一来，α 粒子不可能进入原子核，在散射过程中，对 α 粒子而言，正电荷的数量和分布区域始终是不变的，因而 α 粒子被散射的过程比汤姆孙模型要强烈得多，正因为如此，才能出现散射角很大的情况。

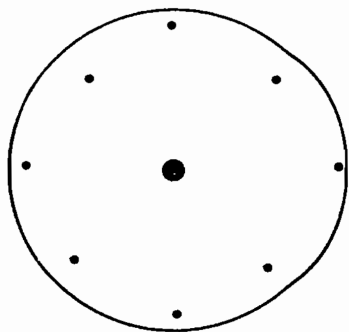


图 12.9　卢瑟福的核式原子模型

根据这样的核式结构模型，卢瑟福推导出在散射角 θ 处大小为 $\mathrm{d}\Omega$ 的一个空间立体角内，散射的粒子数 $\mathrm{d}n$ 应当服从公式

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\Omega}\sin^4\frac{\theta}{2} = \frac{Nnt}{16}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{z_1Z}{E}\right)^2 \qquad (12.1)$$

式(12.1)称作卢瑟福散射公式，其中，t 为金属箔的厚度，N 为金属箔中单位体积内的原子数，n 为入射的 α 粒子数，Z 为原子核的正电荷数，z_1 为入射粒子的电荷数。

可以看出，式(12.1)右边中的各个因子在实验中都是常数，因而

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\Omega}\sin^4\frac{\theta}{2} = C' \qquad (12.2)$$

看一下实验中的计数装置(图 12.6 和图12.10),可以发现,盖革计数器在一个以入射点为中心的圆周上转动,计数器的探测面对入射点的张角是不变的,因而式(12.2)中的 dΩ 是一个不变量,所以

$$dn' \sin^4 \frac{\theta}{2} = C \tag{12.3}$$

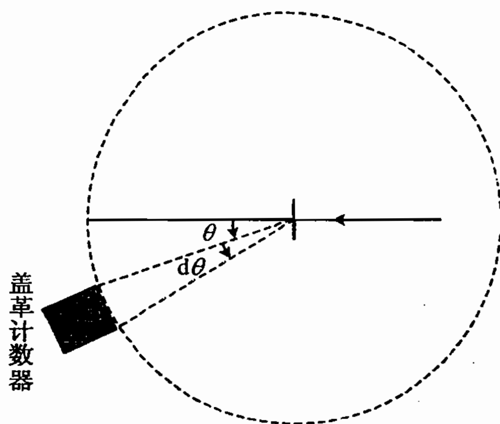


图 12.10　盖革计数器与入射粒子束的夹角以及对散射中心的张角

根据卢瑟福散射公式,可以得到 α 粒子散射过程中的四种关系:

(1) 在同一 α 粒子源和同一散射物的情况下,$dn'\sin^4 \frac{\theta}{2}$为常数;

(2) 用同一 α 粒子源和同一种材料的散射物,并在同一散射角下,dn' 与散射物的厚度 t 成正比;

(3) 用同一 α 粒子源,在同一散射角下,对同一 Nt 值,dn'与Z^2 成正比;

(4) 用同一种散射物,在同一散射角下,$dn'v^4$ 为常数。

由于当时还不能直接测量到原子核所携带的电荷,故用散射与原子质量的关系说明散射与原子核的电荷之间的关系。至于其他三种关系,在这个实验中都得到了较好的验证。

1920 年,查德威克改进了实验装置,用式(12.1)通过实验测得了几种原子的核电荷数 Z,发现原子所带的正电荷数与该元素的原子序数一致,结果如表 12.1 所示。

表 12.1　查德威克的实验结果

原子	铜	银	铂
原子序数	29	47	78
实验测得的原子正电荷数	29.3	46.3	77.4

12.2.4　原子核大小的估算

如果 α 粒子可以到达的与核的最小距离为 $r_{\min}$,则由能量守恒及角动量守恒,可得到

$$\begin{cases} \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}} \\ Mv_0 b = Mv' r_{\min} \end{cases}$$

从第二式中解出 v'的表达式并代入第一式,有

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 \frac{b^2}{r_{\min}^2} + \frac{z_1 Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}}$$

而

$$b = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z_1 Z}{Mv_0^2} \cot \frac{\theta}{2}$$

于是得到关于 $r_{\min}$的方程

$$r_{\min}^2 - \frac{2z_1Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 Mv_0^2}r_{\min} - \left(\frac{z_1Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 Mv_0^2}\right)^2 \cot^2\frac{\theta}{2} = 0$$

利用配方法，得到

$$r_{\min}^2 - \frac{2z_1Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 Mv_0^2}r_{\min} + \left(\frac{z_1Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 Mv_0^2}\right)^2 = \left(\frac{z_1Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 Mv_0^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^2(\theta/2)}$$

于是

$$r_{\min} = \frac{z_1Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 Mv_0^2}\left[1 \pm \frac{1}{\sin(\theta/2)}\right] = \frac{1}{2}\frac{z_1Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 E}\left[1 \pm \frac{1}{\sin(\theta/2)}\right] = \frac{a}{2}\left[1 \pm \frac{1}{\sin(\theta/2)}\right]$$

取正值，可得

$$r_{\min} = \frac{1}{2}\frac{z_1Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{E}\left[1 + \frac{1}{\sin(\theta/2)}\right] \tag{12.4}$$

通过实验测量最大的散射角 θ，即可根据式(12.4)计算得到 α 粒子到核的最近距离 $r_{\min}$，而 $r_{\min}$ 可以认为是原子核的最大半径。实验结果表明，如果用^{210}Po 作 α 粒子源，入射 α 粒子的动能为 $E = 5.3$ MeV，测得铜原子核 $r_{\min} < 1.58 \times 10^{-14}$ m；用^{214}Po 作 α 粒子源，入射 α 粒子的动能为 $E = 7.68$ MeV，测得铜原子核 $r_{\min} < 1.1 \times 10^{-14}$ m。现在普遍认为

$$r_{\min} \approx 10^{-14}\ \text{m} = 10\ \text{fm}$$

12.2.5 卢瑟福散射公式的意义

(1) 提供了一种分析物质结构的方法。高能粒子，例如从放射源发出的 α 粒子、β 粒子等，其能量足以使原子中的电子脱离核的束缚。不仅如此，当粒子的能量更高，例如从高能粒子加速器射出的质子，其能量甚至可以使原子核破裂，所以，用高能粒子轰击原子成了一种分析物质微观结构的重要方法。

(2) 提供了一种材料分析的手段。在卢瑟福公式中含有原子的核电荷数 Z，所以，通过散射实验，可以测得原子的核电荷数，也就是元素的原子序数，这即是一种材料分析的手段。

12.3 氢原子的光谱

12.3.1 光谱

牛顿第一个从实验上发现了太阳的白光中含有各种不同的成分，1666 年，他让通过小孔的一束太阳光射到一个三棱镜上，结果从三棱镜的另一个侧面射出的光就成了彩色的光带——不同颜色的光在空间分散开来(图 12.11)，这就是太阳的**光谱**。



图 12.11 太阳光经过三棱镜后的色散

光源所发出的光往往含有各种波长成分，如果用光谱仪器测量并记录光源中各个波长成分的强度，就可以得到光源的光谱。光谱仪器都是色散仪器，其中的色散元件可以是棱镜

(图12.12),也可以是光栅(图 12.13)。光经过棱镜或光栅后,不同的波长成分以不同的角度出射,这就是色散。如果用照相装置记录,则可得到一张光谱照片,不同波长的光被记录在照片上不同的位置;如果用能够探测光强的记录装置,则可得到光强按频率或波长的分布图,这就是常见的光谱图。光谱可以用函数表示为光强随波长或频率的分布,即 $I=I(\lambda)$,或者 $I=I(\nu)$,$I=I(k)$。

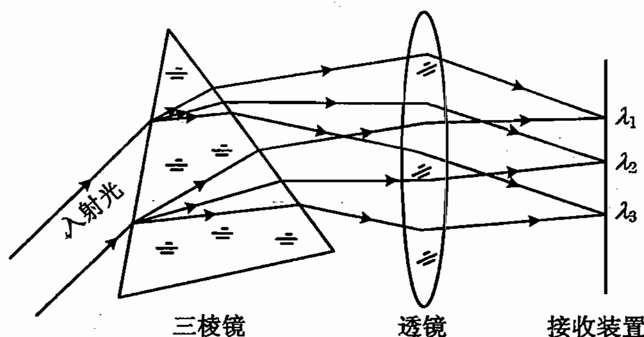


图 12.12　棱镜光谱仪

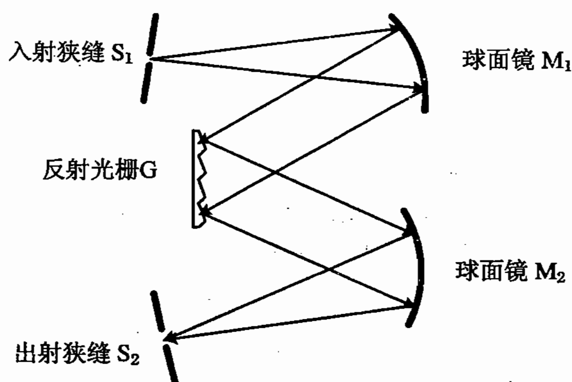


图 12.13　光栅光谱仪

自牛顿之后,很多人对物质的发光情况进行了研究。1814 年,德国物理学家夫琅禾费利用自己制作的精密光学仪器,对太阳的光谱作了认真的研究,发现了太阳光谱中有许多条暗线,并测出了它们的波长。在 12 年之前,英国化学家沃拉斯顿已经观察到了这种暗线,但当时仅发现了 7 条。夫琅禾费将观测到的 576 条暗线编制成表,并用字母 A,B,C,D,…将其命名,后来这些暗线称作**夫琅禾费线**,到现在已被发现了 1 万多条。1859 年,基尔霍夫对光谱进行了深入的研究,他发现了物体吸收和发射本领之间的联系,他和本生研究了各种火焰和火花的光谱,注意到每种元素都有其独特的光谱,他们发明了**光谱分析法**,并用这种方法发现了新元素铯和铷。1852 年,瑞典物理学家埃格斯特朗发表了一篇论文,列出了一系列物质的特征光谱,现在常用的波长单位埃($1\ \text{Å}=10^{-10}\ \text{m}$)就是以埃格斯特朗的名字而命名的。1861 年,英国化学家克鲁克斯用光谱分析法发现了铊;1863 年德国化学家赖希和李希特也是用光谱分析法发现了新元素铟,以后又发现了镓、钪、锗等。从那以后,光谱分析成了一种重要的研究手段。

下面给出光谱的分类(图 12.14~12.16)。

根据物质的发光机制，可以将光谱分为热辐射谱、荧光(发光)光谱等。

根据实验方法，可以将光谱分为发射光谱、吸收光谱、激发光谱等。

根据光谱的分布特征，可以将光谱分为线状光谱、带状光谱、连续光谱。



图 12.14　太阳的连续热辐射光谱



图 12.15　氢原子的线状发射光谱



图 12.16　氢原子的吸收光谱

12.3.2　氢原子的光谱

1. 由氢原子激发而发出的线状光谱

在 19 世纪，已经发现氢原子有 14 条光谱，其中在可见区的 4 条(表 12.2)是在氢气放电管中测量得到的，另外 10 条在紫外区的谱线则是通过观测恒星光谱而得到的。

表 12.2　氢原子的几条光谱线

名称	H_α	H_β	H_γ	H_δ
波长(Å)	6 562.10	4 860.74	4 340.10	4 101.20
颜色	红	深绿	青	紫

2. 氢的巴尔末线系

1885 年，瑞士一所高中的教师巴尔末发现，对于上述 14 条氢的光谱线，可以用一个简单的公式表示其波长，即

$$\lambda = B\frac{n^2}{n^2-4} \quad (n = 3,4,5,\cdots) \tag{12.5}$$

其中，$B = 3\,645.6$ Å，这就是著名的**巴尔末公式**。

可以用巴尔末公式表示的上述光谱称作**巴尔末光谱线系**。式(12.5)中，如果 $n\to\infty$，则 $\lambda_\infty = B = 3\,645.6$ Å，称作**线系限波长**。

1889 年，瑞典物理学家里德伯将巴尔末公式改写为如下形式：

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{B}\frac{n^2-2^2}{n^2} = \frac{4}{B}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

将波长的倒数 $1/\lambda$ 写作 $\tilde{\nu}$，$\tilde{\nu}$ 就是波数，波数的国际标准单位是 m^{-1}，习惯上常用 cm^{-1} 作波数

的单位。

记 $4/B=R_{\mathrm{H}}$，则得到了一个新的表达式

$$\tilde{\nu}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right) \quad (n=3,4,5,\cdots) \tag{12.6}$$

上式就是**里德伯方程**，其中，$R_{\mathrm{H}}=1.0967758\times10^{7}\ \mathrm{m}^{-1}$，称作**里德伯常数**。

用里德伯方程表示的巴尔末线系的谱线如表 12.3 所示。

表 12.3 巴尔末系

n	3	4	5	6	7	8	9	∞	
名称	H_α	H_β	H_γ	H_δ	H_ε	H_ζ	H_η		
λ(nm)	656.3	486.1	434.1	410.2	397.0	388.9	383.5	364.6	

除了巴尔末线系之外，后来又陆续从实验中发现了氢原子的其他光谱线系，这些光谱线系用也可以用里德伯方程表示。里德伯方程的一般形式可写为

$$\tilde{\nu}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right) \quad (m=1,2,3,\cdots;n=m+1,m+2,m+3,\cdots) \tag{12.7}$$

3. 氢原子的其他光谱线系

1906 年，美国物理学家莱曼发现了以其名字命名的**莱曼系**（表 12.4）。

$$\tilde{\nu}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right) \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

表 12.4 氢原子的莱曼系

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	∞
λ(nm)	121.6	102.5	97.2	94.9	93.7	93.0	92.6	92.3	92.1	91.9	91.15

1908 年，德国物理学家帕邢发现了**帕邢系**（表 12.5）。

$$\tilde{\nu}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right) \quad (n=4,5,6,\cdots)$$

表 12.5 氢原子的帕邢系

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	∞
λ(nm)	1 874.5	1 281.4	1 093.5	1 004.6	954.3	922.6	901.2	886.0	874.8	866.2	820.1

1922 年，美国物理学家布喇开发现了**布喇开系**（表 12.6）。

$$\tilde{\nu}=R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{n^2}\right) \quad (n=5,6,7,\cdots)$$

表 12.6 氢原子的布喇开系

n	5	6	7	8	9	∞
λ(nm)	4 052.5	2 625.9	2 166.1	1 945.1	1 818.1	1 458.0

1924 年，美国物理学家普丰德发现了**普丰德系**（表 12.7）。

$$\widetilde{\nu} = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 6,7,8,\cdots)$$

表 12.7　氢原子的普丰德系

n	6	7	8	9	10	∞
λ(nm)	7 476	4 664	3 749	3 304	3 046	2 279

1953 年,美国物理学家汉弗莱发现了**汉弗莱系**(表 12.8)。

$$\widetilde{\nu} = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 7,8,9,\cdots)$$

表 12.8　氢原子的汉弗莱系

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	∞
λ(nm)	12 368	7 503	5 905	5 129	4 673	4 374	4 171	4 021	3 908	3 819	3 749	3 281

可见,在里德伯方程中,对于每一个 m,n 可以取 $m+1$,$m+2$,…,这样就可以构成一个光谱线系。上述方法称为“**组合法则**”,即每一条光谱线的波数可以表示为两个与整数有关的函数项的差,即

$$\widetilde{\nu} = T(m) - T(n) \tag{12.8}$$

其中,$T(m) = R_{\mathrm{H}}/m^2$,$T(n) = R_{\mathrm{H}}/n^2$,$T(m)$,$T(n)$称为**光谱项**。

起初,人们认为巴尔末公式和里德伯方程只是对氢原子光谱规律的经验总结,似乎就是一些数字的组合。但也有人从此受到了启发,相信如此简单的物理规律之后必定隐藏着简单而深刻的物理本质。

12.4　玻尔的氢原子模型

12.4.1　经典理论解释氢原子光谱的困难

在 19 世纪末 20 世纪初,人们已经知道,当带电粒子的运动状态发生改变时,即速度的大小或方向改变时,会向外辐射电磁波。根据卢瑟福的原子模型,核外电子在核的库仑场中运动,受向心力作用,因而做周期性的圆轨道或椭圆轨道运动。

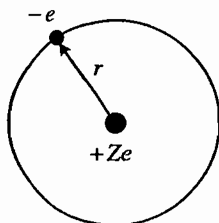


图 12.17　做圆轨道运动的核外电子

如图 12.17 所示,设电子绕原子核做圆轨道运动,轨道半径为 r,则电子的动力学方程为

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

其中,Z 为核电荷数。由上式得到电子的动能为

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电子轨道运动的频率为

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{Z}{4\pi\varepsilon_0 m_e r^3}} \tag{12.9}$$

原子的能量包括电子的动能 E_k 和电子与核之间的库仑势能 E_p，其总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{12.10}$$

按经典电磁学理论，带电粒子做加速运动，将向外辐射电磁波，其电磁辐射频率等于带电粒子的运动频率。

由于轨道半径 r 的取值并不受限制，故光谱应当为连续谱，原子的能量也可以是连续值。

由于向外辐射能量，原子的能量将不断减少，电子的轨道半径将不断缩小，最终将会落到核上，即所有原子将“崩塌”。但这与实验的事实是矛盾的，包括氢原子在内，大量原子的光谱都是分立的。

因此，无法用经典的理论解释核外原子的运动以及原子光谱的规律。

12.4.2 玻尔的氢原子模型

为了克服经典理论在解释原子光谱中所遇到困难，玻尔于 1913 年提出了一套全新理论。

在玻尔的论文中，他根据氢原子的光谱规律和量子思想，提出了三个基本假设。

1. 定态条件

原子中的电子只能处于一系列分立的圆轨道上，绕核转动；电子在固定的轨道上运动时，不辐射电磁波。

这些分立的轨道，称作**定态轨道**，其半径可以记为 r_n，则由式(12.10)，这时原子的能量为

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} \tag{12.11}$$

由于轨道是分立的，故原子的能量也是分立的，即是量子化的。这些量子化的能量称作**能级**。

由于电子在定态轨道上运动时不辐射电磁波，所以原子的能量是不变的，即电子不会因为辐射电磁波而落入核内。

2. 频率条件

电子可以在不同的定态轨道之间**跃迁**，原子的能量也发生相应的改变，即原子可以在不同的能级之间跃迁。当原子的能量改变时，就以电磁波的形式辐射或吸收能量。

根据已有的爱因斯坦光量子的能量表达式 $E = h\nu$，其中 ν 为电磁辐射的频率，原子从定态 E_{n_1} 跃迁到另一个定态 E_{n_2} 时，如图 12.18 所示，与电磁辐射频率之间的关系为

$$h\nu = E_{n_1} - E_{n_2} \tag{12.12}$$

将式(12.11)代入式(12.12)，得到

$$h\nu = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{n_2}} - \frac{1}{r_{n_1}}\right) \tag{12.13}$$

将电磁辐射的能量与里德伯方程 $\tilde{\nu} = R_H\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = T(n_2) - T(n_1)$联系起来，则有

$$h\nu = h\frac{c}{\lambda} = hc\tilde{\nu} = hcR_H\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

于是有

$$E_n = -\frac{hcR_{\mathrm{H}}}{n^2} = -hcT(n) \tag{12.14}$$

$$r_n = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 hcR_{\mathrm{H}}}n^2 \tag{12.15}$$

式(12.14)是原子的定态能级，而式(12.15)是原子中电子定态轨道的半径。有了玻尔的原子模型，里德伯方程的物理意义就变得十分明显，原子中的电子从定态 n_1（原子的能量为 E_{n_1}）向定态 n_2（原子的能量为 E_{n_2}）跃迁时，发出的波数为 $\tilde{\nu}$（能量为 $h\nu$）的电磁辐射（即爱因斯坦光量子，或叫光子），如图 12.19 所示。

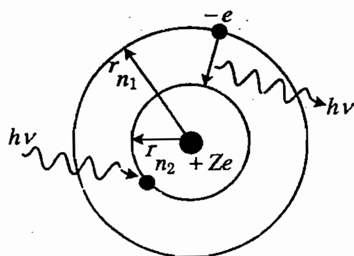


图 12.18　电子跃迁发射或吸收电磁波

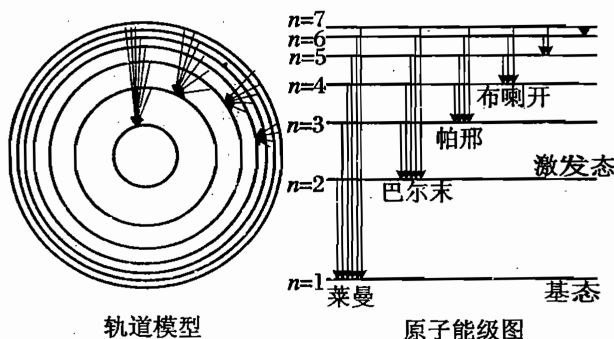


图 12.19　辐射跃迁的轨道模型和能级图

有了前面两个假设，玻尔已经能够解释氢原子的光谱规律，但是，从基本理论的完整性看，这样做还不够，因为，在定态能级表达式(12.14)和定态轨道表达式(12.15)中，所用到的里德伯常数 R_{H} 还是实验值，这一数值无法从上述两个基本假设中获得，说明该理论尚不完备，还需要其他条件。

3. 角动量量子化条件

电子轨道运动的角动量是量子化的，只能取一些特定的数值（如图 12.20）即

$$P_\phi = mvr_n = n\frac{h}{2\pi} = nh\hbar \quad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{12.16}$$

图 12.20　电子的轨道运动角动量

可以由此导出里德伯常数。

由式(12.16)，可得到

$$m_e v^2 r_n^2 = \frac{(n\hbar)^2}{m_e} \tag{12.17}$$

而由圆轨道的动力学方程 $\dfrac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \dfrac{m_e v^2}{r_n}$，可得到

$$m_e v^2 r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{12.18}$$

式(12.17)与(12.18)相除，得到

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0(n\hbar)^2}{m_c Ze^2} \tag{12.19}$$

与式(12.15)对比，可得里德伯常数为

$$R = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^3 c} \tag{12.20}$$

式中的常数都是基本的物理学常数，从而可以算得

$$R = 1.097\,373\,1 \times 10^7\ \mathrm{m^{-1}} \tag{12.21}$$

而当时的实验测量值为

$$R_H = 1.096\,775\,8 \times 10^7\ \mathrm{m^{-1}}$$

两者符合得出人意料的好！

将 R 的表达式代入式(12.14)，则原子的定态能量为

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^2} \frac{Z^2}{n^2} \tag{12.22}$$

至此，定态轨道半径、定态能量都与量子数 n 联系起来了。

引入

$$a_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 h^2}{4\pi^2 m_e e^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 (n\hbar)^2}{m_e e^2} \tag{12.23}$$

则

$$r_n = a_1 \frac{n^2}{Z} \tag{12.24}$$

其中，$a_1 = 0.529\,166 \times 10^{-10}$ m≈0.53 Å 是氢原子中最小的电子轨道半径，称作**第一玻尔半径**。

在核电荷数为 Z 的情况下，里德伯方程为

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)Z^2 \tag{12.25}$$

4. 原子物理中的数值计算与常用的组合常数

在原子物理中，很多物理量如果用国际标准单位制表示，其数值是非常小的。例如，氢原子中电子轨道的第一玻尔半径为 0.53×10^{-10} m，氢原子的电离能为 2.18×10^{-18} J，等等。所以，基于使用和记忆方便的考虑，人们更喜欢用较小的单位来描述这些物理量。例如，用纳米(nm)或埃(Å)表示波长，用电子伏特(eV)表示能量，用波数($\mathrm{cm^{-1}}$)表示光谱项或能级，等等。

另一方面，原子物理中的公式往往比较复杂，式中含有大量的基本物理学常数。例如

$$h = 6.626\,20 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}, \quad \varepsilon_0 = 8.854\,2 \times 10^{-12}\ \mathrm{A \cdot s/(V \cdot m)}$$

$$e = 1.602\,192 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}, \quad m_e = 9.109\,534 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} = 0.511\,00\ \mathrm{MeV}/c^2, \quad \cdots$$

而原子物理中的表达式都是这些基本物理学常数的组合，往往都很复杂，如果读者能记住一些**组合常数**的值，则会给计算带来很大的方便。常用的组合常数的数值如下：

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 1.44\ \mathrm{fm \cdot MeV} = 2.307 \times 10^{-28}\ \mathrm{J \cdot m}$$

$$m_e c^2 = 0.511\ \mathrm{MeV} = 8.199 \times 10^{-14}\ \mathrm{J}$$

$$hc = 12.4\ \mathrm{Å \cdot keV}$$

$$\hbar c = 197\ \mathrm{fm \cdot MeV} = 3.164 \times 10^{-26}\ \mathrm{J \cdot m}$$

熟练应用这些组合常数，可以带来很大的方便。例如，光子的能量为

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12.4\ \mathrm{Å \cdot keV}}{\lambda}$$

该式说明波长为 1 Å 的光子，其能量为 12.4 keV；或能量为 1 eV 的光子，其波长为 12.4 kÅ。

因此,利用该组合常数可以方便地在波长与能量间变换。对于 5 000 Å 的可见光,其光子能量为 12.4 keV/5 000 = 2.48 eV。

如果用波数表示,则 $h\nu = hc/\lambda = (12.4\ \text{Å}\cdot\text{keV})\tilde{\nu} = (1.24\times10^{-4}\ \text{eV}\cdot\text{cm})\tilde{\nu}$,即 10 000 波数($\text{cm}^{-1}$)的光波的能量为 1.24 eV。

前面得到的常数如果用组合常数表达,则为

$$a_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^{-1}\frac{(\hbar c)^2}{m_e c^2} = 0.529\,166\times10^{-10}\ \text{m} = 0.53\ \text{Å}$$

$$R = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^3 c} = \frac{1}{4\pi}\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{m_e c^2}{(h/2\pi)^3 c^3} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{m_e c^2}{(\hbar c)^3}$$

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^2}\frac{Z^2}{n^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{m_e c^2}{(\hbar c)^2}\frac{Z^2}{n^2} = -13.6\left(\frac{Z}{n}\right)^2\ \text{eV}$$

5. 原子能级的表示与标记

经过长期的测量,人们积累了大量的关于原子的实验数据,几乎所有原子的能级都可以在文献或物理手册中查到。由于原子的能量中含有势能,所以,能量的零点可以有不同的取法,从而导致在不同的文献中,同一个能级有不同的能量数值。

能量的零点通常有两种取法。一种是设中性原子的能级为负值,其最高能量为 0。由于电子受到核的束缚,所以只有当电子脱离原子时,其能量才可能为正值,即规定 1 价正离子的最低能级为 0.另一种是取原子的最低能量,即所谓的"基态"能量为零点,其他能级均大于 0,1 价正离子的基态能量为中性原子的最高能量。其实,无论零点如何选取,各能级的间隔总是一致的。

手册中原子能级的单位往往选取波数,而不是电子伏特。例如,表 12.9 中用两种不同方法表示氢原子的能级。

表 12.9　两种原子能级的标记方法

能级序号 n	能级(cm^{-1}) (电离态为零点)	能级(cm^{-1}) (基态为零点)
1	−109 678	0.000
2	−27 419	82 259
3	−12 186	97 492
4	−6 854	102 824
∞	0.000	109 678

第二种表示方法直接给出各能级与基态能级之差,方便且直观。第一种表示方法的好处是能级与光谱项直接对应。由于 $T(n) = -E_n/(hc)$,故用波数表示的能级的绝对值就是光谱项。

实际上,两种表示方法的数值变换起来非常方便,只要将第一种方法中所有的数值都加上电离能,就成为第二种方法中的数值。

12.4.3　氢的里德伯常数实验值与理论值的偏差

尽管由玻尔模型导出了里德伯常数的表达式,而且理论值与实验值符合得很好,但两者仍

有超过万分之五的偏差。当时，光谱学的实验精度已经达到了万分之一，因而，这一结果还是受到了人们的质疑。英国光谱学家福勒最先向玻尔提出了这个问题。理论应当是尽量追求完美的，因而在1914年玻尔对此作了回答：原来的推导是在假设原子核静止不动的前提下得到的，但实际上，尽管氢原子核的质量比电子的大得多，但核并非静止的，所以核与电子应当绕它们的质心旋转（图12.21），在这样的两体系统中，应当采用**质心坐标系**来处理。在有心力场的两体问题中，只需要用**约化质量**代替电子的质量，则上述结论就对应于质心系了。

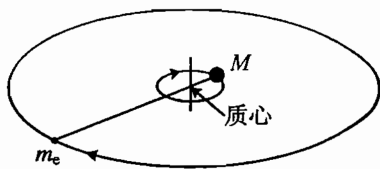


图 12.21 电子与核绕质心转动

核与电子在质心系中的折合质量为

$$\mu = \frac{Mm_e}{M + m_e}$$

其中，M 为核质量，m_e 为电子质量。因此里德伯常数为

$$R_A = \frac{2\pi^2\mu e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^3 c} = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^3 c}\frac{M}{M + m_e} = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^3 c}\frac{1}{1 + m_e/M} \tag{12.26}$$

如果 $M \gg m_e$，则

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 h^3 c} = 1.097\,373\,1 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1} \tag{12.27}$$

就是核静止时的里德伯常数。而实际原子的里德伯常数为

$$R_A = R_\infty \frac{1}{1 + m_e/M} \tag{12.28}$$

对于氢原子，$m_e/M = 1/1\,836.15$，所以可以算得

$$R_H = 10\,973\,731 \times \frac{1}{1 + 1/1\,836.15} = 1.096\,775\,8 \times 10^7 \quad (\mathrm{m}^{-1})$$

与实验值完全吻合。

12.5 类氢离子的光谱

12.5.1 类氢离子与皮克林线系

1. 类氢离子

只有一个核外电子的离子的结构与氢原子类似，因而称作**类氢离子**。类氢离子的核电荷数 $Z>1$。例如，一次电离的 He 离子 He^+，$Z=2$，称作 HeⅡ；二次电离的 Li 离子 Li^{2+}，$Z=3$，称作 LiⅢ；三次电离的 Be 离子 Be^{3+}，$Z=3$，记作 BeⅣ；等等。氢原子则记作 HⅠ，$Z=1$。

利用高能粒子加速器，也可以产生如 O^{7+}，Cl^{16+}，Ar^{17+} 等核电荷数 Z 很大的类氢离子。这些离子的结构与氢原子极其相似，只有核电荷数有差别，因而它们的能级和光谱也有相似之处。

2. 皮克林线系

1896～1897年，美国天文学家皮克林在船舻座ζ星的光谱中发现了一个很像巴尔末系的

光谱线系，如图 12.22 所示。与巴尔末系比较，发现有两点不同，一是似乎出现了“**半整数**”的谱线；二是光谱线的位置都有**蓝移**，即相应的光谱线的波长都稍短一些。这些谱线系称作**皮克林线系**。

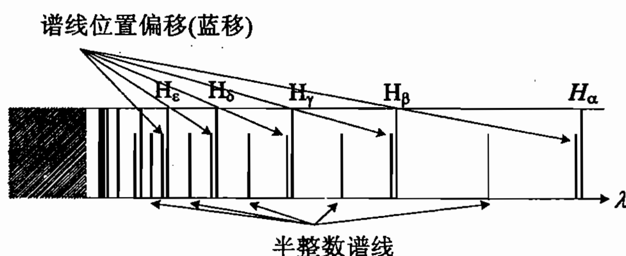


图 12.22　皮克林线系与巴尔末线系的比较

这种谱线起初被认为属于氢谱线，甚至里德伯也认为地球上的氢与恒星中的氢有所不同。但玻尔指出，这些光谱应当是 He^+ 发出的。当时，英国杰出的光谱学家福勒用充有氢氦混合气体的放电管做了实验，观察到了皮克林谱线，结果证实了玻尔的判断。

3. 对皮克林线系解释

按照玻尔模型，核电荷数为 Z 的类氢离子的能级为

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2}Z^2$$

则这样的离子在定态 n_1 和 n_2 之间跃迁时，所发出的光谱线的波数为

$$\tilde{\nu} = E_{n_1} - E_{n_2} = Z^2 R_{\mathrm{A}}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = R_{\mathrm{A}}\left[\frac{1}{(n_2/Z)^2} - \frac{1}{(n_1/Z)^2}\right]$$

对于 HeⅡ，$Z=2$，因而可以取 $n_2=4$，则

$$\tilde{\nu}_{\mathrm{He}^+} = R_{\mathrm{He}}\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n_1/2)^2}\right]$$

当 $n_1=5,6,7,\cdots$ 时，

$$\frac{n_1}{2} = 2.5, 3, 3.5, \cdots$$

这就是半整数谱线的来源。

同样，对于 LiⅢ，BeⅣ，类似也有

$$\tilde{\nu}_{\mathrm{Li}^{2+}} = 3^2 R_{\mathrm{Li}}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = R_{\mathrm{Li}}\left[\frac{1}{(n_2/3)^2} - \frac{1}{(n_1/3)^2}\right]$$

$$\tilde{\nu}_{\mathrm{Be}^{3+}} = 4^2 R_{\mathrm{Be}}\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = R_{\mathrm{Be}}\left[\frac{1}{(n_2/4)^2} - \frac{1}{(n_1/4)^2}\right]$$

对于不同的原子，里德伯常数也不相同，即

$$R_{\mathrm{A}} = R_\infty \frac{1}{1 + m_e/M}$$

由于 He 核的质量比 H 核的要大，所以与巴尔末线系比较，里德伯常数增大，这就是光谱线蓝移的原因。

玻尔模型对皮克林线系的成功解释，使得更多的人接受了玻尔的理论。爱因斯坦听到这一消息时，也称玻尔理论是一个“伟大的发现”。

12.5.2 氘的发现

美国物理化学家尤雷发现氢的同位素氘的事实,又一次验证明了玻尔理论。

尤雷获得博士学位后先是在伯克利大学工作,然后到丹麦哥本哈根的尼尔斯·玻尔研究所工作过一段时间,深受玻尔理论的影响。回到美国后,他先后在约翰·霍普金斯大学和哥伦比亚大学任教。从1931年开始,为了证明氢的同位素的存在,他反复地用蒸馏法将4 L液态氢在低温(14 K)、低压(53 mmHg)下蒸发,将最后得到的1 mL液态氢装进放电管以测量光谱。由于这样得到的样品中所含的氢的同位素的比例大大增加,他可以测量到足够强的氢的同位素光谱。1932年,他在光谱中发现了两条十分靠近的 H_α 线,这两条线的波长为6 562.79 Å,6 561.00 Å,$\Delta\lambda=1.79$ Å。尤雷认为这是氢及其同位素发出的两条谱线。假定该同位素的质量比氢的大1倍,其质量记为 M_D,则 $M_H/M_D=1/2$。

按照玻尔理论,H_α 线的波数为

$$\tilde{\nu}=R_A\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)$$

这两种原子的里德伯常数不同,因而光谱线的波长之比为

$$\frac{\lambda_H}{\lambda_D}=\frac{\tilde{\nu}_D}{\tilde{\nu}_H}=\frac{R_D}{R_H}=\frac{1+m_e/M_H}{1+m_e/M_D}=\frac{1+1/1\,836}{1+1/(2\times 1\,836)}=1.000\,273$$

而尤雷实验中测量的结果为

$$\frac{6\,562.79}{6\,561.00}=1.000\,273$$

玻尔理论的分析与实验的结果一致,因而十分准确地证实了同位素的存在。这就是氘(D)发现的过程。

12.6 夫兰克-赫兹实验

1914年,即在玻尔理论发表之后的第二年,德国物理学家夫兰克和赫兹就采用加速电子轰击原子的实验,证明了原子的能量是分立的,这是除了光谱学方法之外,可以用来证明原子中分立能级存在的另一种方法。

12.6.1 基本思想

在如图12.23所示的电子射线管中,加速电子与管中气态的原子碰撞,会使原子激发,电子则损失动能,于是到达阳极的电子数将会减少,即管中的电流减少。通过测量电子束流的变化就可以计算电子所损失的能量,这些能量就是被原子所吸收的能量。

12.6.2 夫兰克-赫兹实验的装置与结果

实验装置如图12.24所示,在密封容器中充入气态物质汞,K为热阴极,通过电流加热可以释放出电子;G为栅极;K,G之间有电压,使得从热阴极逸出的电子在K,G之间被加速;A为阳极,即接收极;G,A之间加以较低的反向电压(−0.5 V),目的是抵消电子从热阴极逸出时所

具有的热运动能量。则可以看出，在 K,G 之间中，电子被加速，同时还与容器中的原子发生碰撞；在 G,A 之间，与原子碰撞的电子损失了部分能量后，只有剩余动能足够大的电子才能够克服反向电压，到达 A 极。接在电路中的电流计和伏特计可以测量接收极电流与加速电压间的关系。

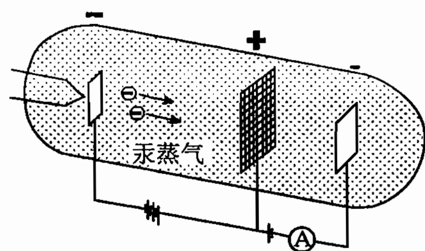


图 12.23 夫兰克-赫兹实验的基本构想

实验中，最初研究的是加速电子与汞原子的碰撞。结果表明，在 K,G 之间的电压逐渐增大的过程中，A 极所接收到的电子束流随着电压不断变化，如图 12.25 所示。起初，电流随着加速电压的增加而增加；但是，当加速电压为 4.9 V 时，电流突然下降；随后，电流又随着电压增大，到 9.0 V 时，又突然下降；随后，在 13.9 V 时，又出现上述过程。即当电子的加速电压是 4.9 V 的整倍数时，都会出现电流突然下降的现象。

为什么会出现这种现象呢？

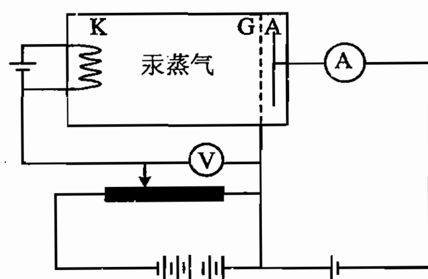


图 12.24 夫兰克-赫兹实验的装置

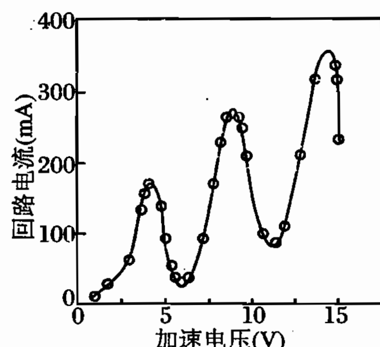


图 12.25 夫兰克-赫兹实验的结果

电流突然下降，表明能够到达 A 极的电子数突然减少了，从而说明这时电子损失了大量的动能，不能到达 A 极。由于电子动能的损失只能是与汞原子碰撞造成的，即处于能量最低的**基态**汞原子吸收了电子的动能，汞原子吸收能量后，自身的能量增加，变为**激发态**。加速电压为 4.9 V，即电子的动能达到 4.9 eV，则说明汞原子只能吸收 4.9 eV 整倍数的能量，也就是说汞原子激发态与基态的能量差不能是任意的数值，而只能是 4.9 eV。这就证明了在汞原子内部，其能量是分立的、量子化的。在电压为 4.9 V 时，一个电子经过一次碰撞就损失了全部动能，因而电流迅速下降；电压为 2 倍的 4.9 V 时，一个电子与两个原子连续碰撞也损失了全部动能。夫兰克-赫兹实验证明了玻尔理论中原子只能处于一系列分立的定态假设。

汞原子由于吸收电子的动能而从基态跃迁到最低的激发态，即**第一激发态**。

4.9 V 为汞原子的**第一激发电势**。

12.6.3 改进的夫兰克-赫兹实验装置

1920 年，夫兰克对实验装置作了如下改进(图 12.26)：

(1) K 极边上加旁热式极板，这样可以使热电子均匀发射；

(2) 在靠近阴极处增加栅极 G_1，并使汞蒸气更稀薄，这样可以使得 K,G_1 间的距离小于汞

蒸气中电子的平均自由程，即在 K，G_1之间，电子没有经过与原子的碰撞就可以被加速到很高的能量，K，G_1之间是电子的加速区；

(3) 使栅极 G_1，G_2等电位，电子在 G_1，G_2之间不加速，只与原子碰撞，这是碰撞区。

改进后的装置可以使电子获得较高的动能，从而可以将汞原子激发到更高的能级，同时实验的精度也得到了提高。

图 12.27 中，除了 4.9 V，电流在 4.68 V，5.29 V，5.78 V，6.73 V 等位置也出现了明显的变化，说明这些都是汞原子的能级。经过光谱学实验的研究，除了有一条与 4.9 V 对应的光谱线 253.7 nm 之外，还发现有一条与 6.73 V 对应的光谱线，波长为 184.9 nm，而其他位置并没有光辐射，说明在这些能级，汞原子比较稳定，很难通过自发跃迁而产生辐射，这些能级就是汞原子的**亚稳态**能级。

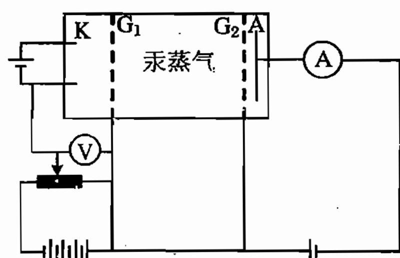


图 12.26　改进后的夫兰克-赫兹实验装置

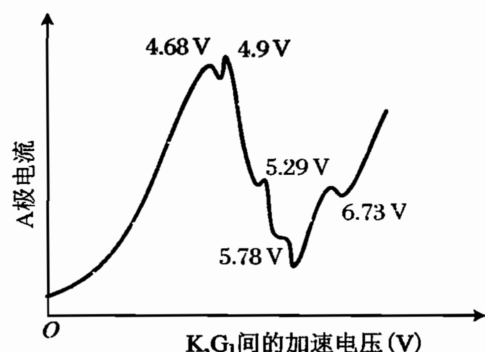


图 12.27　改进装置后的夫兰克-赫兹实验结果

用夫兰克-赫兹实验装置也测量到了其他原子的第一激发电势，钠原子的为 2.12 eV，钾原子的为1.63 eV，氮原子的为 2.1 eV。

在改进的装置中，当加速电压足够大时，电子可以较容易获得足够大的动能，从而在与原子碰撞时，可以使原子中的电子被电离掉。能够将原子电离的加速电压称作**电离电势**。

第一电离电势就是从中性原子中将一个电子电离出去所需要的电压。表 12.10 中所显示的各种原子都有固定的第一电离电势这一事实，说明原子从基态到电离态的能量差是固定的，按照玻尔理论，这也是原子内部能量量子化的结果。

表 12.10　元素的电离电势

原子序数	元素	第一电离电势(V)	原子序数	元素	第一电离电势(V)
1	H	13.599	12	Mg	7.646
2	He	24.588	13	Al	5.986
3	Li	5.392	16	S	10.360
4	Be	9.323	18	Ar	15.760
5	B	8.298	19	K	4.341
8	O	3.618	20	Ca	6.1103
10	Ne	21.565	26	Fe	7.876
11	Na	5.139			

12.6.4 阴极射线激发光源

光源的发光机制有很多种。目前广泛使用的点光源主要有两种发光机制。一类属于热辐射，电流使灯丝发热，其中的带电粒子做随机的热运动，速度也随机变化，因而向外发出电磁辐射。电流的热效应越大，灯丝的温度就越高，辐射就越强。白炽灯就是以这样的方式发光的。由于相当多的能量转化为热能，故发光效率不高。又因为灯丝的温度远达不到太阳的温度，所以色温较低，对人眼而言，颜色偏黄。另一类属于荧光辐射，其中加速电子将动能传递给原子，使原子跃迁到激发态，激发态的原子向基态或低激发态能级跃迁，并发出光辐射。这种光源温度不高，发热很少，因而发光效率较高。又由于发光波长与能级间隔有关，所以，选择合适的能级可以起到与日光相似的效果。

1. 汞灯

曾经广泛使用的汞灯就是利用弗兰克-赫兹方法使汞原子激发而发光的：通电后，灯丝发出的电子经灯管两端的电场加速后与汞蒸气碰撞，将其激发。

汞灯分为低压的和高压的两种。所谓的低压、高压，是指灯中汞的蒸气压。低压汞灯中汞的数量较少，其中汞的蒸气压为 1.3～13 Pa(0.01～0.1 mmHg)，电子的平均自由程较大，可以被加速到较高的能量，从而将汞原子激发到较高的激发态能级。低压汞灯主要发出 184.9 nm 和 253.7 nm 的紫外光，可用于印刷制版、杀菌、荧光分析和光谱仪器的波长校准。高压汞灯中汞的数量较多，其中汞的蒸气压可达 51～507 kPa，电子不能被加速到很高的能量就与汞原子碰撞，汞原子被激发后，主要发出 365.0 nm 的长波紫外线，还有 404.7 nm，435.8 nm，546.1 nm 和 577.0～579.0 nm 的可见谱线，因而高压汞灯可直接用于照明。除此之外，还有蒸气压达到 10 133～20 265 kPa(100～200 atm)的超高压汞灯，主要发射的波长为 546.1 nm，亮度很高，可用作探照灯。

2. 日光灯

日光灯的外形是管状的，相当于在高压汞灯的管壁上涂敷荧光粉，该荧光粉吸收 365.0 nm 的紫外光，并发出红光，以补充汞自身所发出的蓝光、绿光，可对人眼产生类似于日光(白光)的视觉。

3. 空芯阴极灯

空芯阴极灯不是用来照明，而是用作材料分析中的光源，或用作校准光谱仪器。

空芯阴极灯中没有灯丝，阴极是金属圆筒，阳极是金属丝，灯管中封入气体或易挥发的材料。通电后电子在两极间被加速，加速电子使原子激发而发光。每种原子都发出具有特定波长的光，可以用这些光激发其他材料，测量这些材料的发光特性；也可以以特定的波长作为基准，校正光谱仪器。所以空芯阴极灯也称作光谱灯。各种惰性气体都是由原子组成的，因而可做成空芯阴极灯。常规条件下，氢气是分子形态，因此氢光谱灯所发出的既有氢分子的光谱，也有氢原子的光谱。

汞和钠也常被用作空芯阴极灯中的发光介质。钠原子受激发后可以发出所谓的 D 黄线，波长为 589.3 nm。将少量的金属钠封装在灯泡中，略一受热，即可挥发成钠原子蒸气，利用电子碰撞使其激发。钠灯不仅可用作光谱分析，也可用来照明。

第 13 章　量子力学初步

在文明发展的过程中，无论是东方的中国，还是西方的希腊，都积累了许多物理方面的知识和经验，但是，直到文艺复兴时期，才有了建立在实验基础上的物理学。伽利略是第一个采用专门设计的实验来研究物理学普遍规律的科学家，而牛顿则不仅进行了大量的物理实验，更是首先将数学逻辑引入到物理学的研究领域，他发表于 1686 年的著作《自然哲学的数学原理》标志着物理学科学体系和研究方法的建立。自牛顿之后，物理学获得了蓬勃的发展，取得了一系列伟大的成就。在牛顿之后的 100 多年的时间里，力学、热力学、电磁学都总结出了最基本的定律，有了完整的逻辑体系。例如，麦克斯韦 1873 年出版的《论电和磁》使电磁学理论达到了完美的境界，赫兹在 1888 年的实验不仅验证了麦克斯韦的理论，也证实了光就是电磁波。

在那个年代里，人们意识里的物理学是那样的完美、和谐，大家都认为物理学的大厦已经建成，今后的物理学家只需要在一些细节上进行修修补补就可以了。然而，在 20 世纪初，物理学却遇到了困难。正如 1900 年英国著名科学家开尔文男爵在一篇名为《在热和光的动力理论上空的 19 世纪乌云》的演讲中所指出的："一直以来坚信热和光都是运动方式的动力学理论，正被**两朵乌云**(图 13.1)所遮蔽，而失去了其优美和清晰。"



图 13.1　物理学上空的两朵乌云

开尔文男爵所说的第一朵乌云，指的是**迈克尔森-莫利实验**的结果与以太说法的矛盾。有很长一个时期，人们都认为光是在以太中传播的，而以太是充满整个空间的、静止不动的。日光和地球都在以太中运动，则日光和地球之间有相对速度。迈克尔森-莫利实验本来是希望测量出地球向着日光运动与垂直于日光运动时两者相对速度的差别。迈克尔森在 1881 年利用自己发明的干涉仪进行了第一次实验，1886 年又与莫利合作进行了第二次实验，但都得到了否定的结果。

第二朵乌云，指的是在解释黑体辐射实验规律时所遇到的困难。按照麦克斯韦-玻尔兹曼的能均分统计定理所得到的结论，与黑体辐射的实验定律出现了偏差。偏差出现在短波辐射区域，因而这一偏差称作"紫外灾难"。

后来，正是这两朵乌云，引起了 20 世纪物理学的革命。第一朵乌云导致了相对论的建立，而第二朵乌云导致了量子论的建立。

其实，在当时，还有一朵未被开尔文男爵提到的乌云，那就是赫兹在 1887 年所发现的光电效应，同样遮蔽了经典电磁学理论的光芒。

13.1 量子论的实验依据

当时用经典物理无法解释的实验现象有:黑体辐射的实验规律、光电效应。

13.1.1 黑体辐射与普朗克能量子

1. 辐射场的物理参数

辐射场就是电磁波场,任何发出电磁波(光波)的物体都在其周围形成一个辐射场。描述辐射场的物理参数很多,本书重点介绍以下几个。

(1) 辐射通量 **温度为 T 时,辐射场单位体积中,频率 ν 附近频率间隔 $d\nu$ 内的辐射能量表示为**

$$d\Phi(\nu,T) = E(\nu,T)d\nu$$

其中,$E(\nu,T)$就是单位体积中,频率 ν 附近单位频率间隔的**辐射通量**,称作**辐射谱密度或辐射本领**,也称**单色辐出度**。

(2) 吸收本领 将照射到物体上的电磁波的通量记为 $d\Phi(\nu,T)$,其中被物体吸收的通量记为 $d\Phi'(\nu,T)$,则比例

$$A(\nu,T) = \frac{d\Phi'(\nu,T)}{d\Phi(\nu,T)}$$

称为物体的**吸收本领或吸收比**。

2. 热辐射

(1) 物体间的热交换

如图 13.2 所示,与外界隔绝的几个物体的,起初温度各不相同。假设相互间只能以热辐射的形式交换能量,则每一个物体都向外辐射能量,同时也吸收其他物体辐射到其表面的能量。温度低的物体,辐射较小,吸收较大;而温度高的,辐射较大,吸收较小。经过一个过程后,所有物体的温度相同,达到了**热平衡状态**。

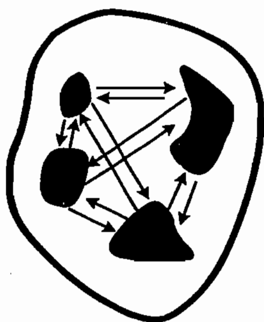


图 13.2 物体间通过辐射交换能量

热平衡时,每一个物体辐射的能量等于其吸收的能量,即热平衡状态下,吸收本领大的物体的辐射本领也大。

(2) 基尔霍夫热辐射定律

热平衡状态下物体的辐射本领与吸收本领成正比,比值只与 ν,T 有关,即

$$\frac{E(\nu,T)}{A(\nu,T)} = f(\nu,T) \tag{13.1}$$

其中,$f(\nu,T)$是**普适函数**,与物质无关。如果知道了 $f(\nu,T)$的规律,则可以对物体的热辐射性质进行全面深入的研究。

若通过实验来测量上述普适函数 $f(\nu,T)$,则必须同时测量 $E(\nu,T)$和 $A(\nu,T)$,但是这样会使研究变得比较复杂,因为吸收本领 $A(\nu,T)=\frac{d\Phi'(\nu,T)}{d\Phi(\nu,T)}$并不容易测量。如果设法使

$A(\nu,T)\equiv1$,则 $f(\nu,T)=E(\nu,T)$,从而只需测量单色辐出度,就可以得到普适函数 $f(\nu,T)$。

$A(\nu,T)\equiv1$,表明物体对辐照到它上面的能量全部吸收,没有反射,用通俗的语言说,由于它不反光,可以认为它是黑的。因而 $A(\nu,T)\equiv1$ 的物体,称作绝对黑体。

但实际上并不存在表面不反光的绝对黑体,实验中用的绝对黑体都是专门制作的。一个开有小孔的空腔对射入其中的光几乎可以全部吸收,如图 13.3 所示,可等效于绝对黑体。这时,只要测量空腔开口处的辐射本领,即可以得到 $f(\nu,T)=E(\nu,T)$。黑体辐射的测量装置如图 13.4 所示。

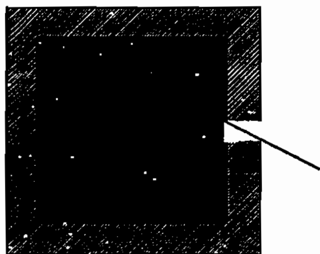


图 13.3 绝对黑体

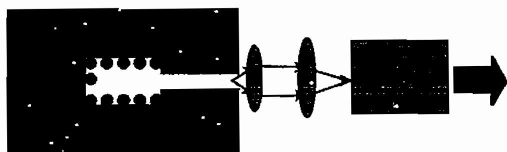


图 13.4 黑体辐射的测量装置

3. 黑体辐射的实验定律

实验测量得到的黑体辐射的光谱如图 13.5 所示,表明在不同的温度下,黑体的辐射本领不同;同时,在不同的波长(频率)处,辐射本领也不同。

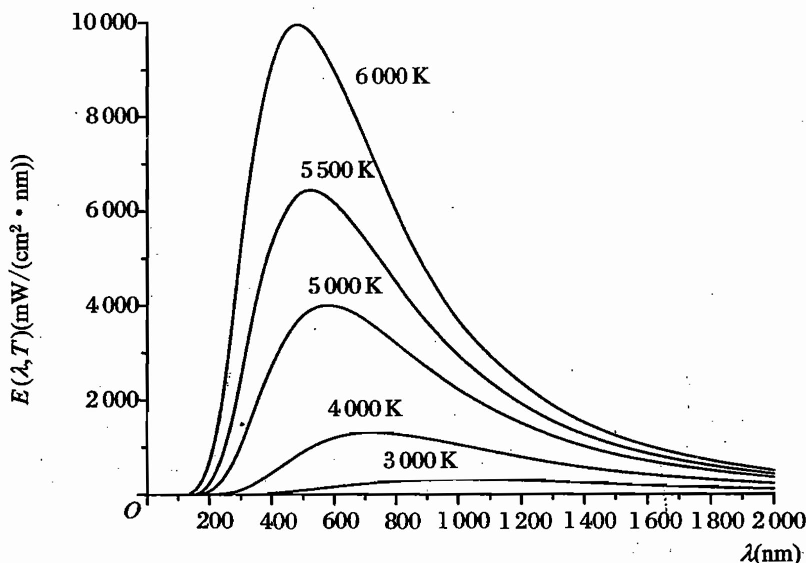


图 13.5 黑体辐射的测量结果

在 19 世纪末 20 世纪初的一段时间内,许多人对黑体辐射进行了较深入的研究,从实验和理论上总结出了黑体辐射的规律。

(1) 斯特藩-玻尔兹曼定律

斯特藩和玻尔兹曼分别于 1879 年和 1884 年发表了对黑体辐射的研究结果。

黑体辐射光谱中每一条曲线下的面积,表示黑体的辐射通量,即某一温度下总的辐射本领,

该辐射本领与温度的四次方成正比，即

$$\Phi(T) = \int_0^\infty E(\nu, T)\mathrm{d}\nu = \sigma T^4 \tag{13.2}$$

其中，$\sigma = 5.670\ 32 \times 10^{-18}$ W/($\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4$)为斯特藩-玻尔兹曼常数。

这就是斯特藩-玻尔兹曼定律。

(2) 维恩位移定律

1983 年，维恩从热力学导出了黑体辐射的辐射本领极大值的关系式，可表示为

$$T\lambda_{\min} = b \tag{13.3}$$

其中，$\lambda_{\max}$表示辐射本领最大的波长，$b = 2.897\ 8 \times 10^{-3}$ mK。

式(13.3)称作维恩位移定律。

维恩位移定律在实际中有广泛的应用，在无法进行接触测温的情况下，通过观察物体的辐射谱，可以得到物体的温度。例如，在炼钢厂中，人们通过观察高炉中钢水的颜色，能够判断出钢水的温度。

(3) 瑞利-金斯定律

瑞利和金斯分别于 1900 年和 1905 年用经典的统计物理方法研究了黑体辐射的规律。他们假设黑体空腔中的电磁波以驻波的形式存在，每个谐振子的能量为

$$\varepsilon = kT \tag{13.4}$$

由此根据热力学原理可导出辐射出的能量。黑体的辐射本领为

$$E(\nu, T) = \Gamma kT = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2 kT \tag{13.5}$$

或用波长表示为

$$E(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4}kT \tag{13.6}$$

式(13.5)和(13.6)就是瑞利-金斯定律。

从经典物理学的角度看，瑞利-金斯定律是无懈可击的，它从辐射场的性质出发，得出了黑体空间中单位体积驻波的谱密度，进而求出从小孔辐射出的驻波(谐振子)的数目和能量。

图 13.6 画出了维恩定律、瑞利-金斯定律与实验结果的比较。容易看出，在波长较大的波段，瑞利-金斯定律与实验结果一致，符合得较好；但在短波区域，当 $\lambda \to 0, E(\lambda, T) \to \infty$ 时，与实验结果严重偏离。由于这种偏离出现在波长较短的区域，所以称之为“紫外灾难”。“紫外灾难”说明，用经典物理学的理论无法解释黑体辐射的规律。

虽然从图上看起来维恩公式与实验结果的符合比瑞利-金斯定律要好，但是，维恩公式与实验的偏离却是系统的，即从物理的观点看，它的偏离比瑞利-金斯定律还要严重。

4. 普朗克对黑体辐射的解释

1900 年，普朗克从黑体辐射曲线的形状“猜”出了辐射本领所应具有的数学表达式。为了从理论上推导出这样的表达式，他作了一个假设：黑体空腔中谐振子的能量不能任意取值，而只能取一系列不连续的、分立的数值，可以设这些能量值为

$$\varepsilon = 0, \varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, 4\varepsilon_0, \cdots$$

而且能量与谐振子频率之间有以下关系：

$$\varepsilon_0 = h\nu \tag{13.7}$$

其中，ν 为谐振子的频率。

每个普朗克谐振子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{13.8}$$

这与瑞利-金斯的假设式(13.4)不相同，即 $\bar{\varepsilon} \neq kT$。

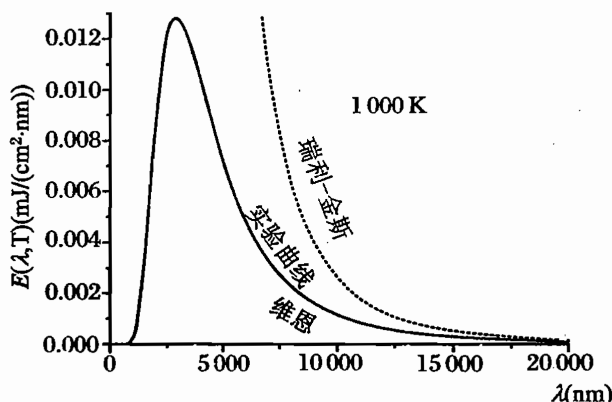


图 13.6 维恩曲线(虚线)、瑞利-金斯曲线(点)
与实验曲线(实线)的比较

普朗克算出的黑体辐射本领为

$$E(\nu,T) = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2 \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{2\pi}{c^2}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{13.9}$$

可以对公式(13.8)作进一步的分析。kT 实际上是谐振子热运动的动能，在长波段，谐振子的能量较小，即

$$h\nu \ll kT$$

这时

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \approx \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = \frac{kT}{h\nu}$$

于是辐射本领为

$$E(\nu,T) = \frac{2\pi}{c^2}h\nu^3 \frac{kT}{h\nu} = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2 kT$$

与瑞利-金斯定律符合。

在短波段，谐振子的能量较大，即

$$h\nu \gg kT, \quad e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$$

式(13.9)化为

$$E(\nu,T) = \frac{2\pi}{c^2}h\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

即在短波区域(即所谓的“紫外”波段)，随着频率的增加，即随着波长的减小，辐射本领迅速减小，并趋近于 0，这与实验结果一致。

普朗克的分立能量谐振子假设虽然解释了黑体辐射的实验规律，解决了“紫外灾难”，但是，由于这一假设看起来没有什么依据，在当时并没有得到认可。

13.1.2 光电效应与爱因斯坦光量子

1. 光电效应

现代意义上的光电效应是赫兹在进行电磁波实验过程中发现的。1887 年，赫兹将一对电火花隙(通过线圈连接的一对电极置于空气中，当有电磁波通过线圈时，会在电极间产生电场，从而将电极间的空气电离，发出电火花)放在一个带有玻璃观察窗的暗盒中，以便更好地观察电火花。他注意到，放电时，两极间火花的长度变短了，而这正是由于那块作为观察窗的玻璃板的影响。将玻璃板移开之后，电极间的火花又变长了。当他用不吸收紫外光的石英代替普通玻璃板后，火花的长度没有缩短。赫兹认为，这块处在电磁波源和接收线圈之间玻璃板吸收了紫外辐射，而紫外辐射会导致电荷在电火花隙间跳跃。他对这一现象研究了数月之后写出了研究报告。

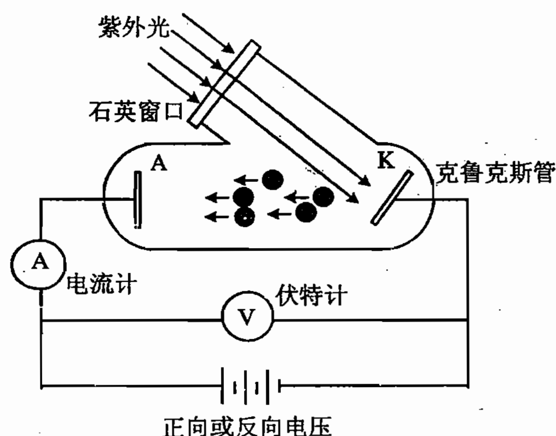


图 13.7 光电效应的实验研究装置

1899 年，汤姆孙采用克鲁克斯管研究光电效应。他用紫外光照射真空管中的金属电极(阴极)，发现回路中有电流出现，这就是光电流，说明由于光的照射，有电子从金属中被打出，这就是**光电子**。改变入射光的波长和强度会引起电流强度的改变。他测量的结果是入射光的强度越强，频率越短，光电流就越大。1901 年，特斯拉利用光电效应为电容器充电并获得发明专利。图 13.7 是研究光电效应的实验装置。

对光电效应进行深入仔细研究的是德国物理学家勒纳德。1902 年，他使用一个大功率的电弧灯研究真空管中金属电极的光电效应，通过测量光电子的**截止电压**，他得到结论，光电子的最大动能只与照射到金属上的光的频率有关，而与光的强度无关；当照射到电极上的紫外光频率增大时，光电子动能相应增大；如果光的频率小于某一数值，则没有光电子发射，这样的频率就是截止频率。对于各种金属电极，有一个与材料有关的截止频率。

2. 爱因斯坦对光电效应的解释

受到普朗克分立能量谐振子假设的启发，1905 年，爱因斯坦更进一步提出了**“光量子”**的概念，并成功地解释了光电效应。

按照爱因斯坦的“光量子”假说，光辐射中每一个光量子所携带的能量为

$$E = h\nu$$

即光辐射中，每一个“光量子”都是分立的，这就是光的粒子性，后来，“光量子”称作光子。

金属中的电子，由于受到束缚，从表面逸出时需要克服一定的势能，这就是**功函数**(也称**逸出功**)，记为 W。光电子的能量为

$$E_k = h\nu - W \tag{13.10}$$

如果在真空管的电极上加反向电压，则光电子的动能要损失。恰好使得光电子不能到达阳极的反向电压就是截止电压 V_s，这时，$eV_s = E_k$，于是 $V_s = h\nu/e - W/e$，即

$$h = \frac{eV_s + W}{\nu} \tag{13.11}$$

密立根用了10年的时间，从实验上验证了爱因斯坦的光量子假说，并且测量了式(13.11)中 h 的数值，得到 $h=6.63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$。$h$ 称作**普朗克常量**，是一个基本的物理学常数。

13.1.3 康普顿效应

1921年，康普顿发现了X射线在材料中的非相干散射现象。

康普顿的实验结果如图13.8所示，经过单色化的X射线入射到不同的材料上，在散射光中，一部分波长不变，是相干散射；另一部分波长变长，是非相干散射。康普顿还注意到，对于同一种元素，在不同的角度上，非相干散射的波长改变不同；而在同一角度上，不同的元素非相干散射所占的比例不同，元素序数较小的轻原子非相干散射的成分较大，而元素序数较大的重原子相干散射的成分较大。上述实验现象称作**康普顿效应**。

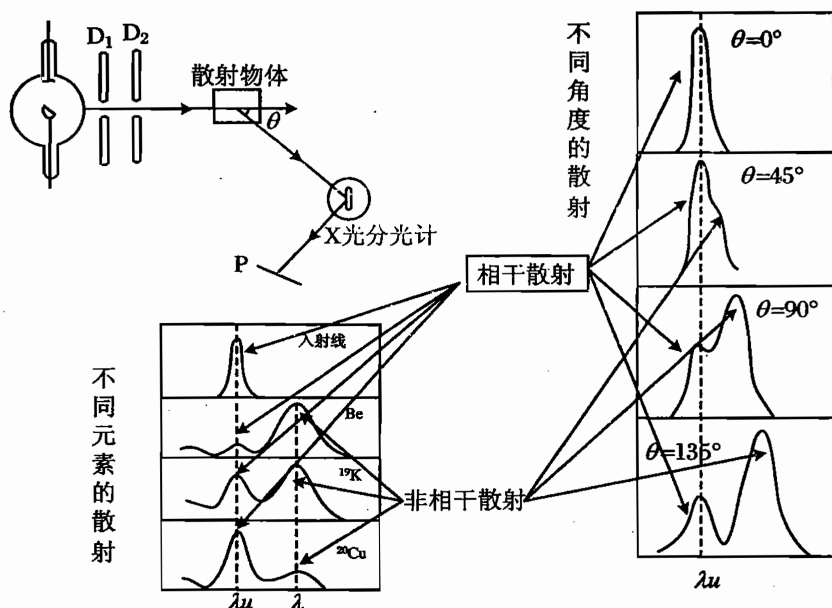


图13.8 康普顿散射实验的结果

康普顿利用光子模型，成功地解释了这一现象。

从光子的观点看，入射的X射线光子具有能量和动量。对光子而言，由于能量 $E=h\nu$，利用爱因斯坦质能关系 $E=mc^2$ 以及动量的表达式 $p=mc$，可以得到光子的动量表达式为

$$p=\frac{h\nu}{c} \tag{13.12}$$

入射的X射线光子与电子发生弹性碰撞，在碰撞过程中，动量和能量是守恒的，如图13.9所示，即

$$\begin{cases} h\nu+m_0c^2=h\nu'+mc^2 \\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}'+m\boldsymbol{v} \end{cases} \tag{13.13}$$

将方程组(13.13)中的第一式变为

$$mc^2=h\nu-h\nu'+m_0c^2 \tag{13.14}$$

而将方程组(13.13)中的第二式写为标量表达式，得到

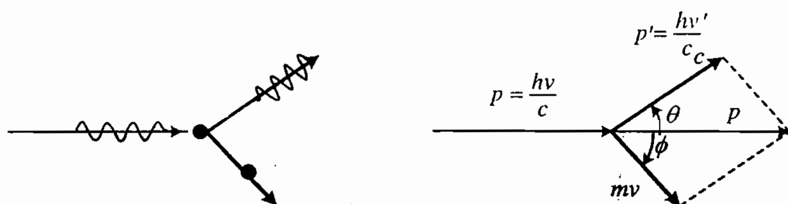


图 13.9　光子与电子的弹性碰撞

$$(mv)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 - 2\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu'}{c}\cos\theta \tag{13.15}$$

将式(13.14)的两边平方,得

$$m^2c^4 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu' + m_0^2c^4 + 2m_0c^2h(\nu - \nu') \tag{13.16}$$

对式(13.15)作如下的数学变换:

$$m^2c^2v^2 = h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 - 2h^2\nu\nu'\cos\theta \tag{13.17}$$

式(13.16)减式(13.17),有

$$m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)c^4 = m_0^2c^4 - 2h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) + 2m_0hc^2(\nu - \nu') \tag{13.18}$$

按照相对论,由于

$$m\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0$$

所以式(13.18)变为

$$m_0^2c^4 = m_0^2c^4 - 2h^2\nu\nu'(1 - \cos\theta) + 2m_0hc^2(\nu - \nu')$$

整理后得

$$\frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = \frac{c}{\nu'} - \frac{c}{\nu}$$

即

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta) \tag{13.19}$$

其中,$\lambda_C = h/(m_0c) = 2.426\,31\times10^{-3}$ nm$=0.024\,263\,1$ Å,称作**康普顿波长**,对应于静止电子的波长。

用式(13.19)可以解释同一种元素在不同的角度上非相干散射的波长不同的现象。而对于不同元素的散射,则可以这样理解:康普顿的散射模型中假设电子是自由电子,但实际上,在材料中,还有一些成键的束缚电子,如每个原子的内壳层电子,这些束缚电子由于受到原子核的束缚,其动量和能量在碰撞(散射)前后变化很小,因而光子在与束缚电子的散射过程中,动量和能量的变化也很小,可以认为是相干散射。在轻原子中,束缚电子的数目相对较少,因而非相干散射的光子数目较多;而重的原子中,束缚电子数目较多,因而相干散射的光子数目较多。

13.1.4　电子的衍射

1. 戴维孙-革末实验

1927 年,美国科学家戴维孙和革末将一束加速电子射向镍单晶的表面,结果发现被散射的电子在某些角度上的分布出现了极大值。这种情况类似于 X 射线在晶体中的衍射,而衍射是波的特征,说明电子具有波动性。

图 13.10 是实验装置的示意图，从电子枪中射出的电子束经过加速电场后打到镍单晶上，探测器可以测量被散射到不同角度处电子的强度（电子数）。

实验发现，当加速电压 $V=54$ V 时，在与入射电子束成 50°角的方向上，出现了极大值，如图 13.11 所示。这一实验结果与 X 射线在晶体中的衍射具有类似的特征，从而说明电子与 X 射线类似，具有波的性质。

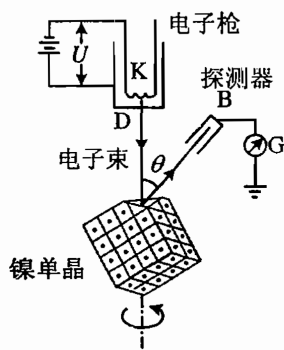


图 13.10 电子在镍单晶上衍射的示意图

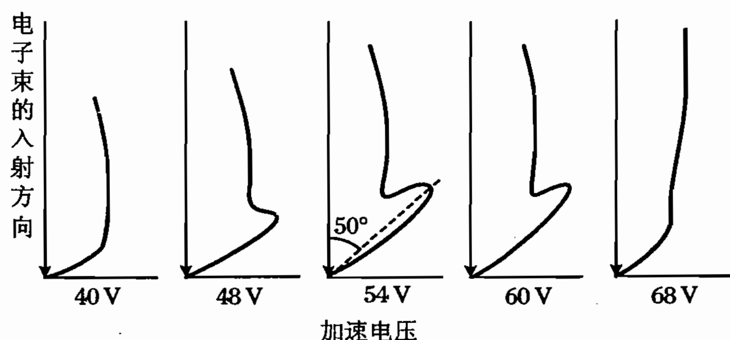


图 13.11 电子被镍单晶散射后在空间的角度分布

2. 汤姆孙实验

1927 年，汤姆孙进行了电子透过多晶体薄膜的实验（图 13.12），结果得到了和 X 射线衍射类似的衍射花样（图 13.13），这一实验是电子波动性的另一个实验证据。

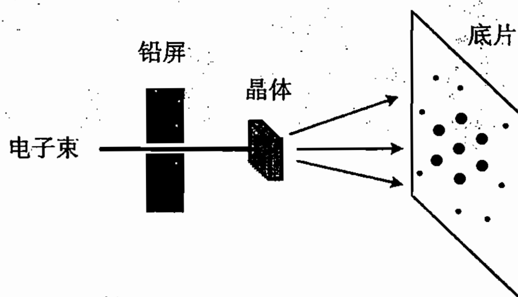
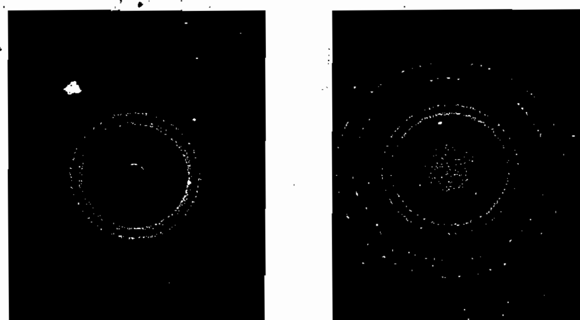


图 13.12 汤姆孙的电子透过多晶体薄膜的实验



X 射线在铝箔上的衍射　　电子在铝箔上的衍射

图 13.13 X 射线的衍射与电子的衍射比较

13.1.5　电子的干涉

托马斯・杨在1801年所进行的双缝干涉实验是光的波动性的最有力、最直接的证明。所以，自从戴维孙和汤姆孙观测到了电子在晶体和薄膜上的衍射现象之后，一直有人试图进行电子的双缝干涉实验，从而通过这样的实验证实电子的干涉与杨氏干涉实验有相同的结果。

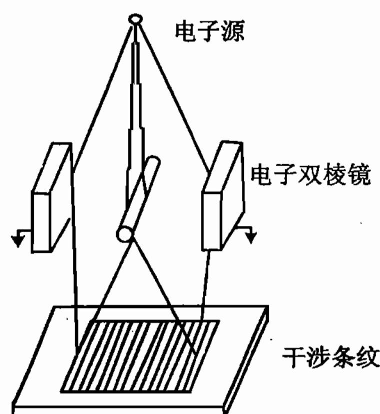


图13.14　电子双棱镜

在20世纪50年代，德国图宾根大学的莫伦斯特德和杜克利用所谓的“电子双棱镜”首先观察到了电子的干涉。如图13.14所示，利用一根垂直于电子束入射方向的通电细导线，可以将电子束分为两部分，然后在接收装置上观察到了干涉条纹。据说，莫伦斯特德是将金箔裹在蛛丝上做成上述导线的，为此他专门在实验室中养了些蜘蛛。实际上，尽管电子双棱镜可以将入射电子分为两束，但这并不是严格意义上的双缝干涉装置。

到了1961年，还是在图宾根大学，约恩逊首先实现了真正意义上的电子双缝干涉实验。他让电子通过特制的金属狭缝，观察到了电子的单缝、双缝、三缝、四缝直至五缝的干涉花样(图13.15)。

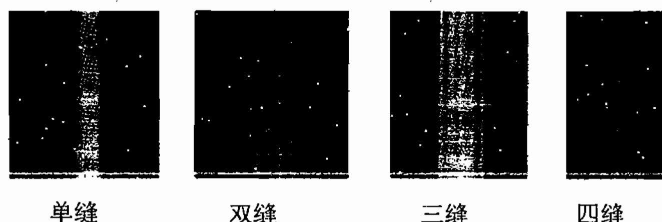


图13.15　约恩逊的电子的干涉花样

约恩逊实验的基本数据为：每个缝宽 $a=0.3\ \mu\mathrm{m}$，缝间距 $d=1\ \mu\mathrm{m}$，电子的加速电压 $V=50\ \mathbf{kV}$，电子的波长 $\lambda=0.05\ \text{Å}$。

1989年，日立公司的科学家外村彰等人使用一个配备有双棱镜的电子显微镜以及一套电子位置探测器，让电子一个一个地通过双棱镜，经过较长时间的纪录，观察到了真正意义上的电子干涉现象。电子的干涉行为与光通过双缝的杨氏干涉完全相同，这是对电子波动性的完美演示。尽管电子波动性的观点早已被人们普遍接受，但是，真正在实验室中实现单个电子的干涉却是第一次，因而，这一实验以及之前约恩逊等人的实验，2002年9月被美国科学杂志《物理世界》评为“最美丽的十大物理实验”之首。

13.1.6　分子的衍射

有很多关于分子通过光栅的衍射实验，其中之一显示了 C_{60} 分子的衍射，如图13.16所示。

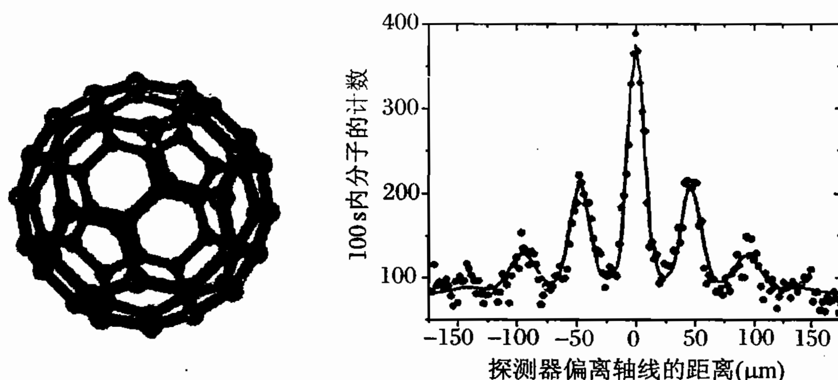


图 13.16　C_{60}分子及其衍射

13.2　物质的波粒二象性

13.2.1　德布罗意的物质波

黑体辐射、光电效应以及康普顿散射都证明了光具有粒子的特性，而粒子性的运动特征是可以用动量等物理量描述的。

光子具有动量，每个光子的动量为

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{13.20}$$

也可以将式(13.20)写为

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{13.21}$$

式(13.20)和(13.21)将反映粒子性的动量和反映波动性的波长结合起来，表明波动性、粒子性是物质不可分割的两种基本属性。这就是德布罗意在 1925 年最先提出的**"物质波"**的概念，物质波也称作**德布罗意波**。

作为粒子，光子具有质量

$$m = \frac{h\nu}{c^2} \tag{13.22}$$

这是光子的运动质量，而光子的静止质量为 $m_0 = 0$。

光的粒子性表现在光与物质的相互作用方面，波长越短，光子的能量越高，其粒子性越显著，例如电离气体、光电效应、康普顿效应、荧光效应、单光子记录等等。

光的波动性表现在光的传播、干涉、衍射以及散射、反射、折射等方面，波长较长的光，有着显著的波动性。

13.2.2　物质的波动性与粒子性

前一节中所列的各个实验都证明了光具有粒子性，而电子、分子等具有波动性，即物质都具

有波粒二象性。那么，我们该如何理解这种波动性和粒子性呢？这里所说的波粒二象性，是不是300多年前惠更斯和牛顿所说的波动性和粒子性呢？

作为粒子的最基本的特征，就是颗粒性，即可以作为一个整体存在。对光子来说，一个光子是一个不可分割的主体，此外，从物理学的角度看，粒子具有能量和质量，运动的粒子具有动量。那么，光子就具有和电子、分子一样的特性，可以作为粒子看待。

一个光子的能量为 $\varepsilon = h\nu$，而光子的运动质量为 $m = h\nu/c^2$，光子的动量为 $p = E/c$。这就是光的粒子性。

波动的最基本特征，首先应当是周期性，这种周期性用波长来表示。另外，波是可以线性叠加的，即可叠加性是波的重要特征。

物质同时具有波动性和粒子性，如图13.17所示，这种二象性就是通过德布罗意的基本关系式 $p = h/\lambda$ 体现的。在这个关系式中。表征粒子性的动量与表征波动性的波长通过普朗克常数联系起来。



图13.17　粒子与波

但是，根据我们的经验，一种物质往往无法同时表现出波动性和粒子性。例如，我们使用实验仪器，可以比较容易观察到可见光的干涉、衍射这些波动特征，而其粒子性却不容易表现出来。

波动性也好，粒子性也好，都只有通过与其他物质的相互作用才能体现出来。在光与物质的相互作用中，能量是一个很关键的物理量，我们不妨计算一下一个光子所具有的能量。例如，一个可见光子，比如氦氖激光的红光，其波长为632.8 nm，其能量为

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{197}{632.8 \times 10^6} = 0.3 \quad (\text{eV})$$

即使处于紫外波段的氟化氪(KrF)准分子激光，其波长为248 nm，单个这样的光子能量也不过0.8 eV，而原子的电离能最小的也大于6 eV，所以，单个这样的光子打在物质上，除了能使其发光之外，不会引起其性质的变化，因而，通常表现为波动性，即波的吸收、反射、透射等等。

而波长短得多的X射线，其光子能量则要大得多，例如铅的 K_α 线，波长为0.016 7 nm，其光子能量为11.8 keV，如此大的能量不仅足以使原子电离，还会引起物质其他性质的改变。这样的光子打在物质上，其效果用“炮弹”形容更为确切，所以，就表现出了较强的粒子性。

我们再看一下宏观粒子的波动性。在我们周围，被认为是粒子的东西往往不表现出波动性。波动指的是物理量在空间呈周期性的分布，如果波长太大，在有限的空间尺度内无法测量物理量的周期性变化，即在我们有限的观测范围内，无法感受到这种周期分布；相反，如果波长太小，用现有仪器也无法分辨物理量的周期性变化。

按照德布罗意的关系，波长与动量成反比，那么我们不妨以一个动量很小的实物粒子进行计算。

设一粒灰尘的质量为1 mg，速度为1 μm/s。对于这样的微粒，其波长可以作如下估算：

由于动量 $p = mv = 1\times10^{-6}\times1\times10^{-6} = 1\times10^{-12}$ (J·s/m)，所以波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = 6.63 \times 10^{-34}/(1 \times 10^{-12})$$
$$\approx 10^{-22} \quad (\text{m})$$

如图 13.18 所示，这样小的波长，这样小的空间周期性，我们根本无法测量，可见我们周围的宏观物质，只是由于波长太小而无法体现其波动性。



图 13.18　宏观粒子的波长

13.3　波粒二象性的必然结果——量子态

以下我们通过几个实例，看一下具有波粒二象性的物质的状态与我们的经验有多大的差距。

13.3.1　轨道角动量的量子化

原子中的电子可以在其轨道上稳定地存在，而不湮灭或消失，则从波的角度看，电子波必须以驻波的形式存在于电子的轨道上，否则，会由于波的相干叠加而消失(图 13.19)。

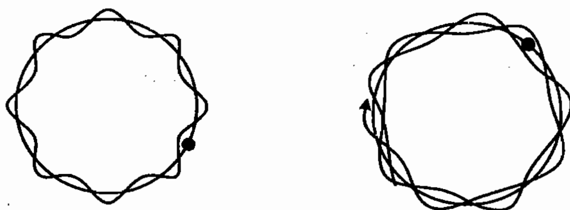


图 13.19　原子中电子在轨道上的驻波

形成驻波的条件是轨道周长恰好为电子波长的整数倍，只有这样才能使波的起点和终点具有相同的相位，于是

$$2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{p} = n\frac{h}{mv}$$

即

$$mvr = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

所以角动量 $p_\varphi = mvr = n\hbar$，它是量子化的。

这正是玻尔模型的第三个假设。

13.3.2　刚性匣子中的粒子

粒子被限制在刚性匣子中运动，不能穿透出来，如图 13.20 所示。从波的角度看，粒子在其中以驻波的形式存在。匣子壁是驻波的波节，因而匣子的长度是半波长的整数倍。

按照驻波的条件，匣子的长度为 $L=n\lambda/2$，而由波粒二象性，即如果将粒子看作波，则由德布罗意关系 $\lambda=h/p$，可得粒子的动量为 $p=nh/(2L)$，所以得到匣子中粒子的动能为

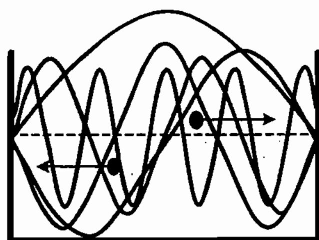


图 13.20 刚性匣子中的粒子

$$E_k=\frac{p^2}{2m}=\frac{n^2h^2}{8mL^2}$$

这样就可以得到结论：从波粒二象性出发，束缚粒子的能量是量子化的。

如果将匣子等效为库仑势场，其中的粒子就是核外电子；电子沿轨道运动一周后回到起点，则轨道的周长即为匣子长度的2倍，$2\pi r=2L$，即 $L=\pi r$，因而

$$E_k=\frac{n^2h^2}{8mL^2}=\frac{n^2h^2}{8\pi mr^2}$$

势能为

$$E_p=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

总能量为

$$\begin{aligned}E&=E_k+E_p\\&=\frac{n^2h^2}{8\pi mr^2}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\end{aligned}$$

能量的最小值满足条件

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=0$$

即

$$-\frac{2n^2h^2}{8\pi mr^3}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=0$$

能量最小时对应的轨道半径为

$$r_{\min}=\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^{-1}\frac{h^2}{4\pi^2m}=a_1$$

这就是氢原子的第一玻尔半径。

最低能量为

$$\begin{aligned}E_{\min}&=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{mc^2}{\hbar^2c^2}\\&=-13.6\ \mathrm{eV}\end{aligned}$$

这就是氢原子的基态能级。

所以可以说，由物质的波粒二象性，可以很自然地得到量子化的结论。因而，**波粒二象性是量子理论的基础**。

13.4 不确定关系

经典粒子可以同时有确定的位置、速度、动量、能量等，或者说，经典粒子的运动总是可以用

轨迹描述；而经典波在空间往往是扩展的，其空间位置难以确定。

然而，对于具有波粒二象性的物体，该如何确定它们的位置、动量等物理量呢？

13.4.1 几个典型的例子

1. 自由粒子

自由粒子不受外部的作用力，因而可以保持其状态不变，即速度不变、动量不变等等，则该粒子的速度是一个完全确定的值。但是，自由粒子是运动状况不受限制的粒子，可以在空间任意位置出现，即位置是完全无法确定的。如果将这样的自由粒子看作波，由 $\lambda = h/p$，则其波长是完全确定的，就是单色波，如图 13.21 所示。



图 13.21 无限长的单色波列（自由粒子看作波）

根据波动光学的结论，单色波是空间中无限长的一个波列，即弥散在空间各处，位置完全无法确定。

可见，具有波粒二象性的粒子，如果其动量是完全确定的，则其位置完全不确定，即如果 $\Delta p = 0$，则必有 $\Delta x = \infty$。

2. 波包

波包是非单色波的叠加，就是在空间的有限长波列，波列的长度

$$\Delta L > \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

则 ΔL 就是波包在空间的弥散范围。

如果将波包视为粒子，则该粒子只能出现在波包弥散的空间区域之内，如图 13.22 所示，即粒子的空间位置有一个不确定范围 $\Delta x(\Delta x = L)$。

由于波包是非单色波叠加而形成的，故有一定的波长分布范围。因为波长与动量相依赖，故将波包看作粒子时，该粒子的动量也有一定的分布范围，即动量的不确定范围为

$$\Delta p = \Delta\left(\frac{h}{\lambda}\right) = \frac{h\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

所以有 $\Delta x \Delta p > \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}\frac{h\Delta\lambda}{\lambda^2}$，即

$$\Delta x \Delta p > h$$

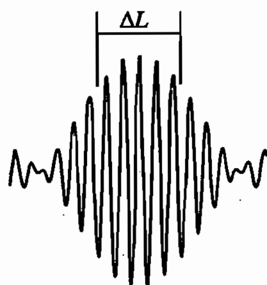


图 13.22 空间分布范围（位置不确定范围）为 ΔL 的粒子（波包看作粒子）

这说明波包的动量和该波包的空间位置不能同时确定。

3. 光的时间相干性（即波包的时间相干性）

设想在时刻 t，中心频率为 ν 的波包经过空间某一点 P，该波包的中心频率所对应的能量为

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

由于波包具有波长范围 $\Delta\lambda$，则波包能量的不确定度（即能量的分布范围）为

$$\Delta E = hc\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = hc\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

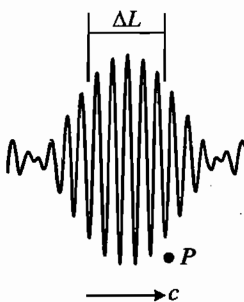


图 13.23　波包在空间位置 P 处存在的时间

从图 13.23 可以看出，该波包传播过空间点 P 所用的时间就是相干时间，为

$$\Delta t > \frac{L}{c} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda c}$$

如果将波包视作粒子，则上述过程可理解为，粒子的能量在 $E\pm\frac{\Delta E}{2}$范围内，且该粒子处于该状态的时间为 Δt，从而有 $\Delta E\Delta t > \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda^2}\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda c} = h$，即

$$\Delta E\Delta t > h$$

也就是粒子的能量和该粒子处于这一能量状态的时间不能同时确定。

4. 单缝衍射

在夫琅禾费衍射装置中，一列单色波经过宽度为 a 的狭缝后，发生衍射。衍射后，光波的能量主要集中在中央主极大的空间角度内。根据衍射的反比关系，中央主极大的半角宽度为

$$\Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{a}$$

从粒子的角度看，衍射后的粒子主要集中在中央主极大的范围内。

如图 13.24 所示，粒子通过狭缝才能发生衍射，能通过狭缝的粒子，其空间位置的分布范围，即位置的不确定度为 $\Delta x = a$。

分布在中央主极大范围内的光子，在 x 方向动量的不确定范围为

$$\Delta p_x = p_z\Delta\theta > \frac{h}{\lambda}\frac{\lambda}{a} = \frac{h}{\Delta x}$$

于是可得

$$\Delta x\Delta p_x > h$$

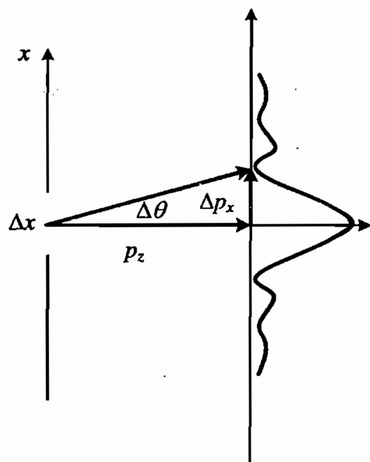


图 13.24　光子衍射时空间位置的不确定范围与动量的不确定范围

上述光学的实验事实说明，具有明显波粒二象性的微观粒子(如光子或光波)与宏观粒子有着显著的不同。我们日常所见的粒子都同时有确定的速度、动量、位置和运动轨迹，但是，由于微观粒子具有波的特征，所以，这些粒子的动量和空间位置、能量和处于这一能态的时间，是无法同时确定的，这就是不确定关系或不确定原理。

13.4.2　不确定关系的严格表述

不确定关系是由海森伯首先提出的。海森伯从量子力学出发，导出了不确定关系的数学表

达式。这里，我们仅仅将有关结论罗列如下：

(1) 空间位置与动量的不确定关系

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \Delta p_y \geqslant \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \Delta p_z \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{13.23}$$

(2) 能量与时间的不确定关系

$$\Delta E \Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{13.24}$$

13.4.3 不确定关系的物理含义

1. 粒子不可能同时具有确定的空间位置和动量

位置完全确定的粒子，对应于空间中一个无限窄的波包；而无限窄的波包是含有各种波长成分的单色波的叠加，也就是说，无限窄的波包具有不受限制的波长分布范围，因而其动量是完全不确定的(图 13.25)。

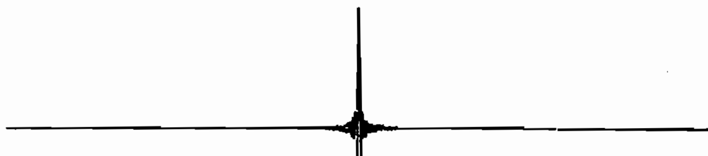


图 13.25 空间分布范围极小的波包(等效于位置完全确定的粒子)

动量完全确定的粒子，对应于波长完全确定的单色波；而该单色波在空间的波列无限长，等效为粒子，该粒子的空间位置是完全不确定的(图 13.26)。



图 13.26 动量完全确定的粒子(等效于弥散在全空间的单色波)

一般的粒子，对应于普通的波包，是有限长的非单色波列，同时具有动量的不确定度以及空间位置的不确定度(图 13.27)。

2. 能级的自然宽度

设 ΔE 为粒子在某一状态时能量的不确定度，Δt 为粒子处于这一状态的时间，即该状态的寿命，或者理解为，在这一时间内，粒子的能量不为零。

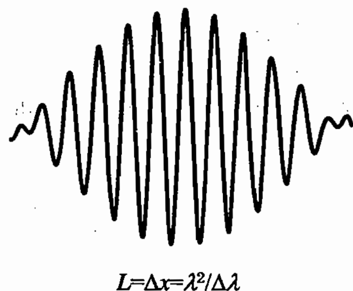


图 13.27 波包的空间位置和动量不能同时取确定的值

由于，$\Delta E \Delta t \geqslant \hbar/2$，所以，粒子在某一状态的能量与粒子在该状态的寿命是无法同时确定的。可以认为，由于跃迁过程中粒子没有在中间态停留，或者说在粒子的跃迁过程中所经历的状态都是能量完全不确定的状态，即 $\Delta E=\infty$，故 $\Delta t=0$，也就是说，跃迁是没有中间过程的(图 13.28)，跃迁不需要时间。

对于原子的任一个激发态能级，因为该原子不可能永远处于该能级，所以该能级的寿命总是有限的(图 13.28)，即 $\tau=\Delta t\neq\infty$，于是 $\Delta E\neq 0$，原子

激发态的能级总是有一定分布宽度的，称作**能级的自然宽度**。

由于能级的自然宽度，辐射跃迁发出的光波不可能是严格的单色波，而总是有一定的波长分布范围，称作**光谱线的自然宽度**(图 13.28)。

3. 束缚粒子的最小平均动能

如图 13.29 所示，如果粒子被限制在 Δx 范围内运动(例如处于刚性匣子中)，由不确定关系，有 $\Delta p_x \geqslant \hbar/(2\Delta x)$。

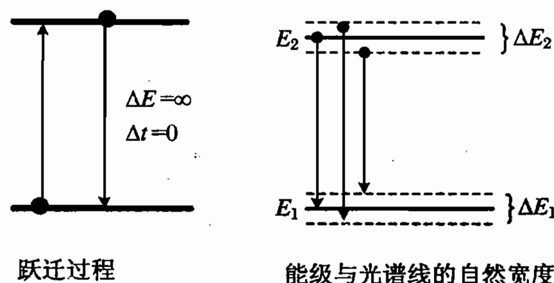


图 13.28 跃迁过程以及能级与光谱线的自然宽度

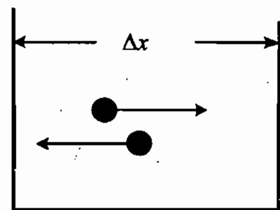


图 13.29 束缚粒子的最小动能

由于粒子在运动过程中，与匣子壁是弹性碰撞，所以不损失能量，往复的运动将一直持续，所以平均动量为 0，即 $\bar{p}_x=0$。从统计角度看，动量的不确定度就是动量的方均根，即

$$\Delta p_x = \sqrt{\langle (p_x-\bar{p}_x)^2\rangle} = \sqrt{\langle p_x^2\rangle}, \quad 即 \quad (\Delta p_x)^2 = \langle p_x^2\rangle$$

由不确定关系，有 $\langle p_x^2\rangle \geqslant \left(\frac{\hbar}{2\Delta x}\right)^2$，则粒子的平均动能为

$$\langle E_k\rangle = \frac{1}{2m}\langle p_x^2\rangle \geqslant \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{2\Delta x}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{8m\Delta x^2}$$

平均动能的最小值为

$$\langle E_k\rangle_{\min} = \frac{\hbar^2}{8m\Delta x^2}$$

如果将上述粒子等效为核外电子，则 $\pi r=\Delta x$，$\langle E_k\rangle_{\min}=h^2/(8\pi^2 mr^2)>0$。这明电子将始终运动，总是具有动能，不能落入核内。

对于三维运动，其动能的平均值 $\langle E_k\rangle_{\min}=3\,\hbar^2/(8m\Delta L^2)$。

通过上面对实验事实的分析，可以这么说，不确定关系是波粒二象性的必然结果。

13.5 波函数及其统计解释

光学中，可以用函数描述光波，光的波动表达式反映的是波场的振动，即电场强度、磁感应强度的周期性变化(随时间)与分布(在空间)。

那么，对于具有波粒二象性的粒子，如何从粒子角度出发来描述其运动规律呢？

波动要遵循波的叠加原理，那么我们就从这一点出发，探讨微观粒子的特征。

13.5.1 波粒二象性的数学描述

(1) 不能理解为经典意义下的波或粒子

经典波所表示的是物理量在空间的周期性分布;而经典粒子是具有确定位置、轨迹、速度的实物。所以经典的波动性或粒子性并不能直接用于理解微观粒子的波粒二象性。

(2) 波粒二象性的量子力学理解

所谓粒子性,就是粒子本身所具有的颗粒性质,或作为一个整体的不可分割性。作为粒子,具有质量、动量、能量等等,但由于不确定关系,"轨道"或"空间运动轨迹"的概念不再适用于描述微观粒子。

所谓波动性,就是物理量或体系的状态是可以线性叠加的。

可以通过具体的实例理解波粒二象性。

13.5.2 电子的双缝干涉实验

表现光的波动性的典型实例是杨氏双缝干涉实验。从波的观点看,双缝将一列光波分为相干的两列,记为 $\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2$,这两列光波在相遇的区域进行相干叠加。按照波的叠加原理,可以得到合振动为 $\tilde{\psi}=\tilde{\psi}_1+\tilde{\psi}_2$ 的光波。干涉场在接收屏上的强度分布为

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\psi}|^2 &= |\tilde{\psi}_1+\tilde{\psi}_2|^2 \\
&= |\tilde{\psi}_1|^2+|\tilde{\psi}_2|^2+\tilde{\psi}_1^*\tilde{\psi}_2+\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_2^*
\end{aligned}
$$

所谓光强,就是复振幅模的平方的时间平均值,即 $|\tilde{\psi}_1|^2=I_1$,$|\tilde{\psi}_2|^2=I_2$,上式中的交叉项 $\tilde{\psi}_1^*\ \tilde{\psi}_2+\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_2^*$ 就是干涉项。

如果两缝的宽度相等,或者说两缝是完全等效的,则从两条缝出射的光强相等,即 $I_1=I_2=I_0$。通过任一条缝的光强或光子数记作 I_0,则:

干涉相长时,$I=I_0+I_0+2\sqrt{I_0I_0}=4I_0$;

干涉相消时,$I=I_0+I_0-2\sqrt{I_0I_0}=0$。

也就是说,从波的观点看,干涉后,屏上出现明暗交错的条纹是两列相干光的相互叠加,即相互作用的结果(图 13.30)。

既然电子也同光子一样具有波的特性,那么,电子通过双缝后,也能够产生干涉。下面就简单地讨论一下电子的双缝干涉。

如果从粒子的角度看,光强与光子数成正比,光子多则光的强度大,光子少则光的强度小。电子束流的强度也是由电子的数目决定的,那么,只要记录接收屏上电子数,就可以得到电子的干涉花样。

由上述干涉相长和干涉相消的强度表达式看,在亮条纹(干涉相长)处,可以认为是每两个电子干涉后,变为四电子;而在暗条纹(干涉相消)处,则是每两个光子干涉后,电子就消失了,湮灭了。

但这是说不通的! 既然认为电子是一个一个的实物粒子,具有能量、动量以及不可分割性,那么,它就不可能因为两个电子相互作用而又产生出两个电子来,也不可能因为两个电子相互

作用而消失得无影无踪。

可以设想，在上述实验中，如果让入射电子束流变得很弱，则经过较长时间的积累后，在接收屏上仍然可以得到干涉花样。从粒子的角度看，束流很弱，就是电子数很少，以至于每次只有一个电子到达接收屏上，这样，根本就没有电子之间的相互作用，但仍能得到干涉花样。这就说明，干涉后接收屏上的强度分布，并不是电子之间相互作用的结果。

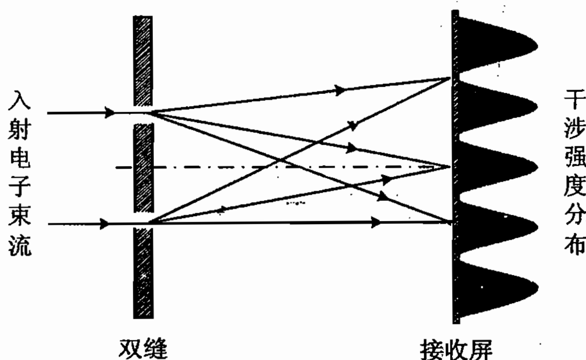


图 13.30　双缝干涉实验装置

那么该如何理解电子的干涉呢？事实上，干涉的结果，只是使得经过双缝的电子在接收屏上按照特定的规律分布，强度较大的亮条纹处，电子数多，说明每一个电子在这里出现的概率大，而强度较小的暗条纹处，电子数少，说明电子在这里出现的概率小。也就是说，干涉条纹的分布，只是大量电子本身所具有的在空间分布的特性的反映。

如果采用其他干涉装置，例如改变双缝的间距、屏幕的距离，或用三缝、四缝等装置，则干涉花样肯定会有所不同，即电子在空间的分布特性或分布概率将发生改变。所以，这种空间概率分布特性是由干涉系统所决定的。

上述"假想"的实验在 20 世纪 20 年代就被用来说明"**电子在空间的概率分布**"这样一个对量子力学来说至为重要的观点，但之后的几十年间，它一直都是一个设想，而这一设想基于波粒二象性这样一个被所有人都接受的事实。从光子外推到电子，看起来是那样的完美和无懈可击。所以，从没有人怀疑过这一假想实验的合理性，似乎也没有人试图去做这样的实验。就连获得诺贝尔物理学奖的美国物理学家费恩曼也曾经说过："你最好不要试着去做这样一个实验，这个实验从未以这种方式做过。"

但是，到了 20 世纪 70 年代，在意大利的博洛尼亚大学，梅林、波齐和米西罗利等人已经做了这样的实验，并得到图 13.31 所示的结果，其中的六张照片显示了随着时间的积累，接收屏上电子的分布情况。他们设法使从电子枪中发射出的电子束流很弱，从而认为每次只有一个电子到达接收装置上(虽然并没有足够的证据证实这样的一个过程)。

在 1989 年，日本日立公司的外村彰等人做了更精确的实验(图 13.32)。实验中，电子束流被控制得极低，实际测量证明每秒钟只有少于 1 000 个电子入射到双棱镜中，所以不可能有两个或两个以上的电子同时到达接收装置上，因而不存在干涉是两个电子相互作用的结果，即干涉不是两个电子或两个光子之间相互作用的结果。

如图 13.33 所示，当时间较短，电子数较少时，看不出电子的空间分布有什么规律，但是，当经过一定时间(20 分钟)的积累，电子数较多时，就显示了明显的规律，得到了与双缝干涉一致

的结果。

因而，对于微观粒子的波动性，可以从统计的观点来理解。具体到一个光子或电子，这种波动性就是空间分布概率的体现。

这种分布特性可以用统计的方法，即分布概率进行描述。电子或光子出现概率大的地方，强度较强；电子或光子出现概率小的地方，强度较弱。

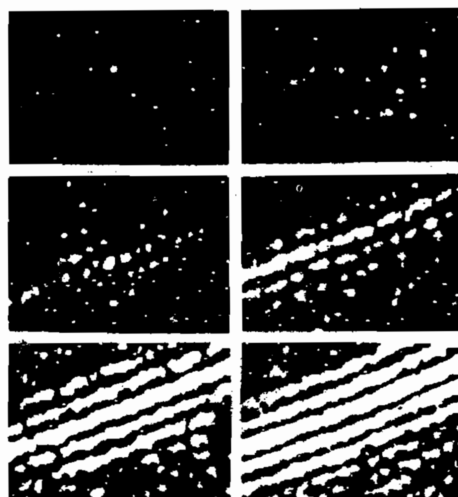


图 13.31　梅林等人的电子双缝干涉花样

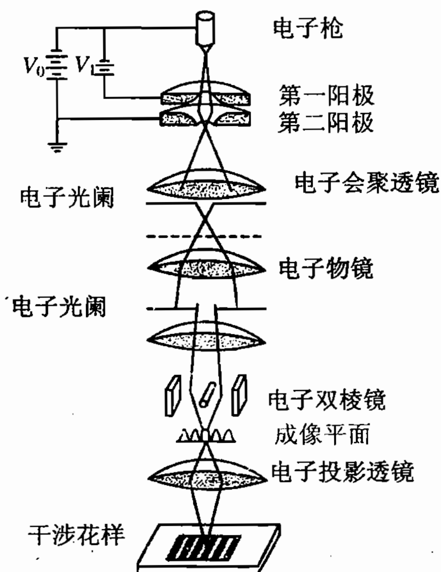
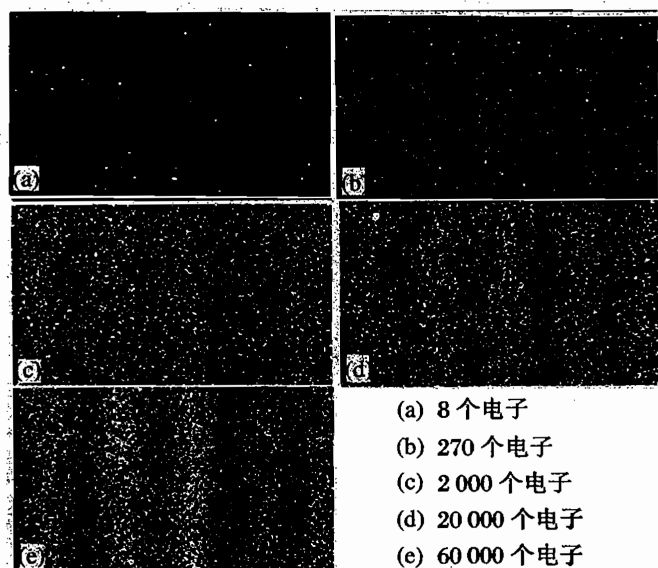


图 13.32　外村彰等人的电子双缝干涉装置



(a) 8 个电子
(b) 270 个电子
(c) 2 000 个电子
(d) 20 000 个电子
(e) 60 000 个电子

图 13.33　外村彰等人的电子双缝干涉花样

13.5.3 波函数的统计解释

正如前文所述，早在 20 世纪 20 年代，利用“假想”的电子双缝干涉实验，从电子空间分布概率的观点对光子或电子的干涉实验进行了解释。提出这一解释的，是与海森伯、若尔当、泡利、狄拉克等同在德国哥廷根大学的物理学家玻恩。

因为所有的物质都具有波粒二象性，所以可以用波的表达式来描述粒子的行为。波动具有时间和空间两重周期性，最简单的简谐波的振动可以用函数表示为

$$\psi(x,t) = \psi_0 \cos(kx - \omega t) \tag{13.25}$$

其中，$k = 2\pi/\lambda$，称作**波矢或圆波数、角波数**；$\omega = 2\pi\nu$，称作**圆频率或角频率**；ψ_0 为波的振幅，该振幅通常是空间位置的函数，因而也可以写作 $\psi_0(\boldsymbol{x})$。

从波动的角度看，光是电磁波，光的强度正比于其振幅的平方，即 $I = \psi_0^2$。但是，如果从粒子的角度看，那么光强就正比于光子数，或光子数密度 n（即单位面积上或单位体积中的光子数）。这样一来，光子数密度就正比于上述波动表达式中振幅的平方，即

$$n \propto \psi_0^2 \tag{13.26}$$

从统计的角度看，光子密度大的地方，必定是光子出现或分布概率大的地方，所以，波动表达式中的振幅正是光子在空间的分布**概率密度**。

电子和光子一样，具有波粒二象性，所以可以将光的波动表达式 $\psi(x,t)$ 直接用于描述电子或其他任何粒子，这就是粒子的**波函数**。

如果用波动的表达式描述粒子（光子、电子等微观粒子）的行为，那么波函数 ψ 到底表示了粒子怎样的特征呢？

从上面对光的干涉实验和电子的干涉实验可以看出，波的强度反映的是粒子数目的多少，则波的分布反映的就是粒子在空间的分布。确切地说，波的强度，即光强 $I = \psi_0^2$ 所反映的就是在时刻 t、空间点 x 处粒子出现或被发现的概率。因而波的振幅 ψ_0 就称作**概率幅**。这就是波动性的物理含义。

因此，经典意义下的描述波动的函数或复振幅就成了量子意义下描述粒子分布概率幅的函数。

第 14 章　原子核物理概论

自从 1897 年汤姆孙发现电子并提出了原子的模型之后，对原子结构的实验和理论研究就开始了。1911～1913 年间，卢瑟福根据 α 粒子散射实验的结果，提出了原子的核式模型，即原子是由处于中心的原子核与核外电子构成的，原子核的体积很小，带有与核外电子等量的正电荷。这一模型至今还被认为是正确的。

建立在核式模型基础上的玻尔理论，以及后来的量子理论，对原子的能级和光谱的实验结果进行了有效的分析，这些理论着重讨论了核外电子的运动规律，对原子核的运动较少涉及。但长期以来，对原子核的实验和理论研究一直没有停止过，并取得了许多重大的成果。

作为一个整体，原子的性质当然取决于核与核外电子的整体状态。但是实验研究表明，原子的化学性质、原子的光谱特征等主要取决于核外电子的状况。这可以从两个方面来理解：一方面，对同一种原子，当核外电子的状态发生改变时，原子的上述性质也会发生相应的改变；另一方面，对于不同的原子，当核外电子的状况相同或相似时，原子的上述性质也相似，这也是元素周期律的原因，也是同一周期原子具有大致相同的能级和光谱结构的原因。

当然，原子核的状态对原子上述性质的影响也是显而易见的，例如原子光谱的超精细结构、核磁共振等现象就是核状态的表现。但是，由于改变核的状态所需要的能量比改变核外电子状态所需要的能量大得多，所以，在一般的低能状态下，可以不考虑原子核的影响。

尽管对原子核的研究已经进行了多年，而且，与核外电子的研究相比，这方面所投入的人员是众多的，资金是巨额的。但是，由于原子核的几何尺度仅不到原子的万分之一，而且原子核的运动、结构又远比人们最初想象的要复杂得多，所以，直到目前，人们对原子核的认识还是相当有限的。由于难以从实验上全面了解原子核的情况，因而有关原子核的理论体系既不完整也不精确。关于原子核的理论，多是对实验结果的总结和由此所得到的半经验的公式。

14.1　原子核的基本情况

实验一直是研究原子核的重要手段，本节首先介绍一些重要的探测器。

14.1.1　粒子探测器

1. 荧光探测器

从原子中发出的各种粒子都具有较高的能量，这些粒子打到其他物质上，会使其中的原子激发，某些原子受激后会发出荧光，利用这种性质可以探测粒子。其实，伦琴就是注意到铂氰酸钡（$BaPt(CN)_6$）发出荧光而发现了 X 射线。

用可以发光的材料做成荧光屏，根据荧光屏发光的情况判断有无射线。有的荧光材料发光的寿命很短，即一旦停止激发，发光也立即终止，这种材料是闪烁发光材料，通常是晶体。用闪烁晶体可以探测和记录粒子的数目。

射线在空气中，由于不断与分子碰撞，将会损失一部分动能，经过一定的距离后，粒子由于损失了全部动能而无法继续前进，这样，根据粒子在一定温度和压强下空气中飞行过的距离，可以测量出粒子所具有的动能(能量)。实际上，也可以将一定厚度的其他材料等效为标准空气层的厚度，从而测量粒子所具有的能量。

2. 粒子径迹探测器

(1) 云室

云室是早期的核辐射探测器，也是最早的带电粒子径迹探测器。1896 年由英国物理学家威尔逊发明，又称**威尔逊云室**。如图 14.1 所示，云室的下底是可上下移动的活塞，上盖是透明的。实验时，在云室内加适量酒精，使其中充满酒精的饱和蒸气。然后使活塞迅速下移，室内气体由于迅速膨胀而温度降低。这时高能粒子射入，在经过的路径上产生离子，过饱和气以离子为核心凝结成小液滴，从而显示出粒子的径迹。威尔逊为云室增设了拍摄带电粒子径迹的照相设备，使它成为研究射线的重要仪器。1911 年他首先用云室观察到并照相记录了 α 和 β 粒子的径迹。图 14.2 显示了粒子在云室中的径迹。

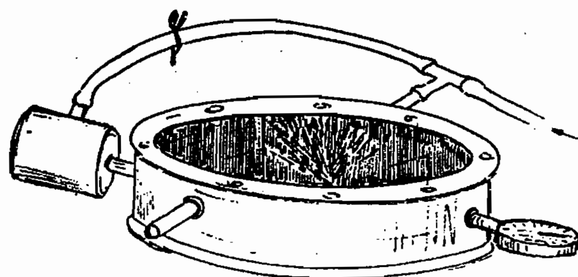


图 14.1　云室



图 14.2　粒子在云室中的径迹

云室中的气体大多是空气或氩气，蒸气大多是乙醇或甲醇。根据径迹上小液滴的密度或径迹的长度可测定粒子的速度；将云室和磁场联用，根据径迹的曲率和弯曲方向可测量粒子的动量和电性，从而可确定粒子的性质。1896 年威尔逊用当时新发现的 X 射线照射云室中的气体，观察到 X 射线穿过之处空气被电离，带电离子会形成细微的水滴，显示出 X 射线的运动轨迹。在历史上，云室对粒子物理起过重大作用，曾用它发现了 e^+，μ^-，K^{+0}和 Λ，Ξ^- 等粒子。

后来，布莱克特对威尔逊云室作了重要改进，将盖革计数器与云室联合运用，当盖革计数器探测到粒子时，就启动照相机拍摄云室的图片。

由于云室灵敏时间短，工作效率低，目前在核物理实验中已很少应用，但在高能物理，特别是在宇宙射线研究中，膨胀云室仍不失为一种有用的探测工具。

(2) 气泡室

气泡室是探测高能带电径迹的另一种有效的手段，1952 年由格拉塞发明。它曾在 50 年代以后一度成了高能物理实验的最风行的探测设备，为高能物理学创造了许多重大发现的机会。

气泡室是由一密闭容器组成的，容器中盛有工作液体，液体在特定的温度和压力下进行绝

热膨胀。由于在一定的时间间隔内(例如 50 ms)处于过热状态,液体不会马上沸腾,这时如果有高速带电粒子通过液体,在带电粒子所经轨迹上不断与液体原子发生碰撞而产生低能电子,因而形成离子对,这些离子在复合时会引起局部发热,从而以这些离子为核心形成胚胎气泡,经过不短于0.3 ms(一般为 1 ms)之后,胚胎气泡逐渐长大,就沿粒子所经路径留下痕迹。如果这时对其进行拍照,就可以把一连串的气泡拍摄下来,从而得到记录有高能带电粒子轨迹的底片,如图 14.3 所示。照相结束后,在液体沸腾之前,立即压缩工作液体,气泡随之消失,整个系统就很快回到初始状态,准备作下一次探测。工作液可用液氢或液氘,需在甚低温下工作;也可用液态碳氢有机物,如丙烷、乙醚等,可在常温下工作。大型气泡室容积可达 20 m³。

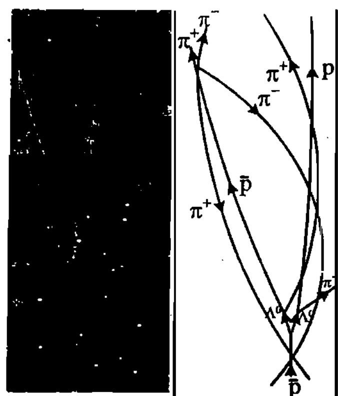


图 14.3　一对中性 Λ 粒子和反 Λ 粒子在氢泡室中产生和衰变的照片

气泡室的原理和膨胀云室有些类似,可以看成是膨胀云室的逆过程,但却更为简便快捷。它兼有云室和乳胶的优点。它和云室都可以按人们的意志在特定的时间间隔里靠特定的方法,以带电粒子为核心使气体凝结为液体,或者使液体蒸发形成气泡,从而留下粒子的径迹。它和乳胶相同的地方在于工作物质本身即可当作靶子。气泡室的优点更多,它的空间和时间分辨率高,工作循环周期短,本底干净、径迹清晰,可反复操作。但也有不足之处,那就是扫描和测量时间太长,体积有限,而且甚为昂贵,不适应现代粒子能量越来越高、作用截面越来越小的要求。用气泡室发现了 Σ^0,Ξ^0,Σ^+,Ω^- 等粒子以及几百种共振粒子。它还可用于探测各种类型粒子的衰变。

整个气泡室装置包括室本体及真空系统、压缩-膨胀系统、安全系统、热交换恒温系统、照明及照相系统、控制系统。由于物理测量的要求,还需要有一个庞大的磁铁系统(一般的常规磁铁或超导磁体)。后来又发展出了低温泡室、重液泡室、全息照相泡室、混合泡室等具有不同特性和功能的气泡室。

(3) 核乳胶

核乳胶是一种能记录单个带电粒子径迹的特制乳胶,由普通照相乳胶发展而来。其主要成分是溴化银微晶体和明胶的混合物。



图 14.4　乳胶中 π 介子的轨迹

射线能使照相乳胶感光,从而记录下粒子在其中的径迹。1939～1945 年间,英国科学家鲍威尔与其合作者提高了乳胶的灵敏度并增加了乳胶的厚度,使带电粒子通过乳胶时产生电离,乳胶在显影后呈现的黑色晶粒显示出带电粒子通过乳胶时留下的径迹(图 14.4)。如果事先用一系列已知能量和类别的带电粒子入射到核乳胶上,测得径迹长度-能量关系,则测量任一已知粒子径迹长度,就可以定出该粒子的能量。粒子在乳胶中运动,同原子碰撞而多次散射,改变运动方向,径迹常有折曲。根据径迹颗粒密度的大小和折曲程度,可以判别粒子种类并测定它们的速度。中性粒子不能直接形成径迹,但是它们可以产生次级带电粒子。通过对这些次级带电粒子径迹的测量,可以推算中性粒子的能量和数量。

由于宇宙射线具有很大的能量，当它们进入大气层并与大气层中的粒子发生碰撞时，失去能量并产生次级宇宙射线。鲍威尔等人设想将感光乳胶应用于宇宙射线的研究，他们把装有感光照片的气球放到高空中去记录宇宙射线的径迹。经过多次实验，他们拍摄了大量的宇宙射线在不同高度穿过乳胶的底片，并对底片中粒子留下的轨迹进行了仔细的分析。

1947 年 10 月，鲍威尔等人发表了《关于乳胶照相中慢介子轨迹的观测报告》的论文，全面总结了他们的宇宙射线实验结果，正式宣布他们发现了新粒子，并命名其为 π 介子。同时，他们指出，π 介子可以衰变为另一种介子（μ 介子）和中微子。经过详细的计算，得知 π 介子和 μ 介子的质量分别为电子质量的 273 倍和 207 倍。π 介子的发现，开创了物理学的一个新的分支学科——粒子物理学，鲍威尔被誉为粒子"物理学之父"。核乳胶在一段时间内成为粒子物理学研究的强有力的研究工具和给出新发现的得力技术。人们曾用核乳胶陆续发现了 π 介子、K^+ 介子、K^- 介子以及 Σ^+ 超子、反超子等新粒子，并对许多基本粒子的性质进行了大量研究。

核乳胶作为核物理实验中的径迹探测器，其优点是体积小、轻便，能将高能粒子的径迹永久保存等，其独特的空间分辨率适用于研究极短寿命粒子，常用于高空宇宙射线和基本粒子的研究；其缺点是根据径迹测量粒子能量时精确度较低。核乳胶技术近几十年来仍然在核探测领域发挥着作用，或者把核乳胶室装载在高空气球或火箭上进行原初宇宙线的测量。

14.1.2 物质的天然放射性

在伦琴发现 X 射线的启发下，很多科学家试图研究和发现新射线。1896 年 3 月，贝克勒尔发现，与双氧铀硫酸钾盐放在一起但包在黑纸中的感光底板被感光了。他推测这可能是因为铀盐发出了某种未知的辐射。同年 5 月，他又发现纯铀金属板也能产生这种辐射，从而确认了这种射线是从铀中发出的。居里夫妇后来将这一现象称为**"放射性"**，这是第一次发现了物质的天然放射性。在进行了大量艰苦而细致的研究工作之后，居里夫妇于 1898 年终于从沥青铀矿石中分离出了放射性元素钋（Po）和镭（Ra）。

卢瑟福于 1898 年发现铀和铀的化合物所发出的射线有两种不同的类型：一种是易被吸收的，他称之为**α 射线**；另一种有较强的穿透能力，他称之为**β 射线**。到了 1903 年，卢瑟福根据这两种射线在磁场中径迹的偏转情况，证明了 α 射线的成分是氦的原子核，而 β 射线的成分是电子。1900 年法国化学家维拉尔在研究铀和镭的放射性时，又发现了具有更强穿透本领的第三种射线，卢瑟福将其称为**γ 射线**，1913 年的实验研究表明，这种射线不会在磁场中发生偏转，无法测量其质量，但是可以在晶体中发生衍射，这是一种波长极短的电磁辐射。

物质的放射性以及发出的各种射线，后来成为核物理研究的重要手段。

14.1.3 原子核的组成

1. 质子的发现

1919 年，担任卡文迪许教授的卢瑟福发现，用 α 粒子轰击氮，能释放出氢离子。

卢瑟福使用的实验装置如图 14.5 所示，真空容器中有可以发出 α 粒子的放射源，在窗口的一侧放有铝箔，另一侧是荧光屏。如果有粒子透过铝箔射到荧光屏上，则可以通过显微镜观察到荧光屏上的闪烁。卢瑟福实验中所用的放射源是 RaC′，它所发出的 α 射线在标准空气中的射程是 7 cm，一定厚度的铝箔可以等效于标准空气层的厚度。适当选取铝箔的厚度，使容器抽成真空后，α 粒子恰好被铝箔吸收而不能透过。然后打开阀门，向真空室中通入氮气，这时，观

察到了荧光屏上的闪烁；而把氮气换成氧气或二氧化碳，观察不到闪烁。实验测得 α 射线在标准氮气中的射程可达到 40 cm。这表明闪烁一定是 α 粒子击中氮核后产生的新粒子透过铝箔引起的。卢瑟福把这种粒子引进电场和磁场中，根据它在电场和磁场中的偏转，测出了它的电荷和质量，确定它就是氢离子，即$^{1}_{1}$H。

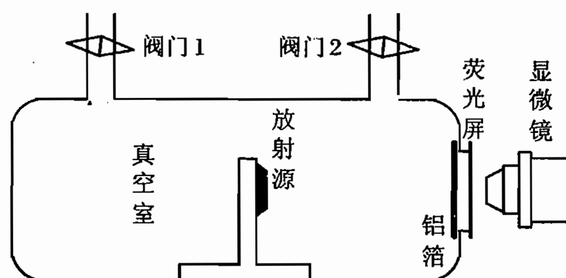
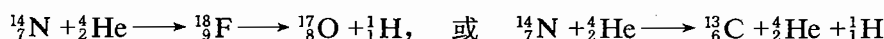


图 14.5 卢瑟福发现质子的实验装置

卢瑟福分析，上述实验可能有两种不同的过程，即



$$^{14}_{7}\mathrm{N}+^{4}_{2}\mathrm{He}\longrightarrow ^{18}_{9}\mathrm{F}\longrightarrow ^{17}_{8}\mathrm{O}+^{1}_{1}\mathrm{H},\quad \text{或}\quad ^{14}_{7}\mathrm{N}+^{4}_{2}\mathrm{He}\longrightarrow ^{13}_{6}\mathrm{C}+^{4}_{2}\mathrm{He}+^{1}_{1}\mathrm{H}$$

由于反应的产物太少，无法作有效的化学分析或光谱分析，于是当时在卢瑟福实验室工作的布莱克特将威尔逊云室进行了改进。在 1924 年，布莱克特以 1 张/15 秒的速度拍摄了 23 000 多张 α 粒子轰击氮的照片，共记录了 415 000 多条粒子的径迹，他发现其中细的是 α 粒子，粗的是较重的原子。布莱克特注意到其中有 8 条出现了分叉，如图 14.6 所示，表明一个较重的原子分成了两个粒子，这就说明，α 粒子与氮复合形成了氟，复合后的氟再发射一个氢离子（即氢原子核）而变为氧，即上述第一式所反映的过程。

氢离子就是氢的原子核。这是由于 α 粒子将氮原子核击碎而释放出来的。由于氢原子核是最轻的核，所以原子核应当是由这样的氢原子核所组成的，卢瑟福将氢的原子核称为**质子**，以符号$^{1}_{1}$P 表示，即带有 1 个单位的正电荷，质量数是 1。

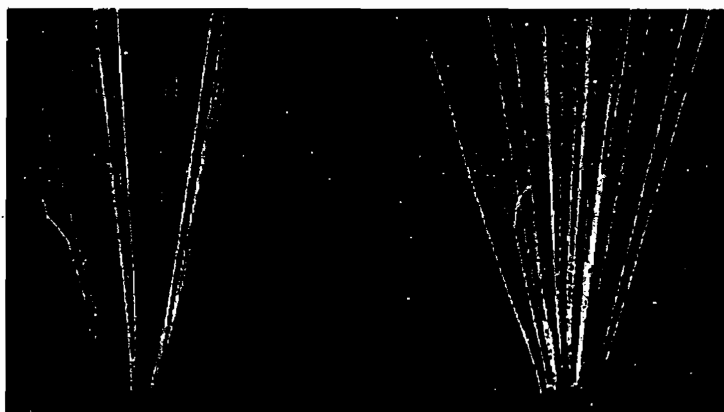


图 14.6 布莱克特拍摄的证实质子反应过程的云室径迹

2. 中子的发现

由于从原子中可以发出 β 射线，而 β 射线是由电子组成的，所以在当时，人们认为原子核是由质子与电子构成的。按照这一想法，原子序数为 Z、质量数为 A 的原子核，应当包含 A 个质

子和 $A-Z$ 个电子，这就是原子核的**质子-电子模型**。这样虽然可以解释原子的电中性以及原子的质量，但也面临着以下困难：

第一，由于核的大小只有 fm(1 fm $=10^{-15}$ m)的量级，根据量子力学的不确定关系，可以算出被束缚在核内的电子的动能为 $\langle E_k\rangle_{\min}=\dfrac{\hbar^2}{8m_e\Delta x^2}$，对这一结果作简单的估算，则有

$$\frac{\hbar^2}{8m_e\Delta x^2}=\frac{1}{8\Delta x^2}\frac{(\hbar c)^2}{m_e c^2}=\frac{1}{8\Delta x^2}\frac{197^2}{0.511}\approx\frac{10^5}{\Delta x^2}\quad(\mathrm{fm}^2\cdot\mathrm{MeV})$$

通常情况下会超过 GeV 的量级，而核中的电场却不足以将能量如此高的电子束缚在原子核内；而且，如果假设 β 射线就是来源于核中的电子，则其能量也应该与上述量级相当，但 β 射线的能量通常不会超过几兆电子伏，在实验上从来没有发现能量这样高的 β 射线。

第二，由于可以通过对原子的超精细结构光谱的分析而得到原子核的自旋，实验表明，只有一个质子的氢原子的核自旋量子数为 1/2，对于氘核，应当是由两个质子和一个电子构成，则核的总自旋量子数应当为 1/2 或 3/2，而实验发现，氘核的自旋量子数为 1。

1930 年，波特和他的学生贝克用钋发出的 α 粒子轰击金属铍(Be)，发现会产生一种穿透本领极强的中性射线，他们认为这是 γ 射线。1932 年，约里奥-居里夫妇对波特发现的射线作了进一步的研究，结果发现这种射线打在石蜡上，会发射出质子。对质子在标准空气中的射程进行测量，可以推算出质子的能量为 5.2 MeV。他们认为这是由于上述射线与石蜡中的质子发生了散射，将质子打出，就像康普顿效应中 X 射线将电子从石墨中打出一样。由此他们推算出上述射线(即他们认为的 γ 射线)的能量为 50 MeV。这样的能量比当时已知的所有放射源所发出的 γ 射线的能量都要大得多。当时在卢瑟福实验室工作的查德威克读到了居里夫妇的论文并将结果告诉卢瑟福时，卢瑟福表示根本不相信。卢瑟福一直认为原子核中存在一种质量与质子接近的中性粒子，但苦于没有实验上的证据。于是查德威克在居里夫妇实验的基础上又进行了更仔细深入的研究。他首先采用图 14.7 的装置测量铍射线使物质电离的情况。图中左侧是一个放有钋放射源和铍的容器，右侧是一个电离室，其中可以分别充入氮、氢等气体。电离室的窗口前可以放各种材料做成的薄片，也可以放石蜡。钋发出的 α 粒子轰击铍，使其发出射线。这种射线打到电离室前的材料上，从其中打出质子，质子进入电离室，与其中气体的原子核发生碰撞。由于碰撞过程中能量和动量的传递，原子核产生反冲运动，反冲的原子核导致气体电离，产生离子对，电离室与放大器、示波器相连，就可以测量出所产生的离子对的数目。由这一数据可以计算出反冲原子核的能量，进而按照碰撞过程中动量守恒、能量守恒的原理计算出进入电离室的质子的动能，查德威克算得质子的速度为 3.3×10^9 cm/s，相应的能量为 5.7×10^6 eV。

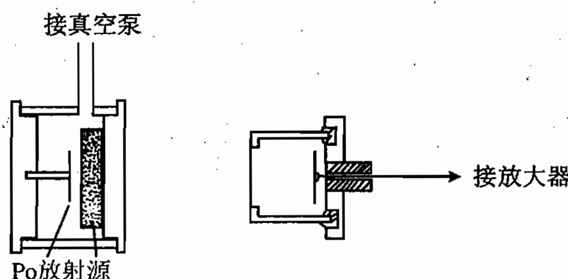


图 14.7　查德威克发现中子的实验装置

查德威克也用膨胀云室测量了铍发出的射线与原子核碰撞使得原子核产生的反冲，膨胀云室中反冲原子的径迹可以用照片记录，根据径迹的长度可以计算出反冲原子的最大速度和动能，从而计算出铍射线的量子动能。结果是，氮原子的反冲速度至少为 4×10^8 cm/s，相应的能量为 1.2×10^6 eV。在这种情况下，如果认为铍射线是 γ 射线（查德威克称之为量子辐射），则其能量要高达 55×10^6 eV 或 90×10^6 eV。而且，如果反冲原子越重，则 γ 射线的能量就越大，这显然是不对的。

因此，查德威克认为铍射线是一种质量与质子接近、净电荷为 0 的粒子，正如卢瑟福 1920 年在巴克里安的演讲中所讨论的"中性粒子"，就是中子。实验显示，铍射线就是中子从石蜡中打出的质子，最大速度为 3.3×10^9 cm/s，这也是与质子碰撞的中子的最大速度，按这一结果计算，氮原子的速度为 4.4×10^8 cm/s，相应的能量为 1.4×10^6 eV，在空气中的射程为 3.3 mm，可以产生 40 000 个离子对。类似地，氩原子可获得 0.54×10^6 eV 的能量，产生 15 000 个离子对，这都与实验符合得很好。因此证明了中子的存在，中子的质量是 1.005～1.008 u（原子质量单位，见 14.1.5 小节）。

由于中子的质量比质子和电子的质量之和略小，因此查德威克进一步设想，中子是由一个质子和一个电子以紧密结合的方式组成，是一个很小的电偶极子；原子核是由质子、中子和 α 粒子（甚至有可能是尤里所发现的氢的同位素的原子核）构成的。

后来的研究显示，无法证明中子含有质子和电子，而且也证明 α 粒子可以分裂，并不是构成原子核的基本单元。因此海森伯提出：原子核是由质子和中子这两种粒子组成的。

【例 14.1】 查德威克发现中子的有关实验数据为：铍射线与质子和氮核碰撞，使其反冲，质子的速度为 $v_p=3.3\times10^9$ cm/s，动能为 5.7×10^6 eV；氮核的速度为 $v_N=4.7\times10^8$ cm/s，动能为 1.2×10^6 eV。据此证明铍射线不是光子，而是中子，并计算中子的质量。

解 题中所给的是反冲粒子所获得的最大动能，当入射粒子与原子核对心碰撞时，才能使原子核获得最大的反冲。因而，只需根据对心碰撞计算即可。

若假设射线为光子，碰撞过程的能量守恒与动量守恒方程分别为

$$\begin{cases} h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2 \\ \dfrac{h\nu}{c} = -\dfrac{h\nu'}{c} + mv \end{cases}$$

其中，$m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$。由此可得碰撞后光子的频率为

$$\nu' = \frac{\nu}{2h\nu/(m_0c^2)+1}$$

反冲核的动能为

$$T = mc^2 - m_0c^2 = h\nu - h\nu' = h\nu\left[1-\frac{1}{2h\nu/(m_0c^2)+1}\right]$$

由此得到

$$(h\nu)^2 - Th\nu - \frac{T}{2}m_0c^2 = 0$$

解得

$$h\nu = \frac{T\pm\sqrt{T^2+2Tm_0c^2}}{2} = \frac{T}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2m_0c^2}{T}}\right)$$

对于氢核，$m_0c^2=938$ MeV，反冲动能为 $T=5.7$ MeV，入射光子的能量为 $h\nu=55$ MeV；

对于氮核，$m_0c^2 = 14 \times 938$ MeV，反冲动能 $T = 1.2$ MeV，入射光子的能量为 $h\nu = 90$ MeV。

由于是同一种射线，射线的能量不可能有如此大的差别，因而假设铍射线是光子，是不对的。只能认为铍射线是有质量的中性粒子。

上述分析过程与第 13 章中康普顿散射的分析是相同的。

若不考虑相对论效应，设中子质量为 m，速度为 v，与质量为 M 的核正碰，则动量守恒与能量守恒方程分别为

$$\begin{cases} mv_n = mv'_n + Mv \\ \dfrac{1}{2}mv_n^2 = \dfrac{1}{2}mv'_n + \dfrac{1}{2}Mv^2 \end{cases}$$

解得 $2mv_n = mv + Mv$，从而与氮核或氢核碰撞时，有

$$2mv_n = mv_p + M_p v_p = mv_N + M_N v_N$$

解得

$$m = \frac{M_N v_N - M_p v_p}{v_p - v_N} = 1.15\,\text{u}$$

这就是中子的质量。

14.1.4　原子核的大小

可以用卢瑟福的 α 粒子散射实验测量原子核的大小，即让动能尽可能大的 α 粒子射向金属箔，根据测量到的散射角最大的 α 粒子来计算粒子到原子核的最近距离，以此作为原子核的大小。当然，也可以用其他高能粒子代替 α 粒子进行实验。或者利用其他方法测量原子核的大小。

由于散射实验表明原子核的形状是球形的，所以可以用球半径，即核半径表示原子核的大小。不同的原子，核的大小不同，核半径与原子的质量数（原子量）之间的关系可以用经验公式表示为

$$R = r_0 A^{1/3} \tag{14.1}$$

式中，r_0是一个常数。由于实验上是通过粒子散射的方式来测量原子核的半径的，所以结果只能反映核与入射粒子间的相互作用情况，因而根据相互作用的不同，核半径有两种定义：

(1) 核力作用半径　实验表明，当入射 α 粒子的动能足够高时，α 粒子的散射不符合卢瑟福散射公式，说明当 α 粒与核的距离很近时，粒子与原子核之间的作用除了库仑斥力之外，还有很强的吸引力，这种吸引力称作核力。实验表明，核力是一种短程作用力，有一个作用半径，在作用半径之外，核力几乎等于 0。目前测量到的核力的作用半径为 $r_0 \approx 1.4 \times 10^{-15}\ \text{m} = 1.4\ \text{fm}$。

(2) 电荷分布半径　根据实验的结果，可以推算出原子核内电荷分布的情况。原子核中电荷密度与到核中心的距离有关，在原子核的中央部分，电荷密度没有明显的变化，而靠近边缘部分，电荷密度逐渐降低，因此，将电荷密度从 90% 下降到 10% 的区域称作**原子核的边界**，而电荷密度为中心处密度 50% 处的距离称作原子核的半径，则电荷分布半径为

$$R = (1.1 \sim 1.2) \times A^{1/3} \quad (\text{fm}) \tag{14.2}$$

由此可以计算出原子核的质量密度为

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Am_N}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m_N}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \tag{14.3}$$

其中，m_N是一个核子的平均质量，$m_N=1.66\times10^{-27}$ kg，可以算出，$\rho=1.4\times10^{17}$ kg/m^3，这一数值比地球上密度最大的物质要大 10^{13} 倍，而且可以看出，不同的原子核，其密度几乎是相同的。

据最新的报道，Argonne，Chicago，GANIL，Windsor（Canada），Los Alamos 等五个单位的研究团队利用能量为 1 GeV 的碳-13 轰击碳靶来制造氦-8 原子。他们利用氦-4、氦-6、氦-8 的原子光谱中的细微差距来决定这些同位素的电荷半径。结果发现，氦-8 的电荷半径为 1.95 fm，小于氦-6 的 2.068 fm。

上述实验中，氦-8 含有 2 个质子和 6 个中子，由此算得该原子核的质量密度为 4.23×10^{17} kg/m^3。与估算的结果是同一个数量级。

对我们来说，这样大的质量密度是惊人的，因为地球上物质的质量密度最大的也就在 10^4 kg/m^{3}量级。这当然是由于原子的质量集中在原子核。原子大小的量级是 $10^{-10}\sim10^{-9}$ m，则原子核的体积只有原子体积的 10^{-15}，所以核的质量密度比原子的质量密度约大 10^{15} 倍也就不足为怪了。

14.1.5 原子核的电荷与质量

1. 原子核的电荷

原子是电中性的，原子核中的每个质子带有一个单位的正电荷，而中子是电中性的，因此原子核所带的总的正电荷数与其核外电子所带的总的负电荷数相等。

2. 原子核的质量

经过仔细的实验测量，已经知道了原子核中各种核子的质量。其中质子的质量为

$$m_p = 1.672\,621\,71(29)\times10^{-27}\text{ kg}$$

中子的质量为

$$m_n = 1.674\,927\,29(28)\times10^{-27}\text{ kg}$$

除可以用标准单位制表示微观粒子的质量之外，在原子物理的范围内，还常常采用原子质量单位(符号为 u)，即规定碳的同位素中性原子(即碳-12，含有 6 个质子和 6 个中子)处于基态时的静止质量为 12 个原子质量单位(12 u)，则可以算出

$$1\text{ u} = 1.660\,540\,2(10)\times10^{-27}\text{ kg}$$

按照这一规定，质子和中子的质量也可以分别表示为

$$m_p = 1.007\,276\,466\,88(13)\text{ u}$$

$$m_n = 1.008\,664\,915\,6(6)\text{ u}$$

则每个原子核的质量应当等于其中所有质子与中子的质量之和。但实际上，由于核子之间有结合能，依据爱因斯坦质能关系，核的质量要小于其中所有核子的质量之和。

例如，一个质子与一个中子的质量之和为

$$m_p + m_n = 2.015\,942\text{ u}$$

而氘核的质量为

$$m_d = 2.013\,552\text{ u}$$

它们之间的质量相差

$$m_p + m_n - m_d = 0.002\,390\text{ u}$$

按照爱因斯坦质能方程 $E=mc^2$，也可以将上述质量用相应的能量表示，即

$$1\,\text{u} = 931.494\,043\ \text{MeV} \cdot c^{-2}$$
$$m_p = 938.272\,03(8)\text{MeV} \cdot c^{-2}$$
$$m_n = 939.565\,36(8)\text{MeV} \cdot c^{-2}$$
$$m_d = 1\,875.6280(53)\text{MeV} \cdot c^{-2}$$

于是氘核中质子与中子的结合能为

$$m_p + m_n - m_d = 2.225\ \text{MeV}$$

精确的实验已经证明，质子与中子结合成氘核时，释放出 2.225 MeV 的能量；当用能量为 2.225 MeV 的光子（γ 射线）照射氘核时，一个氘核会分裂为中子和质子。

实际上，原子的质量也比组成该原子的所有质子、中子、电子的质量要小，而分子的质量要小于组成分子的原子的质量之和。

氢原子的质量为

$$m_H = 1.007\,94\ \text{u} = 938.890\ \text{MeV} \cdot c^{-2}$$

电子的质量为

$$m_e = 0.510\,998\,918(44)\ \text{MeV} \cdot c^{-2}$$

在很多情况下，可以直接用能量表示质量。例如，常说电子的质量是 0.511 MeV，这时，不必再特别提及质能关系中的光速因子 c^{-2}。

14.1.6 核素

原子核由质子和中子组成，质子、中子被海森伯称作核子。不同的质子和中子的组合，可以构成不同的原子核。例如，同位素就是具有相同质子数而不同中子数的原子。每一种原子核即核中质子和中子的组合就是一种核素。

每一种核素可以用符号 ${}^{A}_{Z}X_N$ 表示，其中 N 为中子数，Z 为质子数，$A=N+Z$ 为核子数，即质量数，而 X 为元素的符号。元素周期表是按照元素符号 X 排列的。

按构成上不同的特点，核素可分为几类，如表 14.1 所示。

表 14.1　各种类型的核素

名称	特征	实例
同位素	具有相等的质子数、不同的中子数	${}^{12}_{6}C$，${}^{13}_{6}C$
同中子素	具有相等的中子数、不同的质子数	${}^{13}_{6}C$，${}^{14}_{7}N$
同量异位素	具有相等的质量数	${}^{17}_{7}N$，${}^{17}_{8}O$，${}^{17}_{9}F$
镜像核	中子数与质子数互换	${}^{3}_{1}T$，${}^{3}_{2}He$
同核异能素	质量数、中子数相同，而能级结构不同	${}^{99}_{43}Tc$

可以将各种核素按照质子数、中子数的不同制成一张图表，这就是**核素图**。核素图的横坐标通常是中子数 N，纵坐标通常是质子数 Z，如图 14.8 所示。

目前在核素图上，共有 2 000 多个核素，其中包含有天然核素 300 多个（其中 280 种是稳定的核素，60 多种是寿命很长的放射性核素）；人工制造的核素 1 600 多种（都是放射性核素）。

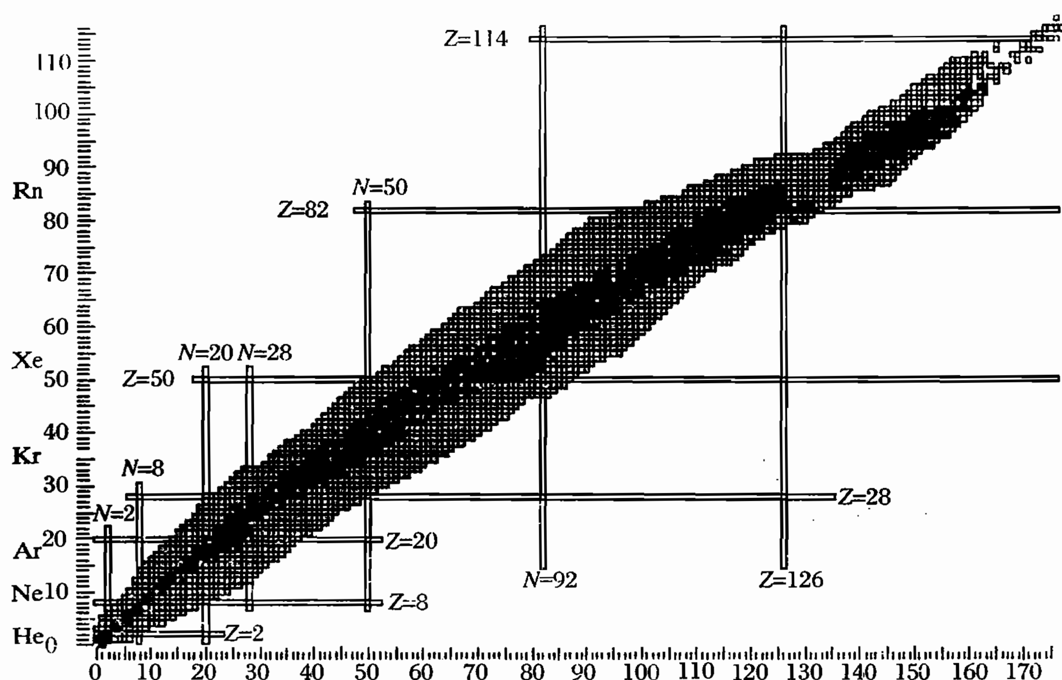


图 14.8 核素图

从核素图中可以看出，稳定的核素几乎都处于一条光滑的曲线上，或位于这条光滑曲线的两侧，这就是核素的稳定区。对于轻核，上述曲线与 $N=Z$ 的直线重合，即稳定核素多是 $N=Z$ 的核素；对于重核，上述曲线向 $N>Z$ 方向逐渐偏移，说明较重的稳定核中，中子数逐渐多于质子数。

14.1.7 原子核的结合能

核子结合为原子核时，会有能量释放，这就是**原子核的结合能**。按照爱因斯坦质能关系，结合能可以根据所有核子的质量和与原子核的质量差计算出来，即

$$B(Z,A) = [Zm_p + (A-Z)m_n - m(Z,A)]c^2 \tag{14.4}$$

式中，$B(Z,A)$为核的结合能，Zm_p 为 Z 个质子的质量和，$(A-Z)m_n$ 为 $A-Z$ 个中子的质量和，$m(Z,A)$为原子核的质量。

由于已知的大多是原子的质量，而原子的质量中还包括电子的质量，所以，利用上式计算结合能时，$m(Z,A)$用原子的质量代替，而 Zm_p 用 Z 个氢原子的质量$m(^1\text{H})$代替。

一般地，**原子的结合能**等于核质量 $m(Z,A)$加核外电子的质量减去该**原子的质量** $M(Z,A)$，从而可以得到

$$m(Z,A) = M(Z,A) - Zm_e + \frac{B(Z)}{c^2} \tag{14.5}$$

其中，$B(Z)$为${}^A_Z\text{X}_N$ 原子的结合能，即电子与原子核结合为原子所释放的能量。

考察氢原子的情况，由于**氢原子的结合能** $B(^1\text{H})/c^2$ 等于质子的质量 m_p 加上电子的质量 m_e 减去氢原子的质量 $m(^1\text{H})$，于是可以得到

$$Zm_p = Zm(^1\text{H}) - Zm_e + \frac{ZB(^1\text{H})}{c^2} \tag{14.6}$$

将式(14.5),(14.6)代入式(14.5),得到

$$B(Z,A) = [ZM(^1\text{H}) + (A - Z)m_n - M(Z,A)]c^2 + ZB(^1\text{H}) - B(Z)$$

而

$$B(^1\text{H}) = 13.6\text{ eV},\quad B(Z,A) \approx 15.73Z^{7/3}\text{ eV}$$

相对于原子核的结合能都是很小的数值,可以忽略,于是得到

$$\begin{aligned} B(Z,A) &= [ZM(^1\text{H}) + (A - Z)m_n - M(Z,A)]c^2 \\ &= \Delta M(Z,A)c^2 \end{aligned} \tag{14.7}$$

式中

$$\Delta M(Z,A) = ZM(^1\text{H}) + (A - Z)m_n - M(Z,A) \tag{14.8}$$

为组成原子核的核子的质量和与该原子核的质量之差,称作原子核的**质量亏损**。根据质量亏损的数据,可以方便地算出原子核的结合能 $B(Z,A)$。

上述结合能 $B(Z,A)$除以原子核中核子的数目 A,所得到的结果 B/A 称为核子的**平均结合能**,也称作**比结合能**。图 14.19 就是根据实验和理论计算画出的核子的比结合能曲线。

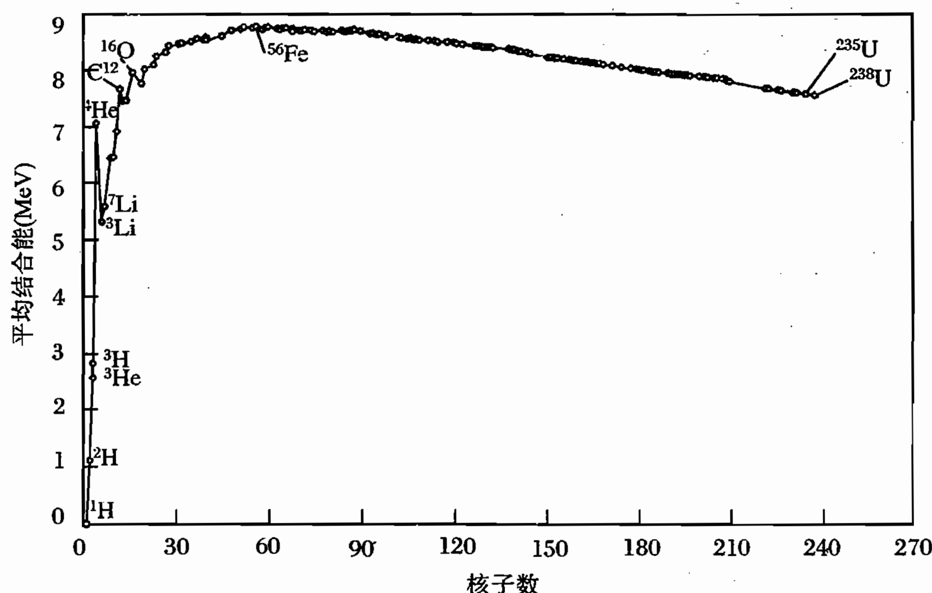


图 14.9　核子的平均结合能

从图中可以看出,当核子数很小时($A<30$),比结合能随着 A 的增大明显增大,然后进入一个缓慢增长区($50<A<120$),到达最大值之后,开始缓慢下降,这一区域的比结合能约为 8 MeV/ N_u,最大的数值约为 8.5 MeV/N_u。$A>120$ 的原子核,其比结合能要小于 8 MeV/ N_u。结合能的数值越大,表示核子间的结合越紧密,即原子核的能量越低。也就是各个独立的核子结合为原子核时,所释放出的能量越大。如果重核分裂为两个中等质量的核,或两个轻核聚合成为一个质量较大的核,将会释放出明显的能量,例如,^{2}H 的比结合能约为 1.11 MeV/N_u,^{235}U 的比结合能约为 7.6 MeV/N_u。核武器以及核能的利用,都是基于这样的事实。

14.2 核　　力

原子核由质子和中子组成，实验表明，核子之间的结合是很强的，原子核的密度可以达到 10^{14} g/cm^3，这说明在核子之间存在着很强的吸引力，这就是**核力**。

通过用各种实验方法对核力进行研究，发现核力主要有以下性质。

14.2.1 核力的概念

1. 核力是短程力

在原子核之外的区域，没有发现核力的存在。例如，在 α 粒子散射实验中，当 α 粒子与核之间的距离只有 10^{-14} m 时，两者之间的作用仍然是库仑斥力，没有受到核力的影响。这说明核力只存在于几飞米的范围内。另外，对于核子数很大的重核，较稳定的核素是那些中子数多于质子数的核素，说明核力的作用范围有限，当核子间隔较大时，核力已不足以克服库仑斥力将其结合在一起，所以只有中子数较多而库仑斥力小得多的核素才是稳定的。这些证据足以说明核力是一种**短程作用力**。

2. 核力具有饱和性

另外的实验事实是，如果核力是一种与库仑力相似的长程作用力，可以作用于核内每一个核子上，则核子的结合能应正比于核子的成对数，即正比于 $A(A-1)$，也即正比于 A^2，但实验的结果却是结合能正比于 A，即正比于核的体积。这就说明核力仅仅是近邻核子之间的短程作用力，而且具有**饱和性**。这一点，与液体分子之间的相互作用类似，液体分子，例如水分子、乙醇分子，由于具有极性而在分子之间产生氢键，这是一种范德瓦耳斯力，只能作用于近邻有限数目的分子，具有饱和性。

3. 核力是一种强相互作用力

与自然界中普遍存在的万有引力和库仑力相比，核力要大得多。质子之间距离很近，所以库仑斥力是相当大的，而核力却能将质子紧紧地束缚在一起，说明核力比库仑力大得多。可以作一个估算，核子之间由于万有引力而产生的势能只有 10^{-36} MeV，质子和中子间由于自旋磁矩而产生的磁作用势能也只有 0.03 MeV，当质子间距离为 2 fm 时，库仑排斥势能为 0.72 MeV，而核子间的结合能约为 8 MeV，所以核力比万有引力、库仑力都大得多。实验表明，核力比库仑力大 100 倍以上，是一种**强相互作用力**。

4. 核力与电荷无关

实验表明，质子与质子之间、质子与中子之间、中子与中子之间的近程相互作用是相似的，说明核力与核子所带的电荷无关。

5. 核力在极短程范围内存在斥心力

实验证明，当核子之间靠得很近时，有很大的排斥力。例如，从质子与质子的散射实验结果，可以推算出两者之间的相互作用势能如图 14.10 所示。即如果核子的间距为 0.8～2 fm，则相互间有吸引力；如果间距小于 0.8 fm，则相互间有排斥力；如果间距大于 10 fm，就超出了核力的作用范围。

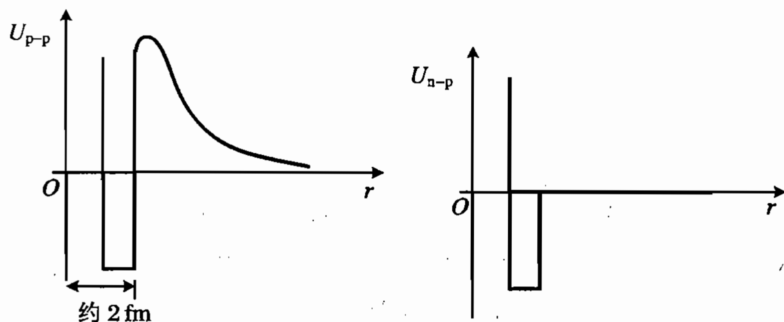


图 14.10　核子间的作用势能

6. 核力有少量的非中心力成分

从实验事实推断，核力主要是有心力，除此之外，还有较微弱的非有心力，非有心力的强度与核子间的距离等因素有关，目前还不是特别清楚。

14.2.2　核力的介子理论

万有引力、库仑力都是通过场起作用的。以前，我们并没有仔细深入地探讨这类力的起源，而通常认为这类力是一种超距作用。但是，现在有一种观点，即从量子电动力学出发，可以认为带电粒子之间的相互作用是交换“**虚光子**”的结果。

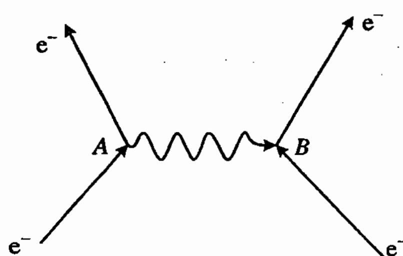


图 14.11　两个电子通过交换虚光子实现相互作用

例如，两个运动的电子，由于相互之间库仑力的作用，各自的运动状态都会发生改变。可以设想，两者之间的相互作用是这样进行的：其中一个电子发射出一个光子，因而电子由于反冲而改变了原有的运动状态；发出的光子被另一个电子吸收，因而该电子的运动状态也被改变，如图 14.11 所示。两个电子不断通过交换光子，就可以实现相互作用。在上述过程中任一时刻，动量是守恒的，但两个电子所组成的体系不是能量守恒的，因而这种光子不满足能量守恒条件，所以是虚光子。

1935 年，日本物理学家汤川秀树提出了核力的**介子理论**，他认为同带电粒子交换虚光子类似，核力也是一种交换力，即核子之间通过交换一种媒介粒子而发生相互作用。设一个核子所释放的虚粒子在经过一段距离 Δx 后被另一个核子吸收，这一时间间隔为 Δt，并设虚粒子以光速 c 前进，则它所经过的路程最大为 $c\Delta t$。根据不确定关系，在这一段时间内，虚粒子的最大能量为

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{\hbar c}{\Delta x}$$

如果这些能量全部转化为虚粒子的静止能量，即

$$\Delta E = mc^2$$

可以得到

$$m = \frac{\hbar}{\Delta x c}$$

如果是电磁相互作用，力程为无限大，即 $\Delta x = \infty$，则得到 $m = 0$，即虚粒子的静止质量为 0，

这就是光子。

对于核子之间的相互作用，力程 Δx 是有限的数值。例如，$\Delta x=2\,\text{fm}$，得到 $\Delta E=100\,\text{MeV}$，约为电子静止质量的 200 倍。由于核子的质量介于质子和电子之间，故称之为**介子**。

后来人们试图从实验上找到这种介子，在 1936～1937 年间，找到了 μ 介子，它的质量为 $207m_e$，但是后来发现它与核子的相互作用很弱，不参与强相互作用，这不可能是汤川秀树所预言的介子。到 1947 年，人们终于找到了参与强相互作用的 π 介子，并发现 π 介子分为三种，分别记为 π^+, π^-, π^0，质量分别为 $m(\pi^+)=m(\pi^-)=273.3m_e$，$m(\pi^0)=264m_e$。可以用图 14.12表示上述三种介子在强相互作用中所起的作用。

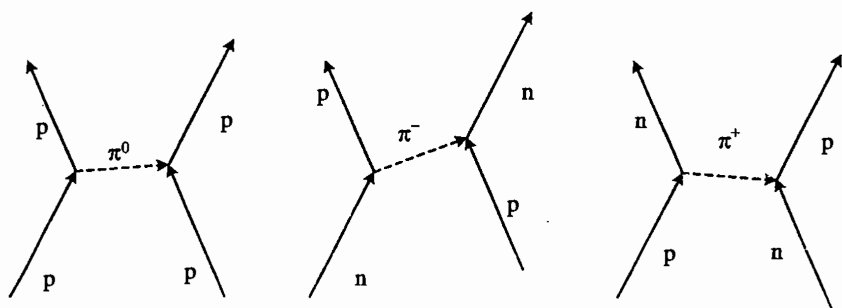


图 14.12 π 介子传播核力

14.3 放射性核衰变

一些原子序数较高的重元素，其原子核不很稳定，可以自发地放射出射线而转变为另一种元素的原子核，这种现象称作**放射性衰变**。还有一些人工制造的原子核，也具有放射性。

14.3.1 放射性衰变的一般规律

1. 放射性衰变的模式

自从 1896 年贝克勒耳发现铀的放射性以来，人们已经发现了多种放射性的衰变模式，见表 14.2。

衰变发生之前的原子核称作**母核**，发生衰变之后的核则称作**子核**。

2. 放射性的指数衰变律

原子核发生衰变后，将变为其他核，同时放出粒子。单位时间内发生衰变的原子核数 $-\mathrm{d}N$ 与现存的原子核数成正比，即在 Δt 时间内核衰变的数目为

$$-\mathrm{d}N=\lambda N\mathrm{d}t \tag{14.9}$$

其中，λ 是比例常数。对上式积分，得到

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{14.10}$$

其中，N_0 就是 $t=0$ 时刻原子核的数目。将式(14.9)改写为

$$\lambda=\frac{-\mathrm{d}N/\mathrm{d}t}{N}$$

这表示单位时间内发生衰变的原子核在所有原子核中所占的比例，因此比例常数 λ 就是一个原子核单位时间内发生衰变的概率，λ 的量纲是 1/[时间]，称作**衰变常数**。

放射性衰变的指数律是一个统计规律，它可以反映出某种放射性核素在某一时刻衰变的概率，但却无法预言到底是哪一个核在什么时候发生衰变。

表 14.2　各种放射性的衰变模式

衰变类型	衰变模式	参与衰变的粒子	子核或剩余核
释放出核子的衰变	α 衰变	放出 α 粒子，即氦核($A=4$, $Z=2$)	$(A-4, Z-2)$
	质子放射，p 衰变	放出质子	$(A-1, Z-1)$
	中子放射	放出中子	$(A-1, Z)$
	双质子放射	同时放出 2 个质子	$(A-2, Z-2)$
	自发裂变	核自发分裂为 2 个或更多个更小的原子核以及其他粒子	
	结团衰变	放出比 α 粒子大或小的核子结团(A_1, Z_1)，例如 ^{14}C 放射	$(A-A_1, Z-Z_1)$ $(A+A_1, Z+Z_1)$
β 衰变	β^- 衰变	放出 1 个电子，同时放出 1 个反中微子	$(A, Z+1)$
	β^+ 衰变	放出 1 个正电子，同时放出 1 个中微子	$(A, Z-1)$
	电子俘获	原子核俘获 1 个核外(轨道)电子，同时放出 1 个中微子，并使剩余核处于不稳定激发态	$(A, Z-1)$
	双 β^- 衰变	放出 2 个电子、2 个反中微子	$(A, Z+2)$
	双电子俘获	原子核俘获 2 个核外(轨道)电子，同时放出 2 个中微子，并使剩余核处于不稳定激发态	$(A, Z-2)$
	正电子发射电子俘获	原子核俘获 1 个核外(轨道)电子，同时放出 1 个正电子、2 个中微子	$(A, Z-2)$
	双 β^+ 发射	放出 2 个正电子、2 个中微子	$(A, Z-2)$
同一核能级间跃迁的衰变	γ 衰变	释放 1 个高能光子，即 γ 粒子	(A, Z)
	内转换	原子核将能量传给核外(轨道)电子，使其电离	(A, Z)

3. 半衰期

数量为 N 的某种放射性核素，经过一定的时间后，数量将会减少。减少到原有数量一半所需要的时间，称为**半衰期**，通常记为 $T_{1/2}$。根据式(14.10)，可以得到 $1/2=e^{-\lambda T_{1/2}}$，于是有

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}\approx\frac{0.693}{\lambda} \tag{14.11}$$

不同的核素具有不同的衰变常数，即半衰期，而且每一种核素的半衰期几乎不会因为环境和时间的改变而出现变化。这一点对于其应用是十分有利的。

例如，目前我们估算地球的年龄就是用了放射性衰变的方法。地球上的铀矿中含有 ^{235}U

和^{238}U，这是两种放射性同位素，其中^{235}U的半衰期（0.70×10^9 a）要比^{238}U（4.5×10^9 a）短一些。现在地球上铀矿中^{238}U占到99.3%，而^{235}U仅占0.72%。如果假设在地球刚刚生成时，这两种核素的含量是相等的（如果地球是以“大爆炸”或其他剧烈的方式生成的，这种假设是合理的），则可以得到

$$\frac{N_{235}}{N_{238}}=\frac{e^{-\lambda_{235}t}}{e^{-\lambda_{238}t}}=e^{(\lambda_{238}-\lambda_{235})t}$$

$$t=\frac{1}{\lambda_{235}-\lambda_{238}}\ln\frac{N_{238}}{N_{235}}$$

$$=\frac{1}{\ln[1/T_{1/2}(^{235}\mathrm{U})-1/T_{1/2}(^{238}\mathrm{U})]}\ln\frac{N_{238}}{N_{235}}=5.9\times10^9\quad(\mathrm{a})$$

其中，符号a在放射性衰变中代表“年”。地球已经存在（指从开始形成至今）了约60亿年。

4．平均寿命

同一类放射性核素中，有的先发生衰变，而有的后发生衰变，存在的时间各不相同。但从统计的角度，可以计算它们的**平均寿命**。设开始时刻，即$t=0$时刻核素的数目为N_0，在t时刻附近Δt时间间隔内有ΔN个核素衰变，则这ΔN个核素的总寿命就是$\Delta Nt=-dNt=\lambda Nt\,dt$。由于从$t=0$到$t=\infty$一直有衰变发生，于是每一个核素的平均寿命就是

$$\tau=\frac{\int_0^\infty\lambda Nt\,dt}{N_0}=\frac{\int_0^\infty\lambda N_0e^{-\lambda t}t\,dt}{N_0}=-\int_0^\infty t\,d(e^{-\lambda t})=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt$$

即

$$\tau=\frac{1}{\lambda}=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\approx1.44T_{1/2}\tag{14.12}$$

可见平均寿命比半衰期要长一些。

经过时间τ后，剩余的核素为

$$N(\tau)=N_0e^{-\lambda\tau}=\frac{N_0}{e}=37\%N_0\tag{14.13}$$

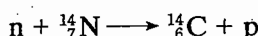
约为原来的37%。

放射性核素的半衰期、平均寿命与衰变常数λ实际上是相互关联的，是核素放射性的重要特征。大量的实验研究证明，同一种核素的λ是不变的，也没有两种核素的λ是一样的。因此，λ是确定和区分放射性核素的特征参量，可以用作它们的“指纹”。

5．放射性定年法

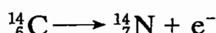
在常见同位素中，例如碳-11、氧-15和氮-13的半衰期只有几分钟或几小时，而碳-14的半衰期却长达5730年。正是由于碳-14的半衰期如此之长，它已成为考古学中测定生物体（无论植物或动物）年代的重要手段。

气球一直受到宇宙射线的辐射，这些射线轰击大气层中的原子核，产生大量的次级中子，而这些中子与大气中的氮发生反应，将氮-14变为碳-14，即



$$n+{}^{14}_{7}N\longrightarrow{}^{14}_{6}C+p$$

碳-14经历一个β^-的衰变过程



$${}^{14}_{6}C\longrightarrow{}^{14}_{7}N+e^-$$

经过长期的过程，大气层中各种核素的含量基本处于平衡状态，即碳-14与碳-12的含量基本

保持不变，两者之比为 $1.3\times10^{-12}:1$。植物由于光合作用而吸收大气中的二氧化碳，而二氧化碳中既包含碳-12 也包含碳-14，食草动物食用植物活体，食肉动物则食用其他动物，因而在动植物的存活期，其体内碳-14 和氮-14 的比例与大气层中一样。当生物死亡后，新陈代谢过程停止，不再摄入包括碳-14 在内的元素。在生物遗骸中，碳-14 的含量由于衰变而不断减少，但碳-12、氮-14 保持恒定，所以，通过测量碳-14 与碳-12 或氮-14 的比例，就可以确定生物遗骸的年代。这种方法称作^{14}C **鉴年法**，最先由美国物理化学家利比提出。当然，由于碳-14 的半衰期长达 5 730 年，所以这种方法的精度和范围受到限制，对于 100～30 000 年间的样本，测量结果比较可信。



图 14.13　科学家通过^{14}C 鉴年法，确定法国拉斯科岩洞中的这幅绘画具有 1.7 万～1.6 万年的历史

用^{14}C 鉴年时，先从对象上取一部分，然后设法测定其中的碳含量 N_C，并测量其中碳-14 单位时间内放出的电子数，即 $A(t)=\dfrac{-dN_{^{14}C}}{dt}$，这就是核素的衰变率。由 $\dfrac{-dN_{^{14}C}}{dt}=\lambda N_{^{14}C}(t)$，得到 $N_{^{14}C}(t)=\dfrac{1}{\lambda}A(t)$，其中 $N_{^{14}C}(t)$ 为目前样品中碳-14 的数量。可以计算出样品中碳-14 的浓度为 $n_{^{14}C}(t)=\dfrac{N_{^{14}C}(t)}{N_C}=\dfrac{1}{\lambda}A(t)$。由生物死亡时体内碳-14 的浓度 $n_{^{14}C}(0)=\dfrac{N_{^{14}C}(0)}{N_C}$ 就是大气中碳-14 的浓度，为已知值，因此

$$\frac{n_{^{14}C}(t)}{n_{^{14}C}(0)}=\frac{\dfrac{N_{^{14}C}(t)}{N_C}}{\dfrac{N_{^{14}C}(0)}{N_C}}=\frac{N_{^{14}C}(t)}{N_{^{14}C}(0)}$$

根据式(14.10)，核素衰变的时间为

$$t=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N_0}{N(t)}=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N_{^{14}C}(0)}{N_{^{14}C}(t)}=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{n_{^{14}C}(t)}{n_{^{14}C}(0)}=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\dfrac{1}{\lambda}A(t)}{\dfrac{N_{^{14}C}(0)}{N_C}}$$

即

$$t=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln\left[\frac{(T_{1/2}/\ln 2)A(t)}{n_{^{14}C}(0)}\right]\tag{14.14}$$

碳-14 的半衰期为已知数，大气层中碳-14 的浓度为 1.3×10^{-12}，因此可以很容易计算年代 t。

但是，上述结果并不能直接作为年代的数据，还要经过一定的校准。原因是大气层中碳-14 的浓度由于受到多种因素的影响而有起伏变化(图 14.14)。例如，地磁场的变化会影响到宇宙射线的密度，天气的变化也会使得地球表面和海洋中含碳物质释放碳的速度，等等。除了这些自然因素，人为因素的影响也不可忽略，18 世纪的工业革命至 1950 年间，二氧化碳的释放量剧增，导致大气层中碳-14 的浓度持续下降；1950～1960 年间大规模的核试验几乎使大气层中碳-14 的浓度增加 1 倍，等等。因而要根据用其他方法独立得到的数据进行校正，例如树木年

轮、深海沉积物、湖泊沉积物泥纹、珊瑚标本以及洞穴岩溶物等。图 14.15 所示的偏离直线的曲线就是针对^{14}C鉴年法的校正曲线。

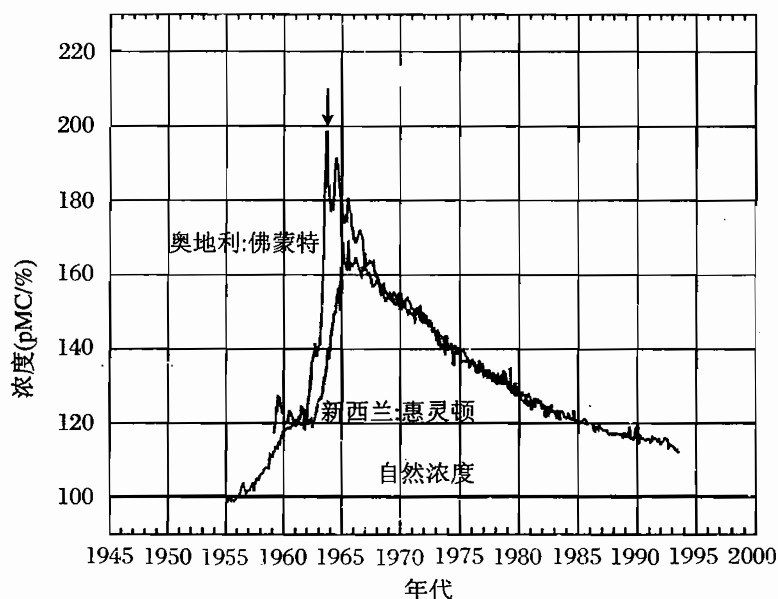


图 14.14 南半球(新西兰)与北半球(奥地利)大气中碳-14 含量的监测结果

1965 年的核试验使得北半球中^{14}C浓度几乎比南半球多 1 倍

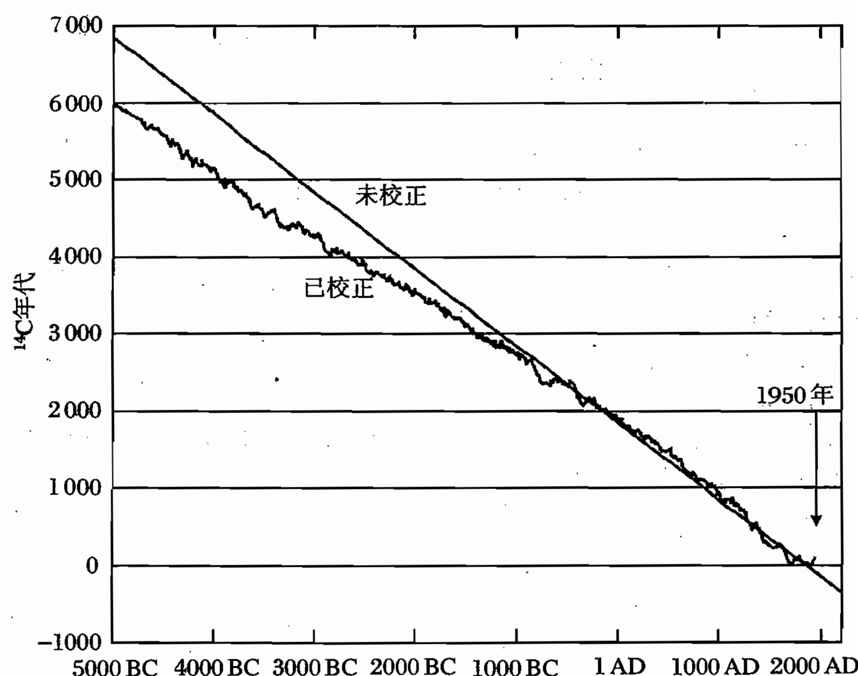


图 14.15 ^{14}C鉴年法的校正曲线

通常都采用 1950 年监测到的碳-14 浓度为基准，而鉴定的年代都是距 1950 年的时间，因

而通常将年代记为 t(BP)，其中 BP 是 Before Present 的缩写，指 1950 年。

7. 放射性活度

放射性物质在单位时间内发生衰变的原子核数 $-\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ 称为该物质的**放射性活度**，也称为**放射性强度**，用 A 标记，即

$$A = \frac{-\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{14.15}$$

其中，$A_0 = \lambda N_0$，即决定放射性强弱的量是 λ 与 N 的乘积，既与放射性的强弱有关，还与放射性物质的数量有关。

放射性活(强)度的单位是**居里**(Ci)，其定义为

1 居里(Ci) = 3.7×10^{10} 次核衰变/秒

1 居里的最原始定义就是 1 g ^{236}Ra 在 1 s 内的放射性衰变数。还有其他单位：

1 毫居(mCi) = 3.7×10^{7} 次核衰变/秒

1 微居(μCi) = 3.7×10^{4} 次核衰变/秒

此外，还有一种放射性强度单位——**贝克勒**(Bq)，其定义为

1 贝克勒(Bq) = 1 次核衰变/秒

贝克勒与居里的换算关系为

1 居里 = 3.7×10^{10} 贝克勒

除了上述单位之外，还有其他表示放射性的单位，如**伦琴**(R)、**拉德**(rad)、**戈瑞**(Gr)等。这些单位表示了放射线对其他物质所产生的效果，例如：

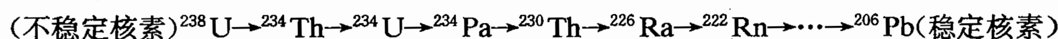
1 伦琴(R) = 使 1 kg 空气中产生 2.58×10^{-4} C 电量的辐射剂量

1 拉德(rad) = 1 g 受照射物质吸收 100 erg(1 erg = 10^{-7} J)的辐射能量

1 戈瑞(Gr) = 1 kg 受照射物质吸收 1 J 的辐射能量

8. 放射系

放射性元素在经过一次衰变后，得到的元素往往仍然是不稳定的，所以还将继续衰变下去，直至成为一种稳定的元素为止，这样的**级联反应**(或**衰变链**)就构成了一个**放射系**。例如，^{238}U 的级联反应为：


(不稳定核素)$^{238}\mathrm{U}\to{}^{234}\mathrm{Th}\to{}^{234}\mathrm{U}\to{}^{234}\mathrm{Pa}\to{}^{230}\mathrm{Th}\to{}^{226}\mathrm{Ra}\to{}^{222}\mathrm{Rn}\to\cdots\to{}^{206}\mathrm{Pb}$(稳定核素)

已知有三种天然的放射系：铀系、钍系、锕系，以及一种人工放射系：镎系，这四种放射系用图 14.16～14.19 表示。

9. 半衰期的测定

可以用粒子计数器测出单位时间内核衰变的数目，即放射性活度随时间的变化，就可以根据放射性衰变的指数律求出核的半衰期。

由于 $-\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = \lambda N = \lambda N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$，所以

$$\ln\frac{-\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \ln(\lambda N_0) - \lambda t \tag{14.16}$$

根据测量到的放射性活度 $-\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ 随时间 t 的变化，即可求出 λ，进而得到半衰期 $T_{1/2}$。

对于长半衰期的核素，例如 ^{238}U，$T_{1/2} = 4.5\times10^{9}$ a，由于放射性活度非常小，1 mg 的 ^{238}U 的活度为 $A = 740$ 个 α 粒子/分钟。因而如果测量时间较短的话，统计误差就比较大。为了得到比较准确的数值，要进行较长时间的计数。

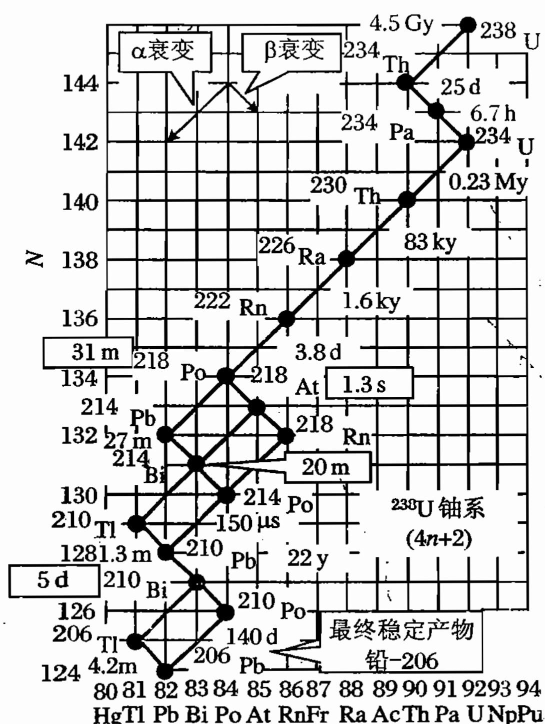


图 14.16 铀系

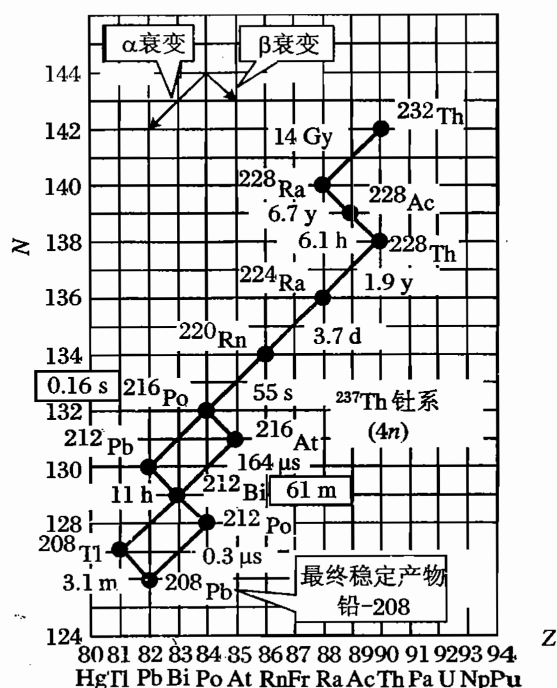


图 14.17 钍系

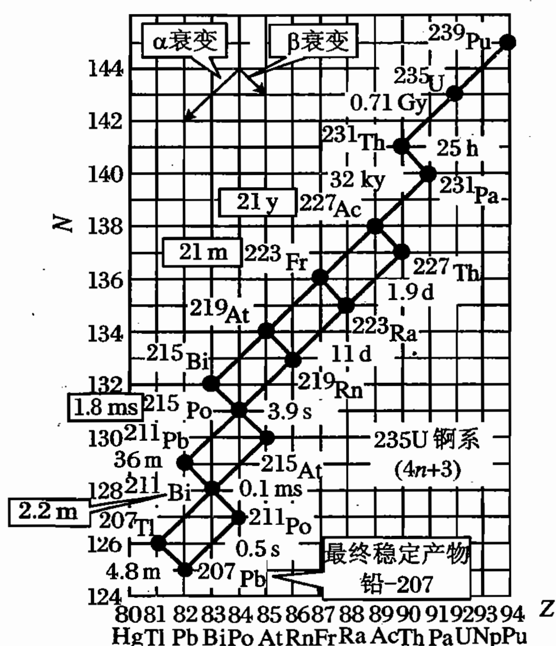


图 14.18 锕系

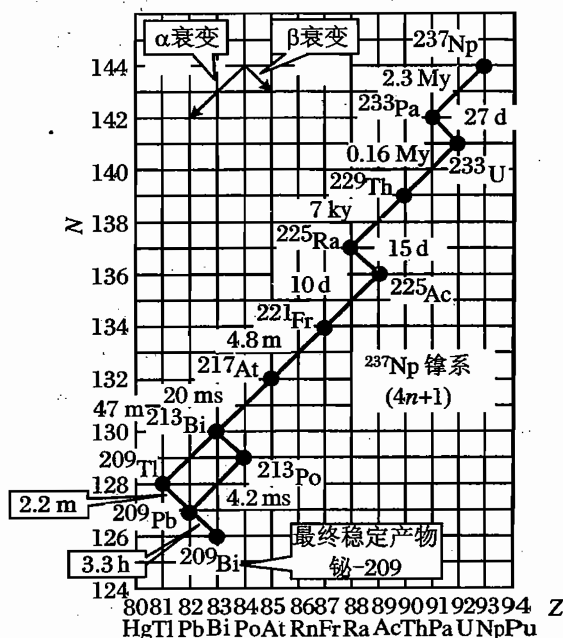


图 14.19 镎系

14.3.2 α衰变

原子核在衰变过程中会放出α粒子，α粒子就是He的原子核，即$_2^4He$，包含2个质子和2个中子(图14.20)。核素放出一个α粒子后，其核电荷数减少2，质量数减少4。

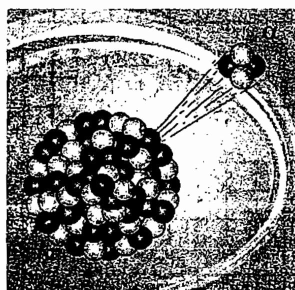


图14.20 α衰变

α衰变的过程可以表示为

$$_Z^AX \longrightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + \alpha \tag{14.17}$$

例如，$_{92}^{238}U \longrightarrow {}_{90}^{234}Th + \alpha$。

设衰变前母核X是静止的，则由于体系的能量守恒，可以得到

$$m_X c^2 = m_Y c^2 + m_\alpha c^2 + E_\alpha + E_r$$

其中，E_α为α粒子的能量，即衰变中放出的α粒子的动能，E_r为子核Y的**反冲能**，即由于放出α粒子而子核获得的反冲动能，m_X, m_Y, m_α分别为母核、子核、α粒子的静止质量。将$E_\alpha + E_r$定义为**α衰变能**E_d，则

$$E_d = E_\alpha + E_r = (m_X - m_Y - m_\alpha)c^2 \tag{14.18}$$

由于核素表所给出的质量都是原子的质量，故可以将上述核质量转换为原子质量：

$$m_X = M_X - Zm_e$$
$$m_Y = M_Y - (Z-2)m_e$$
$$m_\alpha = M_{He} - 2m_e$$

以上各式忽略了电子与原子核之间的结合能。于是得到

$$E_d = [M_X - (M_Y - M_{He})]c^2 \tag{14.19}$$

例如，对于衰变$^{210}Po \longrightarrow {}^{206}Pb + \alpha$，有

$$M(^{210}Po) = 209.982\,9\ \text{u}$$
$$M(^{206}Pb) = 205.974\,5\ \text{u}$$
$$M(^{4}He) = 4.002\,6\ \text{u}$$

从而可算出衰变能为5.402 MeV。

通常可以由实验上测得的α动能按以下方法计算出子核的反冲能，并进一步得到衰变能。

由于衰变前母核静止，于是动量守恒方程为

$$m_Y v_Y = m_\alpha v_\alpha$$

子核的反冲能为

$$E_r = \frac{1}{2}m_Y v_Y^2 = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \frac{m_\alpha}{m_Y} = \frac{m_\alpha}{m_Y}E_\alpha \tag{14.20}$$

衰变能为

$$E_d = E_\alpha + E_r = \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}\right)E_\alpha \approx \left(1 + \frac{4}{A-4}\right)E_\alpha = \frac{A}{A-4}E_\alpha \tag{14.21}$$

α粒子由于具有动能，所以有一定的穿透能力，在介质中通过的距离就是α粒子的射程。α粒子的初始动能大，则射程大；所穿过的介质密度小，射程大。因此可以通过测量α粒子在标准空气中的射程来推算其初始动能，也可以将一定厚度的其他介质(例如金属箔)等效于一定厚度

的标准空气进行测量，早期对 α 粒子动能的测量都是这样进行的。但这种方法的精度，即能量分辨率很低。

由于 α 粒子穿过空气（或其他气体）时能够使空气电离，产生离子对（即等离子体），离子对通过电路复合可以产生电脉冲，所以也可以通过测量电脉冲的强度获得 α 粒子的能量，这样分辨率可以达到 1%～2%。

现在主要是利用 α 磁谱仪来精确测量 α 粒子的动能。由于 α 粒子带电，所以通过让 α 粒子在磁场中偏转的方法测定其能量，但是 α 粒子的质量比电子大 7 000 多倍，因而磁谱仪中的磁场很强，导致价格很高，其能量分辨率可以高达 10^{-4}。

实验中测量到的 α 粒子的动能通常是分立的，如图 14.21 和图 14.22 所示。

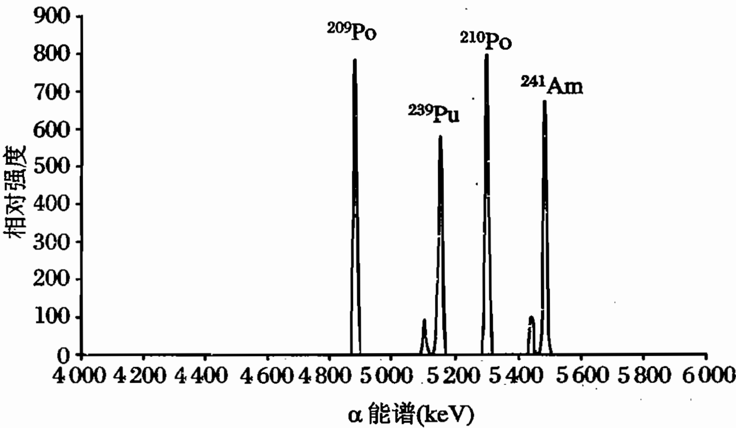


图 14.21　^{209}Po 等核素的 α 能谱

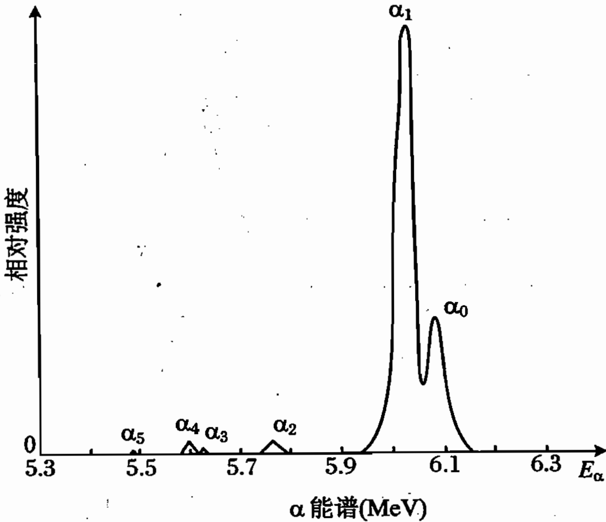


图 14.22　^{212}Bi 的 α 能谱

同一种核素在衰变过程中所放出的能量往往分为不同的几组，这当然是由于原子核具有分立能级的结果。表 14.3 给出了不同核素在 α 衰变中放出的 α 粒子的能量以及子核的反冲能。

表 14.3　一些核素在 α 衰变中放出的 α 粒子的能量以及子核的反冲

		E_α(MeV)	E_r(MeV)			E_α(MeV)	E_r(MeV)
^{210}Po	α_1	4.517	8.697×10^{-2}	^{241}Am	α_{26}	5.389	9.017×10^{-2}
	α_2	5.304	1.021×10^{-1}		α_{28}	5.443	9.106×10^{-2}
^{226}Ra	α_1	4.160	7.431×10^{-2}		α_{30}	5.486	9.178×10^{-2}
	α_2	4.191	7.487×10^{-2}		α_{31}	5.512	9.223×10^{-2}
	α_3	4.340	7.753×10^{-2}		α_{32}	5.545	9.277×10^{-2}
	α_4	4.601	8.219×10^{-2}	^{226}Th90	α_4	6.028	1.077×10^{-1}
	α_5	4.784	8.547×10^{-2}		α_5	6.040	1.079×10^{-1}
^{239}Pu	α_{48}	5.106	8.615×10^{-2}		α_6	6.099	1.090×10^{-1}
	α_{50}	5.144	8.680×10^{-2}		α_7	6.234	1.114×10^{-1}
	α_{51}	5.157	8.701×10^{-2}		α_8	6.337	1.132×10^{-1}

根据测量的结果，可以画出所谓的“衰变纲图”。图中的一些水平直线表示衰变过程中核素的能级高低，以带箭头的直线表示衰变过程，如果是 α 衰变、β^+ 衰变，由于衰变后 Z 减小，故箭头向左；对于 β^- 衰变，衰变后 Z 增大，箭头向右；对于 γ 衰变，箭头竖直向下。图中可以进一步标明衰变能量（通常是所放出的粒子的动能，即磁谱仪测量的能谱数值）。图 14.23 是^{226}Ra 的衰变纲图，图 14.24 则给出了 ^{210}Po 的 α 衰变纲图。

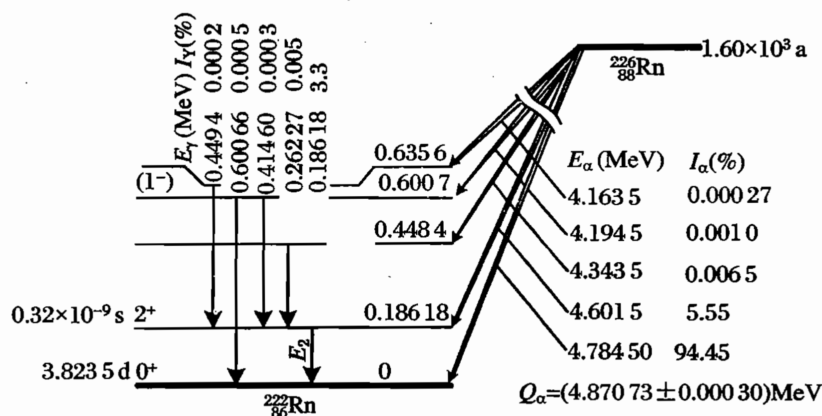


图 14.23　^{226}Ra 的衰变纲图

14.3.3　β 衰变

β 衰变是指原子核在衰变过程中放出电子的过程，其中，又可分为 β^- 衰变（放出负电子，见图 14.25）、β^+ 衰变（放出正电子）、电子俘获（原子核俘获核外电子，例如 K 轨道电子）等。

原子核放出一个负电子后，其质量几乎不变，而核电荷数增加 1。

最初发现的 β 射线是由电子组成的，但 1930 年，狄拉克根据它所建立的相对论量子力学，指出正电子存在的可能性。1932 年，美国物理学家安德森在对宇宙射线的研究中首次发现了

正电子，图 14.26 就是安德森所拍摄的显示正电子径迹的云室照片。图中一个粒子从下面射入磁场，穿过中间的铅板后继续前进，由于损失了能量，径迹的半径减小。通过仔细的计算，证实这就是狄拉克所预言的正电子，它具有和电子相同的质量和自旋，带有与电子等量的正电荷，是电子的反粒子。

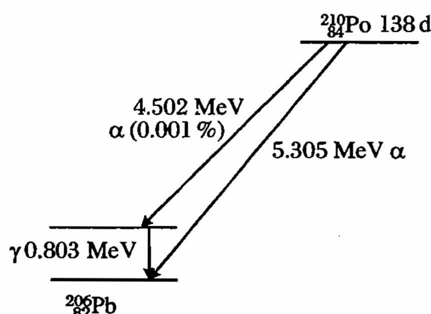


图 14.24　^{210}Po 的 α 衰变纲图

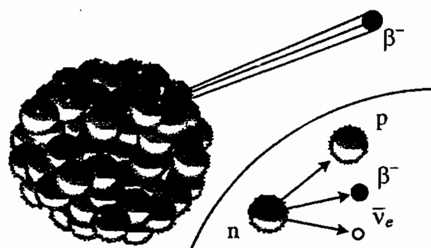


图4.25　β⁻ 衰变（原子核放出一个负电子）

通过对 β 射线能谱的仔细研究，人们发现，β 粒子的能量（以及动量）都是连续的（图 14.27 和图 14.28），而不是像 α 粒子能谱那样是分立的；而且，每种核素发出的 β 电子都有一个明显的最大动能（截止能量）。

在解释 β 衰变的机制时，除了 β 粒子的连续能谱与核的分立能级无法对应之外，还有一点就是在原子核中本来是没有电子的，只有质子和中子，那么电子是从何而来的呢？对此，泡利提出了自己的假设，他在 1930 年指出：在 β 衰变的过程中，伴随着电子的发射，同时也放出了一个很轻的中性粒子，这一中性粒子由于既不带电也没有质量，所以不能从实验上测得。费米接受了泡利的观点，将这种粒子称作**“中微子”**。

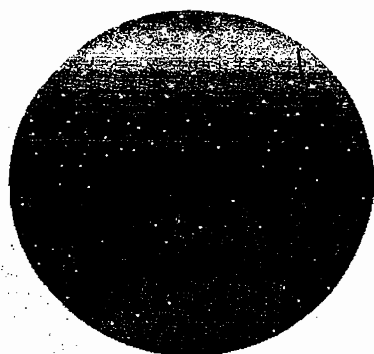
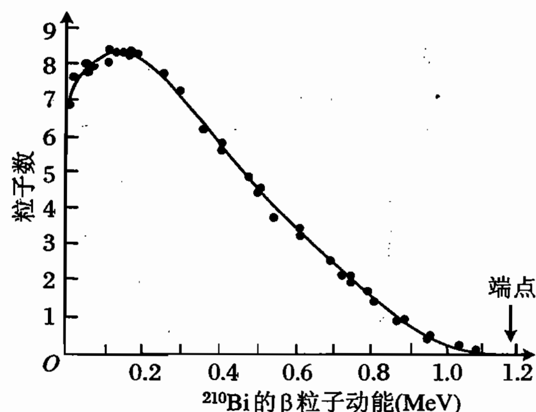
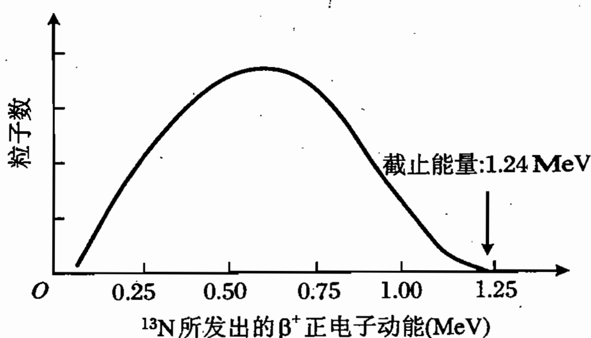


图 14.26　安德森所拍摄的正电子照片



(a) ^{210}Bi 所发出的 β⁻ 射线能谱



(b) ^{13}N 所发出的 β⁺ 射线能谱

图 14.27　β 粒子的连续能量

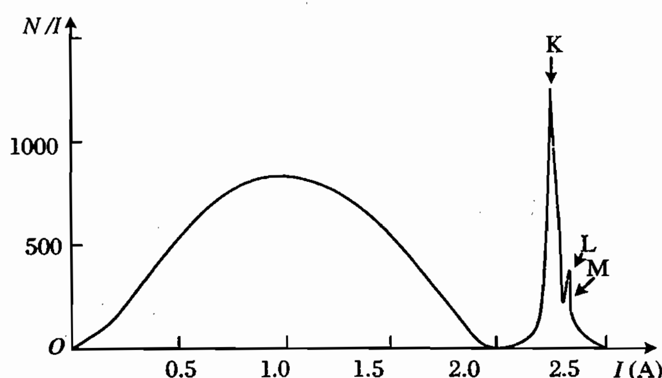
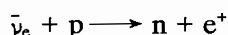


图 14.28　^{137}Cs 所发出的 β^- 射线动量谱

横坐标是 β 磁谱仪电磁铁线圈的电流，与 β 粒子动量成正比

1942 年，当时正在浙江大学的物理学家王淦昌提出了用 β 衰变俘获方法测量中微子的建议。1956 年，美国科学家柯万和莱因斯等人利用美国 SRS 核工厂反应堆产物中的 β 衰变，首次观测到了中微子诱发的反应，即



$$\bar{\nu}_e + p \longrightarrow n + e^+$$

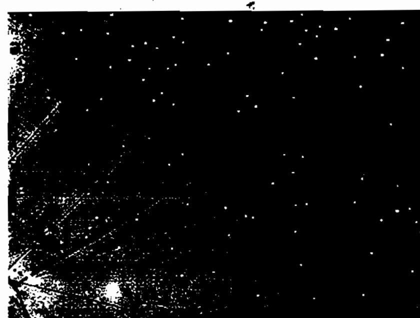


图 14.29　在气泡室中观察到的中微子撞击质子的照片

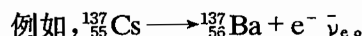
从位于照片右方的撞击点发出三条径迹

其中，反中微子($\bar{\nu}_e$)轰击质子，产生了一个中子和一个正电子。图 14.29 就是首次观察到中微子的照片。由于中微子的质量非常小，将它和其他一些很轻的粒子(包括电子)都归类于**"轻子"**。

现在，认为 β 衰变过程中，核内的质子和中子相互转化，同时放出电子和中微子。β^- 衰变过程中，核内一个中子转化为质子，放出负电子和反中微子，可以表示为



$$n \longrightarrow p + e^- \bar{\nu}_e, \quad 即 \quad {}^A_Z X \longrightarrow {}_{Z+1}^{\ A} Y + e^- \bar{\nu}_e$$



例如，${}^{137}_{55}Cs \longrightarrow {}^{137}_{56}Ba + e^- \bar{\nu}_e$。

衰变能可以表示为

$$E_d(\beta^-) = [m_X - (m_Y + m_e)]c^2 = (M_X - M_Y)c^2 \tag{14.22}$$

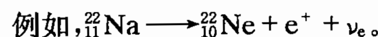
其中，X，Y 是等量异位素。当母核质量大于子核时，才能发生衰变。

图 14.30 是 ${}^{198}_{79}Au \longrightarrow {}^{198}_{80}Hg + e^- + \bar{\nu}_e$ 的 β^- 衰变纲图。由于衰变所放出的 β^- 粒子的动能是连续分布的，所以，很多图中并未标注 β^- 粒子的能量，而只是标注了与子核各个能级对应的分支比。

β^+ 衰变过程中，核内一个质子转化为中子，放出正电子和中微子，可以表示为



$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e, \quad 即 \quad {}^A_Z X \longrightarrow {}_{Z-1}^{\ A} Y + e^+ + \nu_e$$



例如，${}^{22}_{11}Na \longrightarrow {}^{22}_{10}Ne + e^+ + \nu_e$。

衰变能可以表示为

$$E_d(\beta^+) = [m_X - (m_Y + m_e)]c^2 = (M_X - M_Y - 2m_e)c^2 \tag{14.23}$$

例如，${}^{22}_{11}\mathrm{Na} + e^- \longrightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} + \nu_e$，如图 14.31 所示，其中标注的是各个 β^+ 粒子的最大动能。

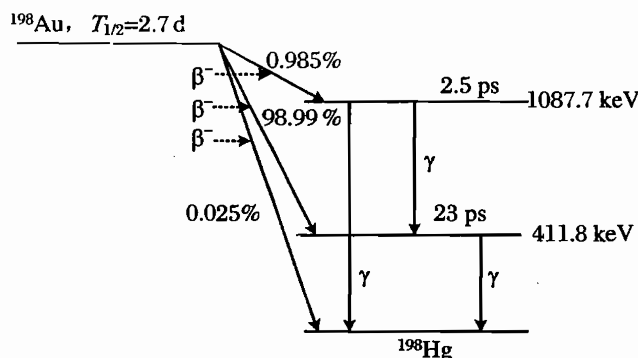
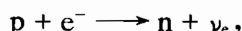


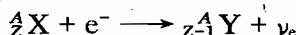
图 14.30　${}^{198}_{79}\mathrm{Au} \longrightarrow {}^{198}_{80}\mathrm{Hg} + e^- + \bar{\nu}_e$ 的 β^- 衰变纲图

轨道电子俘获(有时称作**反 β 衰变**)是指原子核俘获一个核外电子(内壳层电子被俘获的概率最大，例如 K 俘获、俘获等)，同时核内一个质子转化为中子，可以表示为



$$p + e^- \longrightarrow n + \nu_e,$$

即



$${}^{A}_{Z}X + e^- \longrightarrow {}_{Z-1}^{\;\;A}Y + \nu_e$$

例如，${}^{26}_{13}\mathrm{Al} + e^- \longrightarrow {}^{26}_{12}\mathrm{Mg} + \nu_e$，${}^{59}_{28}\mathrm{Ni} + e^- \longrightarrow {}^{59}_{27}\mathrm{Co} + \nu_e$，${}^{40}_{19}\mathrm{K} + e^- \longrightarrow {}^{40}_{18}\mathrm{Ar} + \nu_e$ 等。

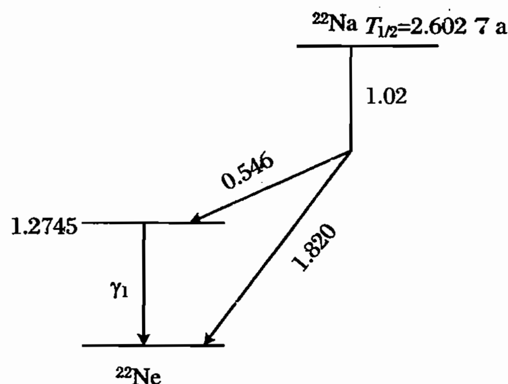


图 14.31　${}^{22}_{11}\mathrm{Na} + e^- \longrightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} + \nu_e$ 的 β^+ 衰变纲图

由于轨道电子被俘获，所以在内壳层产生一个电子空位，从而导致原子跃迁到高激发电离态，再跃迁回基态，最后会发射 **X 射线**或**俄歇电子**。可以据此判断核内电子俘获的发生。

电子俘获(EC)过程的衰变能为

$$E_d(\mathrm{EC}) = (m_X + m_e - m_Y)c^2 - W = (M_X - M_Y)c^2 - W \tag{14.24}$$

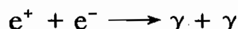
其中，W 为轨道电子在原子中的结合能。

当母核与子核的质量差大于被俘获电子的结合能时，电子俘获过程才能发生。当两核质量差比较大，最靠近核的 K 电子会被俘获；但是，如果母核与子核的质量差比较小时，L 电子被俘获。表 14.4 列出了能够发生电子俘获的核素。

表 14.4　一些可以发生电子俘获的核素

核素	$T_{1/2}$	核素	$T_{1/2}$	核素	$T_{1/2}$
^{7}Be	53.28 d	^{41}Ca	1.03×10^5 a	^{49}V	337 d
^{37}Ar	35.0 d	^{44}Ti	52 a	^{51}Cr	27.7 d
^{53}Mn	3.7×10^6 a	^{56}Ni	6.10 d	^{68}Ge	270.8 d
^{57}Co	271.8 d	^{67}Ga	3.260 d	^{72}Se	8.5 d

正电子与负电子碰撞，两者都将消失，并产生 γ 光子，高能情况下还会产生其他粒子，这就是**正负电子湮灭**。多数情况下，能量不是很高的正负电子湮灭产生一对 γ 光子，用反应式表示为



$$e^+ + e^- \longrightarrow \gamma + \gamma$$

正负电子湮灭可用于医学上的肿瘤诊断，这就是 pet-CT（正电子发射计算机断层扫描成像术）。

葡萄糖中含有 C，N，O，F 等元素，而它们的同位素 ^{11}C，^{13}N，^{15}O，^{18}F 等能够发生 β^+ 衰变。将这些核素注入葡萄糖中，再将葡萄糖通过静脉输入患者体内。由于衰变出的正电子迅速与负电子湮灭而产生一对 γ 光子，所以上述核素可以作为葡萄糖在人体中的示踪剂。与正常组织相比，肿瘤所消耗的葡萄糖要多得多，因而有肿瘤的地方，核素密度高，正负电子湮灭而发出 γ 光子剂量也大。探测并记录 γ 光子，利用计算机进行数据处理，即可合成肿瘤组织的解剖学图像，作出准确的诊断。由于上述核素在葡萄糖中浓度很低，且发出的正电子能量较低，所以湮灭后的 γ 光子的能量不高，剂量也很低，对人体的伤害有限。

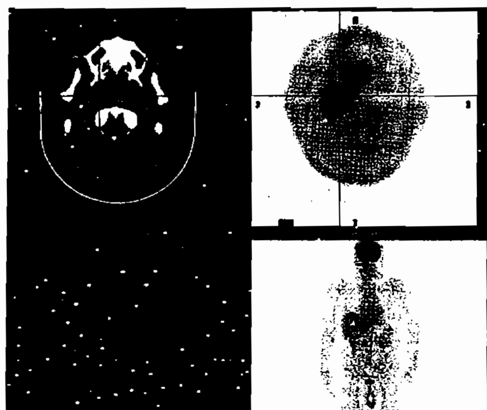


图 14.32　pet-CT 图片

图 14.32 就是 pet-CT 图片，其中左上为 X 射线 CT，左下、右上分别为 pet-CT 的彩色、黑白影像，右下亮点显示在人体中的位置。

14.3.4　γ 衰变

γ 衰变中，原子核放出波长很短的电磁波，这就是 γ 射线（图 14.33）。γ 射线就是光子，不带电，静止质量也为 0，原子核放出一个 γ 光子后，其电荷不变，质量仅有十分微小的变化。

1. γ 衰变的机制

γ 射线往往是伴随着 α 射线和 β 射线放出的。这是因为，母核经过 α 衰变或 β 衰变后，往往处于子核的激发态，子核从激发态跃迁到基态，就会放出光子。γ 光子的波长很短，通常小于10 pm（1 pm $=10^{-12}$ m），光子能量可达 100 keV～10 MeV，但宇宙中有些来自极其遥远的类星体的 γ 光子的能量可高达 80 GeV，甚至到达 500 GeV。在电磁波谱上，硬 X 射线会与 γ 射线的波长交叠。但是，区分这两种射线，不是依据其波长，而是依据其产生的机制。

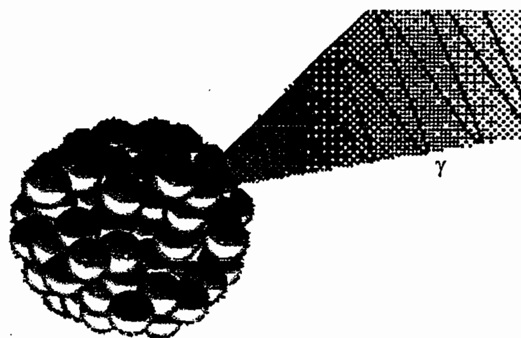
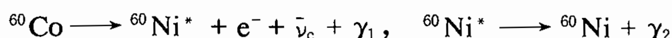


图 14.33　γ 衰变（原子核放出光子）

例如，^{60}Co 衰变到 ^{60}Ni 的过程中，先经历一个 β^- 衰变，成为 ^{60}Ni 的激发态，再衰变为 ^{60}Ni 基态，同时放出 γ 射线，即



$$^{60}Co \longrightarrow {}^{60}Ni^* + e^- + \bar{\nu}_e + \gamma_1, \quad {}^{60}Ni^* \longrightarrow {}^{60}Ni + \gamma_2$$

其中，* 表示核的激发态，衰变纲图示于图 14.34。另一个例子是 ^{241}Am 经 α 衰变到 ^{237}Np 的过程也伴有 γ 衰变，如图 14.35 所示，这是复杂的多衰变过程。由于子核 ^{237}Np 有多个激发态，所以共有七个不同波长的 γ 光子发出。图中能级的单位为 MeV。

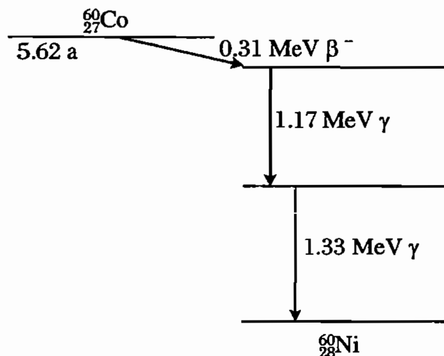


图 14.34 ^{60}Co 到 ^{60}Ni 的衰变纲图

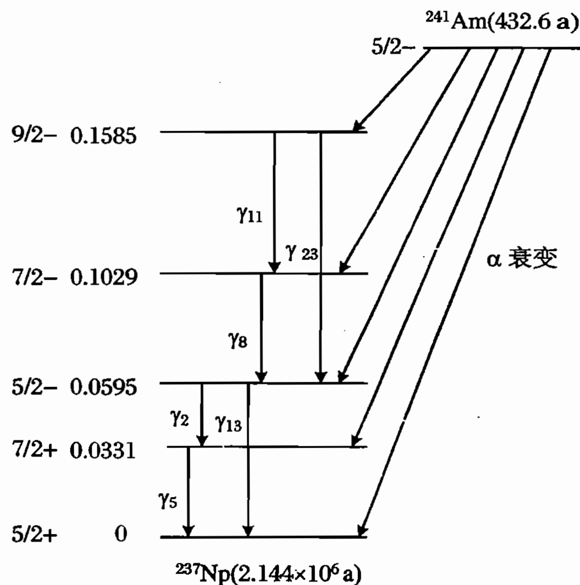
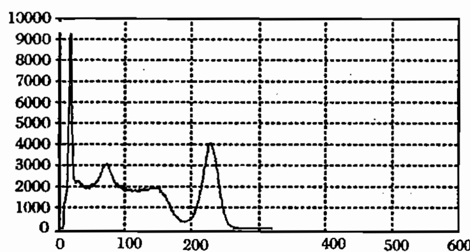
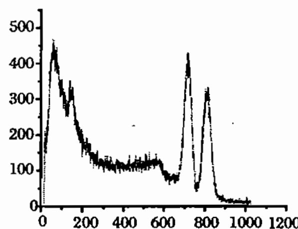


图 14.35 ^{241}Am 经 α 衰变到 ^{237}Np 所伴随的 γ 光子发射

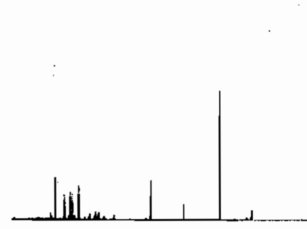
图 14.36 中给出了一些核素的 γ 射线光谱。



(a) ^{137}Cs的射线谱



(b) ^{60}Co的射线谱



(c) ^{235}U的射线谱

图 14.36 一些 γ 射线谱

2. 内转换

在有些情况下，激发态原子核向基态跃迁时，并不放出 γ 光子，而是将能量直接传递给核外电子，使核外电子从原子中被电离，这种现象称作**内转换**，所释放的电子称作**内转换电子**。

3. 同质异能素

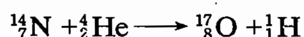
绝大多数子核的激发态寿命非常短，通常只有 10^{-14} s，甚至不到 10^{-14} s，但也有少数子核的激发态寿命比较长。由于这样的子核可以较长时间处于激发态，所以称作基态核的"**同质异能素**"，也称**同量异位素**。例如，^{113m}In 的半衰期为 104 min，而 ^{91m}Nb 的半衰期长达 62 d。核素符号左上角的 m 标志，就是这种核素的同质异能素的表示。

14.4 核反应

原子核的放射性衰变是一种自发的变化过程，在这一过程中，原子核放出粒子而发生变化。与自发性衰变不同的过程是，原子核受到一个高能粒子的撞击时，也会发生变化，放出一个或几个粒子，这一过程就是核反应。

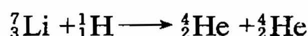
原子核反应是一种受激变化的过程，能够激发原子核反应的粒子有中子、质子、氘核、α 粒子、γ 光子等。通常，可以直接利用天然放射性物质中的 α 粒子和 γ 光子进行核反应，质子和氘核可以从粒子加速器中产生，中子既可以由天然放射性产生，也可以通过加速粒子间接产生。

第一个人工核反应是由卢瑟福在 1919 年进行的。他使用 RaC′(即^{130}Po)的 α 射线轰击空气中的氮原子核，这一反应过程可以表示为



$$^{14}_{7}\mathrm{N} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \longrightarrow ^{17}_{8}\mathrm{O} + ^{1}_{1}\mathrm{H}$$

另一个核反应的例子是 1932 年由科克饶夫特与华尔顿利用加速的质子撞击锂进行的，即



$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{4}_{2}\mathrm{He}$$

还有一些热中子引起的反应，见表 14.5。

表 14.5　由中子轰击导致的核反应

(n,α)	(n,p)
$^{6}\mathrm{Li} + \mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{T} + \alpha$	$^{3}\mathrm{He} + \mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{T} + \mathrm{p}$
$^{10}\mathrm{B} + \mathrm{n} \longrightarrow ^{7}\mathrm{Li} + \alpha$	$^{7}\mathrm{Be} + \mathrm{n} \longrightarrow ^{7}\mathrm{Li} + \mathrm{p}$
$^{17}\mathrm{O} + \mathrm{n} \longrightarrow ^{14}\mathrm{C} + \alpha$	$^{14}\mathrm{N} + \mathrm{n} \longrightarrow ^{14}\mathrm{C} + \mathrm{p}$
$^{21}\mathrm{Ne} + \mathrm{n} \longrightarrow ^{18}\mathrm{O} + \alpha$	$^{22}\mathrm{Na} + \mathrm{n} \longrightarrow ^{22}\mathrm{Ne} + \mathrm{p}$
$^{37}\mathrm{Ar} + \mathrm{n} \longrightarrow ^{34}\mathrm{S} + \alpha$	

快中子反应$^{9}\mathrm{Be} + \mathrm{n} \longrightarrow 2\alpha + 2\mathrm{n}$ 中，一个中子可以产生两个中子；另一个快中子反应的例子是$^{7}\mathrm{Li} + \mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{T} + \alpha + \mathrm{n}$。

实验研究表明，在核反应的过程中，下列物理量是守恒的：电荷、核子数、总质量以及与之关联的总能量、动量、角动量、宇称等等。

14.4.1　反应能与 Q 方程

在核反应中释放的能量称作**反应能**，反应能与反应前后粒子的质量和动能有关。记反应能为 Q，$Q>0$ 的反应称作**放能(热)反应**，$Q<0$ 的反应称作**吸能(热)反应**。

可以将核反应的过程用下面的方程表示：

$$\mathrm{A} + \mathrm{a} = \mathrm{B} + \mathrm{b} \tag{14.25}$$

其中，A 为反应前的靶核，a 为入射粒子，B 为剩余核，b 为出射粒子。将上述粒子的动能依次记

为 E_A, E_a, E_B, E_b，静止质量依次记作 M_A, M_a, M_B, M_b。设反应前粒子都处于基态，则反应过程中的能量守恒可表示为

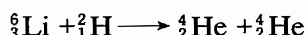
$$M_A c^2 + E_A + M_a c^2 + E_a = M_B c^2 + E_B + M_b c^2 + E_b \tag{14.26}$$

将反应能定义为反应后的总动能减去反应前的总动能，于是

$$\begin{aligned} Q &= (E_B + E_b) - (E_A + E_a) \\ &= [(M_A + M_a) - (M_B + M_b)]c^2 \end{aligned} \tag{14.27}$$

所以，反应能 Q 也等于反应前的总质量（能量）与反应后的总质量（能量）之差，即粒子在核反应过程中所释放出的能量。

例如，对于氘核撞击锂的核反应



$$^{6}_{3}\mathrm{Li} + ^{2}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{4}_{2}\mathrm{He}$$

可以计算出

$$M_A + M_a = 6.015 + 2.014 = 8.029 \quad (\mathrm{u})$$
$$M_B + M_b = 2 \times 4.0026 = 8.0052 \quad (\mathrm{u})$$
$$\begin{aligned} Q &= 8.029 - 8.0052 = 0.0238 \quad (\mathrm{u}) \\ &= 0.0238 \times 931.49\,(\mathrm{MeV}) \approx 22.4 \quad (\mathrm{MeV}) \end{aligned}$$

这是一个放能反应。同样可以算得$^{7}_{3}\mathrm{Li} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{4}_{2}\mathrm{He}$ 反应的 Q 值是 17.35 MeV。

表 14.6 中列出了一些反应过程中的反应能。

表 14.6　一些核反应中 Q 的测量值　　　　（单位：MeV）

核反应	Q 值	核反应	Q 值
^{2}H(n, γ), ^{3}H	6.257±0.004	^{9}Be(p, α), ^{6}Li	2.132±0.006
^{2}H(d, p), ^{3}H	4.032±0.004	^{10}B(n, α), ^{7}Li	2.793±0.003
^{6}Li(p, α), ^{3}H	4.016±0.005	^{10}B(p, α), ^{7}Be	1.148±0.003
^{6}Li(d, p), ^{7}Li	5.020±0.006	^{12}C(n, γ), ^{13}C	4.948±0.004
^{7}Li(p, n), ^{7}Be	−1.645±0.001	^{13}C(p, n), ^{13}N	−3.003±0.002
^{7}Li(p, α), ^{4}He	17.337±0.007	^{14}N(p, n), ^{14}C	−0.627±0.001
^{9}Be(n, γ), ^{10}Be	6.810±0.006	^{14}N(n, γ), ^{15}N	10.833±0.007
^{9}Be(γ, n), ^{8}Be	−1.666±0.002	^{18}O(p, n), ^{18}F	−2.453±0.002
^{9}Be(d, p), ^{10}Be	4.585±0.005	^{19}F(p, α), ^{16}O	8.124±0.007

表 14.6 中，采用核反应的简单表示法，其中逗号前为反应前的粒子，逗号后为反应后的粒子，括号内为反应前后的小粒子。

在实验室中，反应前的靶核通常都是静止的，即 $E_A = 0$，于是反应能为

$$Q = E_B + E_b - E_a \tag{14.28}$$

如果知道了反应前后的核质量，则可以计算反应能；如果无法确定反应后的剩余核，则可以通过

测量粒子的动能计算反应能。入射粒子和出射粒子的动能 E_a,E_b 是容易测量的,但反应后的剩余核由于质量较大,其动能 E_B 不容易测量。不过,可以通过动量守恒计算得到。

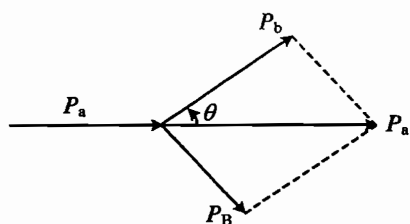


图 14.37 反应过程中动量守恒

如图 14.37 所示,由动量守恒,可以得到

$$p_a = p_b + p_B$$

即

$$p_B^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b \cos\theta$$

将其中的动量用动能表示,即得到

$$2M_B E_B = 2M_a E_a + 2M_b E_b - 4\sqrt{M_a M_b E_a E_b}\cos\theta$$

整理后得到

$$E_B = \frac{M_a}{M_B}E_a + \frac{M_b}{M_B}E_b - 2\frac{\sqrt{M_a M_b E_a E_b}}{M_B}\cos\theta$$

代入式(14.28),于是有

$$Q = \left(1 + \frac{M_a}{M_B}\right)E_a - \left(1 - \frac{M_b}{M_B}\right)E_b - 2\frac{\sqrt{M_a M_b E_a E_b}}{M_B}\cos\theta \tag{14.29}$$

这就是核反应的 Q 方程。

14.4.2 核反应的阈能

下面简单讨论一下核反应的阈能。

所谓阈能,是指为了实现原子核反应,撞击粒子所必须具有的最低能量。对于放能反应,原则上不需要额外的能量,即放能反应的阈能为 0;对于吸能反应,则应当通过撞击粒子来提供反应的阈能。

在实验室坐标系中,吸热反应的阈能就等于反应过程中所吸收的热量,即 $-Q$,再加上反应后粒子的动能,这是由系统反应过程中动量守恒所要求的。如果采用质心坐标系,系统的动量保持为 0,则阈能就等于 $-Q$。利用实验室坐标系与质心坐标系之间的换算关系,可以得到在实验室坐标系中反应的阈能为

$$E = -Q\frac{M_a + M_A}{M_A} \tag{14.30}$$

14.5 核 裂 变

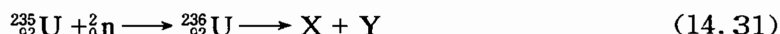
14.5.1 核裂变的发现及其特点

核裂变是指一个较重的原子核在核反应中分裂为两个较轻的其他原子核。

核裂变是在 1938 年被时任德国柏林凯撒·威廉化学研究所主任的德国化学家奥托·哈恩与合作者弗里茨·斯特拉斯曼最先确认的。在此之前,由于意识到中子不带电荷而较容易越过核势垒与核发生作用,有些物理学家开始了中子轰击原子核的实验研究。意大利物理学家恩里科·费米在 1934 年曾发表过用中子轰击铀核并得到一种半衰期为 13 分钟的放射性产物的实

验结果；1938 年，法国的伊伦·约里奥·居里用中子轰击铀，得到了一种半衰期为 3.5 小时的放射性产物。不过，费米和居里等人一直认为受到轰击的铀核只是发生了衰变，产生了诸如 ^{231}Ra，^{231}Ac 等，只有哈恩第一个采用化学的方法证明了上述反应的产物中有钡和镧(后来证实镧是氪经过 β^- 衰变产生的)，如图 14.38 所示。对于这样的实验结果，作为化学家的哈恩心存疑虑，就在报告他的工作之前，写信告诉了一位女物理学家迈特纳。迈特纳是出生于奥地利的犹太人，在获得维也纳大学的物理学博士学位后，就一直与哈恩合作。1938 年，奥地利并入德国，迈特纳为了躲避纳粹的迫害而逃到了瑞典，但哈恩一直与她进行科学讨论。当迈特纳收到哈恩的来信时，正好她的外甥——当时在玻尔研究所工作的弗里胥——前去探望她，于是俩人一同讨论了哈恩的实验结果。迈特纳用玻尔的液滴模型解释了这一过程，认为是一个重核分裂成了两个轻核，“裂变”一词就是她从细胞分裂那里借用的名词。他们各自报告了实验和理论分析的结果。

裂变过程中，原子核吸收中子后，形成了一个复核，由于复核处于高激发态，不稳定，容易裂开。用慢中子轰击 ^{235}U 的反应过程可以用下式表示：



$$^{235}_{92}\mathrm{U} + ^{2}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow ^{236}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Y} \tag{14.31}$$

上述核反应中，还伴随有中子的发射，通常会产生 2～3 个中子。其实，铀核分裂为钡和氪只是其中的一种裂变方式，后来从实验上已经观察到了铀的 60 多种裂变产物的组合方式，而且这些产物往往是不稳定的核素，还要经历过一系列的衰变过程，最后变为稳定的核素。图14.39 给出了 ^{235}U 裂变产物的产额，图 14.40 还画出了 ^{239}Pu，^{233}U 以及 U 和 Pu 的混合物等其他核素裂变产物的相对产额。可以看出，在质量 A 为 85～105 和 130～150 的区间，产额是最高的，而等分的情况却很少。虽然也曾观察到裂变后分为三个碎块的情况，但发生的概率很少。

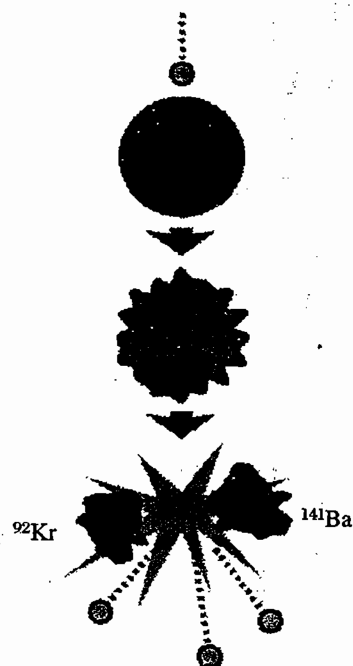


图 14.38　哈恩确认的核裂变

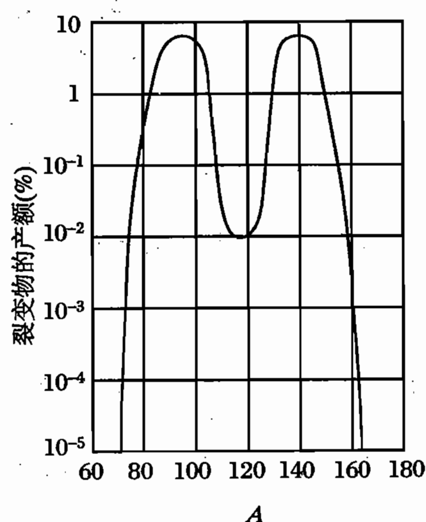


图 14.39　^{235}U 裂变产物的产额

在一个重核裂变为两个较轻核的过程中，所释放出的能量是很大的。查看图 14.9 的比结合能曲线，在 $A=236$ 处，比结合能约为 7.6 MeV，分裂后，以钡-144 和氪-89 为例，分别约为 8.7 MeV和 8.2 MeV，再减去两个中子的动能（约为 10 MeV），则每个核裂变释放出的能量为 $144\times8.7+89\times8.2-236\times7.6-10\approx179$ (MeV)。比较准确的计算可以利用质能关系再根据反应方程算得。上面的反应方程为

$$n + {}^{235}U \longrightarrow {}^{144}Ba + {}^{89}Kr + 3n$$

$$Q = M({}^{235}U) - [M({}^{144}Ba) - M({}^{89}Kr) - 2M(n)]$$

$$Q = 235.043\,925 - (143.910\,095 - 88.905\,856 - 2\times1.008\,665)$$
$$= 0.210\,644\ (u) = 196.2\ (MeV)$$

一般地，可以认为 1 个铀核裂变放出 200 MeV 的能量，包括 2 个裂变核与平均 2.5 个中子的动能，还有放射出的各种射线（主要是 γ 射线）的能量。这样算起来，1 kg 铀全部裂变释放的能量为 5.3×10^{26} MeV，约合 8×10^{13} J，比 1 kg TNT 炸药爆炸释放的能量（4.19×10^{6} J）约大 2 000万倍，相当于 2 500 t 标准煤的燃烧热。

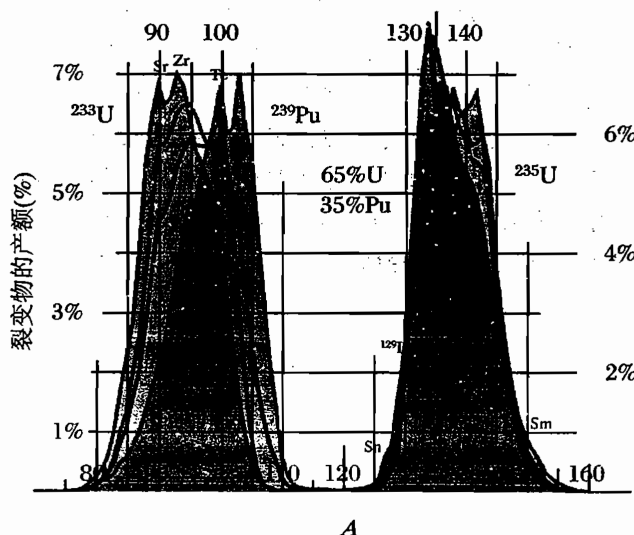


图 14.40　^{239}Pu，^{233}U 以及 U 和 Pu 的混合物裂变的相对产额

14.5.2　实现核裂变的主要方式

1. 核裂变的机制

下面用原子核的液滴模型分析裂变的原因。当原子核从球形变为椭球形时，体积不变而表面积增大，因而表面势能增大，库仑势能减小，总的效果是势能增大。也就是说，当核发生形变，变为椭球形时，又会重新回到球形，成为比较稳定的状态。所以一般情况下不容易自发产生裂变。实际上，也发现了核自发裂变的情况，只是概率非常小。例如，^{235}U 自发裂变的半衰期为 10^{17} a，^{239}Pu 自发裂变的半衰期为 10^{15} a。

但是，如果原子核俘获一个中子后，就成为**复合核**。例如，^{235}U 俘获一个中子后，形成的复合核为^{236}U；^{238}U 俘获一个中子后，形成的复合核为^{239}U，等等。处于激发态的复合核会产生振荡，改变形状，如果激发能足够大，将会导致复合核的分裂。

例如，^{235}U 的激发能是 5.1 MeV，^{236}U 的激发能是 6.0 MeV。而^{235}U 俘获一个中子成为复合核^{236}U，放出的结合能是 6.8 MeV，这一能量足以使^{236}U 发生分裂。所以，^{236}U 只需要俘获一个能量不高的中子，即所谓**热中子**(指室温下与环境达到热平衡态的中子，能量为 kT，在 300 K 温度下，能量为 0.025 eV，速度为 2 200 km/s，也称**慢中子**)，即可发生裂变。但是，^{238}U 的激发能为 5.8 MeV，^{239}U 的激发能为 6.3 MeV，而^{238}U 俘获一个中子成为复合核^{239}U，放出的结合能只有 5.3 MeV，小于^{239}U 的激发能，因而不足以使^{238}U 发生裂变。要想使^{238}U 发生裂变，必须提高入射中子的能量，达到 1 MeV 以上，使其成为所谓的"快中子"。

2. 链式反应

^{235}U 当被一个热中子轰击后，产生裂变并同时释放出 2～3 个中子，如果附近还有^{235}U，则这些中子击中^{235}U 后，又使其裂变，并产生第二代中子，继续导致周围的^{235}U 发生裂变并放出第三代中子，不断继续这一过程，如果中子没有损失，裂变反应将持续下去，并不断加强，直至全部的^{235}U 都发生裂变为止。这种反应过程就是**链式反应**，如图 14.41 所示。由于每一次裂变并放出中子的过程在 10^{-12} s 内即可完成，所以如果有足够多的^{235}U，而反应过程又不加控制的话，将在瞬间释放出巨大的能量，形成核爆炸。

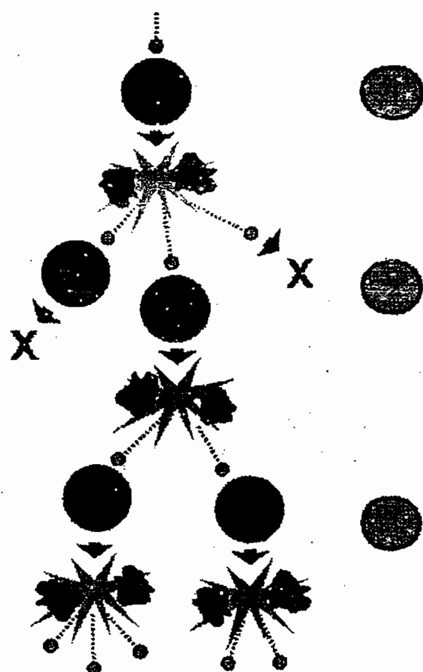
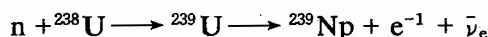


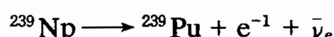
图 14.41　核裂变的链式反应

由于核裂变中产生的中子，其动能多在 5 MeV 的量级，故是快中子，快中子与铀核撞击，反应截面比热中子小得多，约为 1/200。因此，要实现链式反应，一种方法是要有足够多的^{235}U 集中在一起，使其线度大于中子的平均自由程，或者使用反射中子的材料将其包裹起来，形成中子反射层，这样一来，只要反应物达到所谓的**临界体积**，链式反应就能发生，与临界体积对应的质量就是**临界质量**。对于^{235}U，其临界体积的球半径不过2.4 cm，临界质量约为 1 kg。另一种方法是将快中子减速，成为热中子，从而能够引发并使链式反应持续下去。

除了^{235}U，^{239}Pu 也能在热中子的轰击下发生链式反应。这些元素都称作**核燃料**。天然铀矿中，^{235}U 仅占 0.72%，其余 99.27%的是^{238}U，而且将^{235}U 从铀矿中分离提纯需要复杂的设备和大量的资金。而^{239}Pu 在地球上并非天然存在的，最初是由美国的西博格、麦克米伦等于 1940 年末和 1941 年初，在回旋加速器中发现的。后来在天然铀矿中也发现了痕量的^{239}Pu，这实际上是^{238}U 通过下述过程产生的：



$$n + {}^{238}U \longrightarrow {}^{239}U \longrightarrow {}^{239}Np + e^{-1} + \bar{\nu}_e$$



$${}^{239}Np \longrightarrow {}^{239}Pu + e^{-1} + \bar{\nu}_e$$

快中子轰击^{238}U 可以得到^{239}Pu，这倒是为的利用提供了极好的途径。^{239}Pu 的半衰期为 24 110 a，在裂变反应中放出能量和中子的情况与^{235}U 相似。^{235}U 的半衰期为 703.8×10^{6} a，^{239}Pu，^{235}U 的自发衰变都以 α 衰变为主。

3. 核反应堆

利用链式反应的装置之一就是**核反应堆**(也称**原子反应堆**),这是一种可控的链式反应装置。将核燃料、中子减速剂与冷却剂放在一起,就构成了反应堆的**堆芯**。核燃料可以用**浓缩铀**,即经过提纯,^{235}U 含量较高的铀(根据国际原子能机构的定义,^{235}U 丰度为 3%的为核电站发电用**低浓缩铀**,丰度大于 80%的铀为**高浓缩铀**,其中丰度大于 90%的称为武器级高浓缩铀,主要用于制造核武器),也可以用天然铀。中子减速剂主要是轻水或重水、固态石墨或液态金属,其中重水同时起冷却的作用。链式反应速度(及中子增值速度)的控制是依靠控制棒实现的,控制棒用硼或镉制成,它们对快中子有很大的吸收截面,通过插入或拔出控制棒来改变反应堆中中子的增值速度。为防止中子的外泄,将堆芯用中子反射层包围起来,中子反射层多用石墨和铍制成。反应中产生的能量将其中的循环水加热产生蒸汽,即可利用。

如果按反应类型将核反应堆分类,则利用热中子的称作**热核反应堆**。其中用轻水作减速剂的,称**轻水堆**;用重水减速剂的,称**重水堆**。由于轻水对中子的吸收截面很大,所以轻水堆使用^{235}U 含量为 3%的低浓缩铀钚作燃料。重水对中子的吸收截面小,因而重水堆中快中子很多,快中子可以引起^{238}U 的裂变反应,所以重水堆也可以使用天然铀作燃料,大多数核电站都使用这种类型的热核反应堆。还有一种使用快中子的反应堆,称作**快中子堆**。这种反应堆没有中子减速剂,而使用浓缩铀或钚引发链式反应,释放出的快中子轰击^{238}U,引发^{238}U 的裂变。这种反应堆的核废料很少,但建造复杂,运行成本高。

核反应堆不仅可以作为能源使用,而且由于核裂变反应中产生了大量的放射性同位素、中子、各种射线以及轻子,还是科学研究的重要基地;同时,由于可以将^{238}U 变为^{239}Pu,所以,也是核燃料的工厂。

4. 核武器

核裂变是在第二次世界大战时期被发现的,而且这一事件又发生在纳粹德国,由于担心希特勒首先掌握并拥有核武器,在多名科学家的建议下,美国启动了“曼哈顿工程”。尽管这一工程中最先取得的成就是实现了链式反应的人工控制,但这一工程的目的还是要研制原子弹。“曼哈顿工程”集中投入了大量的人力和财力,并动员了全美国优秀的科学家,终于在 1945 年 7 月 6 日试爆了第一颗原子弹。

原子弹也是依靠链式反应爆炸的,由于用作军事目的,要求质量轻、体积小、反应激烈、威力巨大,所以原子弹是用高纯的浓缩铀(^{235}U)或钚(^{239}Pu)制成的。原子弹中,浓缩的核燃料分成两块,每一块不到链式反应的临界体积;但是,如果将两块合在一起,则达到临界状态,立刻爆炸,将巨大的能量瞬间释放,造成罕见的破坏。主要有两种方法将两块燃料合在一起。一种是将两块燃料分开置于圆筒形弹体的两侧,在弹体中引爆炸药,将它们推到一起,这是所谓的“枪法”。另一种在球形核燃料周围布满炸药,一同封装于弹体内。当炸药引爆时,产生的压强将核燃料向中心压缩,这时其中原子核的密度迅速提高,导致中子的平均自由程变短,因而可以达到链式反应的临界体积,这是所谓的“内爆法”。

美国第一颗试爆的就是用内爆法引燃的钚弹。当时,纳粹德国已经灭亡,但不可一世的日本还在太平洋战场上苦苦挣扎。美国政府既不愿意牺牲自己士兵的生命,也不愿意白白浪费纳税人的钱。于是,在 1945 年 8 月 6 日,向日本的广岛投下了一颗绰号为“小男孩”的原子弹(图 14.42),这是一颗枪式铀弹,爆炸威力约为 14 000 t TNT 当量。8 日又向长崎投下了另一枚绰号为“胖子”的内爆钚弹(图 14.43),爆炸威力约为 20 000 t TNT 当量。发动了侵略战争的日本

人终于自食其果，一周后即宣布无条件投降。

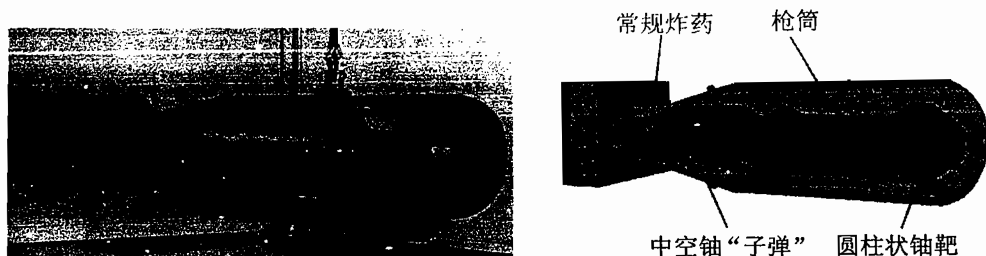


图 14.42 “小男孩”及其“枪法”引爆装置

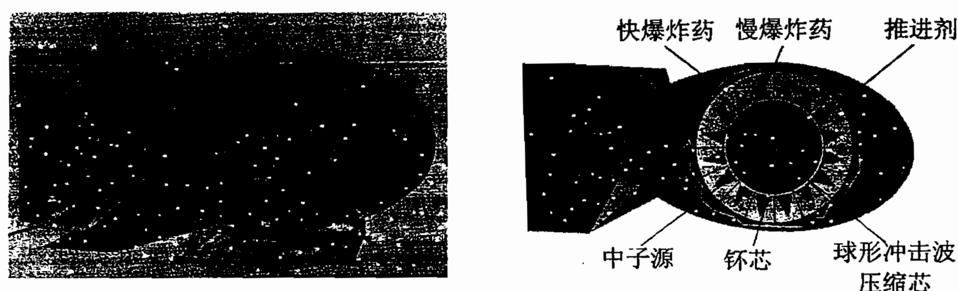


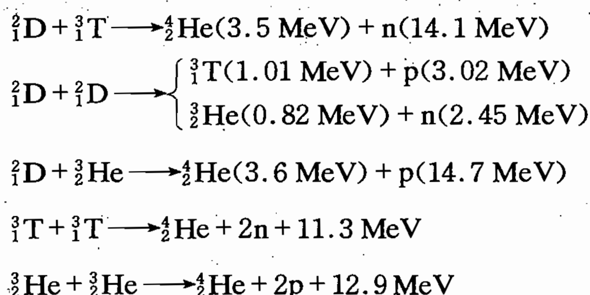
图 14.43 “胖子”及其“内爆法”引爆装置

14.6 核 聚 变

14.6.1 核聚变的能量

核聚变是两个或多个轻原子核聚合为一个较大等质量原子核的反应。

从比结合能曲线可以看出，质量很小的原子核，其比结合能较小，而质量中等的原子核，比结合能要大得多。所以如果轻核聚变为质量较大的原子核，所释放出的能量是相当可观的。这一点从表 14.6 也能看出。另外几个已经在实验室观察到的核聚变反应及其所产生的能量为：



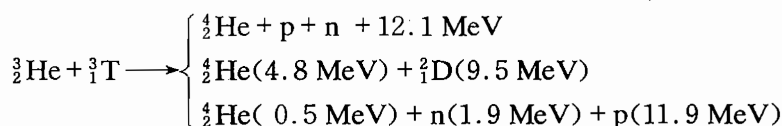
$$ {}_1^2\mathrm{D} + {}_1^3\mathrm{T} \longrightarrow {}_2^4\mathrm{He}(3.5\ \mathrm{MeV}) + \mathrm{n}(14.1\ \mathrm{MeV}) $$

$$ {}_1^2\mathrm{D} + {}_1^2\mathrm{D} \longrightarrow \begin{cases} {}_1^3\mathrm{T}(1.01\ \mathrm{MeV}) + \mathrm{p}(3.02\ \mathrm{MeV}) \\ {}_2^3\mathrm{He}(0.82\ \mathrm{MeV}) + \mathrm{n}(2.45\ \mathrm{MeV}) \end{cases} $$

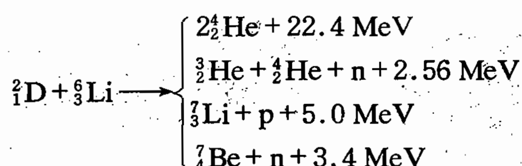
$$ {}_1^2\mathrm{D} + {}_2^3\mathrm{He} \longrightarrow {}_2^4\mathrm{He}(3.6\ \mathrm{MeV}) + \mathrm{p}(14.7\ \mathrm{MeV}) $$

$$ {}_1^3\mathrm{T} + {}_1^3\mathrm{T} \longrightarrow {}_2^4\mathrm{He} + 2\mathrm{n} + 11.3\ \mathrm{MeV} $$

$$ {}_2^3\mathrm{He} + {}_2^3\mathrm{He} \longrightarrow {}_2^4\mathrm{He} + 2\mathrm{p} + 12.9\ \mathrm{MeV} $$



$$^3_2\mathrm{He}+^3_1\mathrm{T}\longrightarrow\begin{cases}^4_2\mathrm{He}+\mathrm{p}+\mathrm{n}+12.1\ \mathrm{MeV}\\ ^4_2\mathrm{He}(4.8\ \mathrm{MeV})+^2_1\mathrm{D}(9.5\ \mathrm{MeV})\\ ^4_2\mathrm{He}(0.5\ \mathrm{MeV})+\mathrm{n}(1.9\ \mathrm{MeV})+\mathrm{p}(11.9\ \mathrm{MeV})\end{cases}$$



$$^2_1\mathrm{D}+^6_3\mathrm{Li}\longrightarrow\begin{cases}2^4_2\mathrm{He}+22.4\ \mathrm{MeV}\\ ^3_2\mathrm{He}+^4_2\mathrm{He}+\mathrm{n}+2.56\ \mathrm{MeV}\\ ^7_3\mathrm{Li}+\mathrm{p}+5.0\ \mathrm{MeV}\\ ^7_4\mathrm{Be}+\mathrm{n}+3.4\ \mathrm{MeV}\end{cases}$$



$$\mathrm{p}+^6_3\mathrm{Li}\longrightarrow^4_2\mathrm{He}(1.7\ \mathrm{MeV})+^3_2\mathrm{He}(2.3\ \mathrm{MeV})$$



$$^3_2\mathrm{He}+^6_3\mathrm{Li}\longrightarrow2^4_2\mathrm{He}+\mathrm{p}+16.9\ \mathrm{MeV}$$



$$\mathrm{p}+^{11}_5\mathrm{B}\longrightarrow3^4_2\mathrm{He}+8.7\ \mathrm{MeV}$$

上述都是轻元素的核聚变反应，以氢的同位素氘、氚的聚合，以及与其他轻元素的聚合反应为主，反应中所放出的能量，虽然都不及一个^{235}U 核的裂变能量，但它们的质量比^{235}U 小得多，所以如果按单个核子计算的话，比^{235}U 要大 4 倍左右。

还要指出的是，核裂变的燃料是重元素，在地球上的储量并不高，但氢及其同位素的储量是极高的，海水中氘的含量约为氢的 1/6 700，如果全部提取出来，经核聚变可转化为 10^{25} kW·h 的能量，足以供地球上的人类消耗上百亿年。而且聚变反应既没有辐射也没有核废料产生，要安全清洁得多。

但是，由于聚变反应要将两个原子核聚合在一起，而当两个都带正电荷的原子核靠得很近时，排斥力迅速增大，也就是说，要克服一个很高的库仑势垒才能聚合。例如，当两个氘核距离为 1.51 fm(这是氘核的半径)时，相互间的库仑排斥势可以达到 942 keV。还不仅如此，如果将一个加速的氘核射向靶中的氘核，还要与电子碰撞，而与电子碰撞的散射截面比与氘核碰撞的反应截面要大得多($10^{-21}\ \mathrm{cm}^2/(10^{-26}\mathrm{cm}^2)=10^6$)，入射的氘核将能量都损失在与电子的散射中，只有百万分之一的氘核能够与靶中的氘核起反应，因而无法使用加速器将一个氘核注入到另一个氘核内。采取让两个加速氘核对撞的方法，也不可能，因为氘核间偏转角等于 90°的库仑散射截面为 $10^{-22}\ \mathrm{cm}^2$，也比反应截面大 10^4倍，所以对撞的粒子都被散射到其他方向，不可能发生聚合。

因此，在进行了各种理论和实验上的尝试之后，人们接受了这样的现实：只有让轻元素处于极高的温度下，它们的原子核由于做剧烈的热运动，相互碰撞，才有可能实现聚合，发生聚变。如果氘核热运动的动能达到 10 keV，相应的温度是 10^8 K，所以核聚变也称作**热核反应**。在这样高的温度下，所有的原子都处于等离子态，即电子全部脱离原子核的束缚，等量的正电荷与负电荷以气体的形式存在。

14.6.2 核聚变的条件

由于热核反应的温度极高，不仅反应物处于等离子态，而且一旦反应物接触容器壁，就会立刻使容器处于等离子态。这样一来，就会有容器壁中原子序数很高的元素进入反应物，而这样的元素做高速热运动，会以大量电磁辐射的形式辐射能量，从而使反应物的温度迅速降低，导致聚变停止。劳森判据指出了发生核聚变的极限条件。所以，不能让等离子态的反应物与其他物体接触，而需要将其约束在一个空间中。主要有以下约束方式：

(1) 重力约束　依靠重力(万有引力)将等离子体约束在一起,这是恒星中核聚变的主要约束方式,但是在地球上是不能实现的。

(2) 磁约束　由于等离子体是带电的运动粒子,所以可以用强磁场控制其运动,同时,运动的电荷也产生磁场,该磁场又产生一种箍缩力,将等离子体限制在一个固定的区域内。

(3) 惯性约束　如果让聚变反应物在极短的时间内达到极高的温度,由于反应物的惯性,它们还没有来得及分散开来,聚变反应就完成了,所以,惯性约束其实就是不加约束。

实现惯性约束,就是要在瞬间提供巨大的能量,实用的方法,一是利用核裂变,即将轻核与原子弹放在一起,利用原子弹爆炸的能量引发核聚变,这就是氢弹的原理,但这样的反应过于剧烈,无法作为能源利用。另一种方法是利用强激光对反应物加热,为了控制聚变,每次反应所释放的能量不能太大,就是参与反应的原子核数量不能太多。可以将气态的氘、氚充入一个直径不超过 1 mm 的小球,制成靶丸,然后以强激光照射,实现聚变反应。在照射过程中,必须使靶丸各个方向均匀加热和受力,所以要求多路功率相等的激光从各个方向同时射到靶丸上,这就是激光约束核聚变。

【例 14.2】 证明以速度 v 运动的原子所发出的光子频率 ν' 与同一静止原子所发出的光子的频率 ν 之间满足多普勒关系.

解　原来静止的原子发射光子,获得反冲,如图 10.44 所示。可列出方程组



图 14.44　静止原子发光

$$\begin{cases} p' = p_\varphi \\ M_0c^2 = c\sqrt{p'^2 + 0^2c^2} + p_\varphi c \end{cases}$$

解得所发光子的动量为 $p_\varphi = \dfrac{M_0^2 - 0^2}{2M_0}c = \dfrac{h\nu}{c}$,或写作 $2M_0p_\varphi = (M_0^2 - M_0'^2)c$。

原来运动的原子,设其相应的物理量为(P, E),发光后由于反冲,物理量变为(P', E'),所发出的光子的物理量为$(P_\varphi, P_\varphi c)$,发光过程如图 10.45 所示。此过程的方程组为

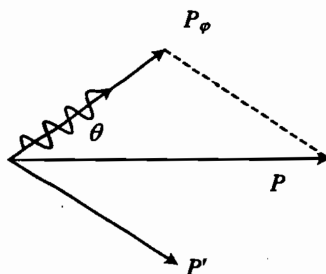


图 14.45　运动原子发光

$$\begin{cases} P = P' + P_\varphi \\ E = E' + P_\varphi c \end{cases},\quad 即 \quad \begin{cases} P'^2 = P^2 + P_\varphi^2 - 2PP_\varphi\cos\theta \\ E^2 = E'^2 + 2E'P_\varphi c + P_\varphi^2c^2 \end{cases}$$

两式相减,得到

$$\frac{E'^2}{c^2} - P'^2 = \frac{E'^2}{c^2} - P^2 - 2P'_\varphi\left(\frac{E}{c} - P\cos\theta\right)$$

把 $E^2 = P^2c^2 + M_0^2c^4$,$E'^2 = P'^2c^2 + M_0'^2c^4$ 代入上式,得到

$$M_0'^2c^2 = M_0c^2 - 2P_\varphi\left(\frac{E}{c} - P\cos\theta\right)$$

又由前面所得到的 $2M_0p_\varphi = (M_0^2 - 0^2)c$,得到 $2M_0p_\varphi = 2P_\varphi\left(\dfrac{E}{c} - P\cos\theta\right)$,即

$$P_\varphi = p_\varphi \frac{M_0c}{\dfrac{E}{c} - P\cos\theta}$$

由于

$$\begin{cases} P = M_0 \nu / \sqrt{1 - \dfrac{\nu^2}{c^2}} \\ E = M_0 c^2 / \sqrt{1 - \dfrac{\nu^2}{c^2}} \end{cases}$$

所以

$$P_\varphi = p_\varphi \frac{M_0 c}{\dfrac{E}{c} - P\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v}{c}\cos\theta}$$

即

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \dfrac{v}{c}\cos\theta}.$$

因此,两者之间满足多普勒关系。

参考文献

[1] 沈克琦. 高中物理学[M]. 3版. 北京:北京出版社,2006.
[2] 李椿,章立源,钱尚武. 热学[M]. 北京:高等教育出版社,1978.
[3] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京:高等教育出版社,1979.
[4] 崔宏滨,李永平,段开敏. 光学[M]. 北京:科学出版社,2008.
[5] 崔宏滨. 原子物理学[M]. 2版. 合肥:中国科学技术大学出版社,2012.

作者简介

崔宏滨　1982年考入中国科学技术大学，1999年获得中国科学技术大学理学博士学位。现任教于中国科学技术大学物理学院，承担“光学与原子物理”“力学与热学”“固体物理学”等核心课程的本科教学工作，是学校重点培养的教学骨干，教学成果显著，曾获中国科学技术大学第六届“困学守望”杰出教学奖（2011年）、中国科学技术大学校友基金会优秀教学奖（2009年）、中国科学技术大学华为奖教金（2003年）。出版了《光学》（科学出版社）、《原子物理学》（中国科学技术大学出版社）等大学教材。在中学物理教学方面造诣颇深，连续多年为全国奥林匹克物理竞赛夏令营的中学生以及睿达实验学校的学员讲授光学、热学和近代物理学。

选题编辑　肖向兵
责任编辑　郭红建
封面设计　页　子

定价：49.00 元

ISBN 978-7-312-02996-7

